गणित शिक्षण

सक्षमतामा आधारित निम्नमाध्यमिक शिक्षक तालिम
(५ महिने-दोस्रो मोडुल)

स्वाध्ययन सामग्री

नेपाल सरकार
शिक्षा तथा खेलकुद मन्त्रालय
शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

२०६३

गणित शिक्षण

सक्षमतामा आधारित निम्नमाध्यमिक शिक्षक तालिम

(५ महिने-दोस्रो मोडुल)

स्वाध्ययन सामग्री

नेपाल सरकार
शिक्षा तथा खेलकुद मन्त्रालय
शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर
२०६३

प्रकाशकः
नेपाल सरकार
शिक्षा तथा खेलकुद मन्त्रालय
शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

प्रथम संस्करण - २०६२
दोस्रो संस्करण - २०६३

टेलिफोन - ६-६३०१८०, ६-६३०७६६, ६-६३१२७६
फ्याक्स - ६-६३०१९३, ६-६३०४५७,
पो.ब.नं. - २१४५, ३६५२
E-mail - decedu@wlink.com.np, necd@ntc.net.np

सुझाव एवम् सल्लाह

श्री अर्जुनबहादुर भण्डारी
श्री बुनु श्रेष्ठ
डा. हिरा बहादुर महर्जन
श्री सुनीता मालाकार
श्री कमला पोखरेल
श्री इन्द्रबहादुर श्रेष्ठ
श्री गणेश सिंह

लेखन समूह

श्री तुलसीप्रसाद थपलिया
श्री लेखनाथ शर्मा
श्री इमनारायण श्रेष्ठ
श्री रामचन्द्र पौडेल
श्री दण्डपाणी शर्मा
श्री बरुण वैद्य
श्री राम हाडा

विषयवस्तु सम्पादन

श्री तुलसीप्रसाद थपलिया
श्री लेखनाथ शर्मा
श्री इमनारायण श्रेष्ठ

भाषा सम्पादन

श्री तोया खनाल

आवरण तथा चित्राङ्कन डिजाइन

श्री सुमन बज्राचार्य

कम्प्यूटर टाइप सेटिङ

श्री दीपेन्द्र झा

भूमिका

शिक्षाको गुणस्तर र प्रभावकारी शिक्षणका लागि शिक्षक तालिम अनिवार्य मानिन्छ । शिक्षण सिकाइमा प्रभावकारिता ल्याई गुणस्तरीय शिक्षा हासिल गर्न पेसागत रूपमा दक्ष र योग्य शिक्षकहरूको खाँचो पर्दछ । निम्नमाध्यमिक तथा माध्यमिक तहको शिक्षामा गुणस्तर अभिवृद्धि गर्ने उद्देश्यले माध्यमिक शिक्षा सहयोग कार्यक्रम कार्यान्वयनमा आएको छ । शिक्षक शिक्षा र विकास यस कार्यक्रमको एउटा महत्त्वपूर्ण अङ्ग हो । शिक्षकहरूको पेसागत दक्षता अभिवृद्धि गरी कक्षाकोठाको सिकाइ वातावरणमा सुधार ल्याउने प्रमुख उद्देश्यका साथ शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्रद्वारा निम्नमाध्यमिक तहका पाँचओटा र माध्यमिक तहका ६ ओटा मुख्य विषयलाई समेटेर सक्षमतामा आधारित १० महिने प्रमाणीकरण शिक्षक तालिमको पाठ्यक्रम तयार गरिएको छ । सोही पाठ्यक्रमअनुसार उक्त शिक्षक तालिमलाई तीन मोडुलमा विभाजन गरिएको छ । तीमध्ये दोस्रो मोडुल दूर शिक्षा पद्धतिमा आधारित छ । दोस्रो मोडुलको गणित शिक्षण विषयको लागि यो सामग्री प्रस्तुत गरिएको छ ।

गणित शिक्षणको यो स्वाध्ययन सामग्री निम्नमाध्यमिक तहको सक्षमतामा आधारित पाठ्यक्रममा आधारित छ । निम्नमाध्यमिक तहमा गणित शिक्षणमा देखिएका कमीकमजोरीहरू हटाई शिक्षणमा प्रभावकारिता बढाउन सम्बन्धित शिक्षकमा आवश्यक मात्रामा ज्ञान बढाउने उद्देश्यबाट यो स्वाध्ययन सामग्री तयार गरिएको हो ।

गणित शिक्षणको यस स्वाध्ययन सामग्रीमा एउटा एकाइभित्र एक वा एकभन्दा बढी पाठ छन् । एकाइको सुरुमा सक्षमता र एकाइ परिचय दिइएको छ । त्यसपछि पाठसम्बन्धी विषयवस्तु उल्लेख गरिएका छन् । पाठसम्बन्धी कुरा उल्लेख गर्दा विषय प्रवेशका रूपमा विषयवस्तुको विवरण, परियोजनाकार्य अध्ययनका लागि थप सामग्रीहरूको सूची तथा सन्दर्भसामग्री प्रस्तुत गरिएको छ । स्वाध्ययन सामग्रीलाई हुनेसम्म सरल बनाउन विषयवस्तुको विवरण विस्तृत रूपमा दिइएको छ । यस सामग्रीलाई बोधगम्य बनाउन शिक्षणका समस्या र सिद्धान्तसमेत ख्याल गरेर पाठ तयार पारिएका छन् । यसैले यस स्वाध्ययन सामग्रीले तालिमका सहभागी शिक्षकहरूलाई गणित शिक्षणको सम्बन्धमा पर्याप्त जानकारी दिन सक्छ भन्ने हाम्रो विश्वास छ ।

यस स्वाध्ययन सामग्रीलाई प्रकाशनयोग्य बनाउने कार्यमा संलग्न सबै धन्यवादका पात्र हुनुहुन्छ । यसलाई अझ प्रभावकारी र त्रुटिरहित बनाउन सुझाव प्रदान गर्ने सम्बद्ध सबै पक्षमा शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र आभार व्यक्त गर्दछ ।

२०६३

रामस्वरुप सिन्हा
कार्यकारी निर्देशक

विषयसूची

एकाइ एक

समूह

Competency :	Give definition, example and counter examples for each concept and principle included in set theory, apply the concepts and principles in solving problems and use set theory as the basic language of mathematics.

१. परिचय :

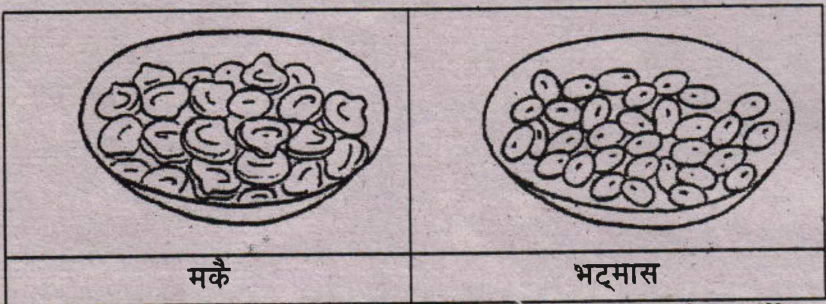
समूहको प्रयोग मानव जीवनको शुरुवातसँगै भएको मानिन्छ । मानव इतिहासको ढुङ्गे युग देखि नै मानिसहरू समूहमा बस्ने, शिकार गर्ने र बाँडचुड गरी खाने, जनावर आदिको आक्रमणबाट बच्न समूहमा हिड्ने गर्दथे । त्यही समयदेखि नै यो शब्दको प्रयोग केही न केही रूपमा हुँदै आएको छ । गणितमा औपचारिक रूपमा यसको प्रयोग उन्नाइसैं शताब्दीको मध्यतिरबाट मात्र हुन थालेको हो । गणितमा समूहको धारणा समावेश भएपछिको गणितलाई आधुनिक गणित (Modern mathematics) र यस अगाडिको गणितलाई परम्परागत गणित (Traditional mathematics) भनेर छुट्याउने गरिएको छ । आजभोलि समूहलाई गणितका सबैजसो विद्याको आधारभूत धारणाको रूपमा लिने गरिएको छ । गणितमा समूहको प्रवेश सँगै गणितीय धारणाहरूको शिक्षण सिकाइमा सरलता आएको अनुभव गरिएको छ । त्यसैले अधिकांश गणितीय धारणाहरूलाई यही समूहको आधारमा व्याख्या गर्न थालिएको छ । यसको सहयोगबाट शिक्षण गर्दा विद्यार्थीहरूको दैनिक जीवनसँग सम्बन्धित कुराहरू प्रयोगबाट दिन सकिने हुनाले यसको महत्वलाई अझ बढाएको छ ।

समूहको शाब्दिक अर्थ Group, Collection, Aggregate आदि हुन्छ । विद्यालयस्तरको गणितलाई आधुनिक गणितका धारणाहरूसँग समायोजन गरी उच्च शिक्षाका लागि आधार तयार पार्ने मान्यताअनुसार गणित विषयमा समूहलाई समावेश गरिएको हो । विद्यालयस्तरमा समूह शिक्षणको उद्देश्य यसको प्रारम्भिक ज्ञान दिई केही गणितीय समस्याको समाधानमा समूहको प्रयोग गर्न सहयोग गर्नु हो । त्यसैले यस एकाइमा समूहको अर्थ र सङ्केत, समूहको वर्णन (Specification of sets), समूहका प्रकार, समूहको गणनात्मक सङ्ख्या, समूहहरूको बीचको सम्बन्ध, भेन चित्र र समूहका क्रियाहरू र समूहको प्रयोग जस्ता कुराहरूको बारेमा चर्चा गरिएको छ ।

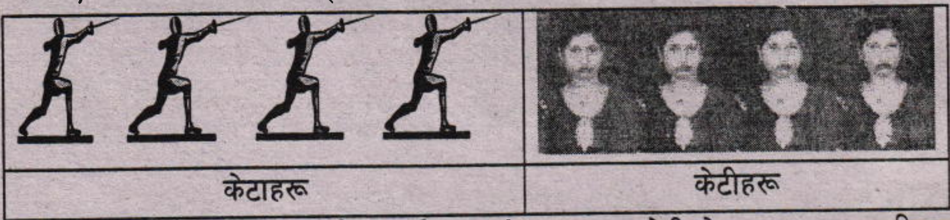
२. विषयवस्तु (Content):

२.१ समूहको अर्थ र सङ्केत (Meaning and notation of sets) :

प्रधानाध्यापक प्रदिपलाई शिक्षिका सहनशीलाको गणितको कक्षा अवलोकन गर्ने विचार आयो र गणितको कक्षामा समूह शिक्षण गर्दै गरेकी शिक्षिकाको कक्षा अवलोकन गर्नका लागि पसे । शिक्षिका सहनशीलाले "समूह" को अर्थ र सङ्केतको धारणा दिनका लागि एक पोका मकैको गेडा र एक पोका भट्मासका गेडा लिई दुईतिरका विद्यार्थीहरूलाई "यो के को पोका होला ?" भनी अनुमान गर्न लगाइन् । अनुमान गर्न लगाइसकेपछि दुबै पोका खोलेर देखाउँदै यसलाई गणितीय भाषामा मकैको पोकामा रहेका मकैको थुप्रोलाई "मकैको समूह" र भट्मासको पोकामा रहेको भटमासको थुप्रोलाई "भट्मासको समूह" भनिन्छ, भनी बताइन् ।



फेरि उनले केही केटीहरूलाई एकातिर र केटाहरूलाई अर्कोतिर उभिन लगाइन् र विद्यार्थीहरूलाई गणितीय भाषामा यी दुईतिर उभिएकाहरूलाई छुट्टाछुट्टै भन्दा कसरी भन्न सकिएला ? भनी प्रश्न गरिन् ।



यी दुईतर्फ उभिएका विद्यार्थीहरूलाई केटाको समूह र केटीको समूह भन्न सकिन्छ । त्यस्तै उनले केटाको समूहमा कोको छन् ? केटीको समूहमा नी ? जस्ता प्रश्नहरूको सहयोगबाट कुनै पनि "समूहमा भएका" व्यक्तिलाई त्यस समूहको सदस्य र समूहमा "कति" जना सङ्ख्या छन् त्यसलाई समूहको सदस्य (Member) सङ्ख्या भनिन्छ र सँगसँगै अगाडिको मकै र भट्मासको पोकामा नपरेका मकै र भट्मास अनि अगाडि केटा र केटीको समूहमा नपरेका बाँकी विद्यार्थीहरूलाई ती समूहका सदस्य भनिदैन भनी सम्झाइन् । शिक्षिका सहनशीलाले समूहको शिक्षण गर्नका लागि आफ्नो वरिपरि भएका, घरमा भएका, कक्षाकोठामा भएका वस्तुहरूलाई प्रयोगमा ल्याउने गर्दछिन् ।

विद्यार्थीहरूलाई यस्ता अरु समूहका उदाहरणहरू बनाउन लगाइन, विद्यार्थीहरुले निम्नअनुसारका समूह बनाए :

- बाख्राहरूको समूह,
- पशुपँक्षिहरूको समूह,
- खेलौनाहरूको समूह,
- नराम्रा विद्यार्थीहरूको समूह,
- घरपालुवा जनावरहरूको समूह आदि ।

यही क्रममा पुष्पाले बनाएको समूह "नराम्रा विद्यार्थीहरूको समूह" लाई लिएर यस समूहमा कोको पर्छ ? भन्ने प्रश्न गरिन् । प्रश्नको स्पष्ट जवाफ आएन । को राम्रो र को नराम्रो स्पष्ट भएन । त्यसपछि उनले निम्नअनुसारको निष्कर्ष बताइन् :

समूह बनाउँदा कुनै पनि सदस्य समूहमा पर्छ वा पर्दैन भनेर स्पष्ट किटान गर्न सकिने हुनुपर्छ । सङ्कलित "वस्तुहरू" स्पष्ट रूपमा समूहको सदस्य हो वा होइन भनी किटान गर्न नसकिने भएमा त्यो समूह हुन सक्दैन । त्यसैले समूह भनेको राम्ररी परिभाषित वस्तुहरूको सङ्कलन हो, यस्तो सङ्कलनलाई राम्ररी परिभाषित समूह (Well-defined set) भनिन्छ ।

शिक्षिका सहनशीलाले समूहलाई जनाउन सधैं Capital letters A,B,C,........,X,Y,Z को मात्र प्रयोग गर्छिन् र विद्यार्थीहरूलाई पनि यसै गर्न लगाउछिन् । समूहका सदस्यहरूलाई मझ्यौला कोष्ठ { } भित्र राखी अर्धबिराम (,) बाट छुट्याउन लगाइन् । जस्तै :

A={स्याउ, सुन्तला, आँप, केरा, अङ्गुर}

X={बस, ट्याक्सी, ट्रक, मोटरसाइकल}

Z={1,2,3,4,5}

समूहलाई यसरी जनाउने तरिकालाई नै समूहको सङ्केत (Notation of set) भनिन्छ, भनी निष्कर्ष सुनाइन् ।

२.२ समूहको वर्णन वा समूहलाई व्यक्तगर्ने तरिका (Specification of sets) :

शिक्षिका सहनशीलाले शिक्षण गर्ने तरिका मलाई मन पर्छ । उनले समूहलाई व्यक्तगर्ने तरिका सिकाउन तल दिइएअनुसार गरिन् :

क) विद्यार्थीहरूलाई विभिन्न रंगका कलमका बिर्कोहरू, डाइसहरू, विभिन्न अन्नका दानाहरू आदि मिसाई वितरण गरिन् र निम्नअनुसार समूह बनाउन लगाइन् ।

- अन्नहरूको समूह,
- धनहरूको समूह,
- रातोवस्तुहरूको समूह,
- विरुवाका पातहरूको समूह ।

ख) विद्यार्थीहरूले बनाएका समूहहरूलाई अवलोकन गर्दा विद्यार्थीहरूले समूहलाई व्यक्तगर्ने तरिका फरकफरक पाइयो । त्यसपछि समूहलाई एकभन्दा बढी तरिकाद्वारा व्यक्त गर्न सकिन्छ भन्दै तलको तालिका बनाई प्रस्तुत गरिन् ।

वर्णनात्मक विधि (Descriptive method)	सूचीकरण विधि (Listing method)	समूह निर्माण विधि (Set builder method)
हप्ताका सात बारहरूको समूह	{आइतबार, सोमबार, मङ्गलबार, बुधबार, बिहिबार, शुक्रबार, शनिबार}	{x:x हप्ताको एउटा बार हो ।}
कक्षा आठमा टोपी लगाउने विद्यार्थीहरूको समूह	{प्रदिप, सुरज, शिव, हरि}	{x:x एउटा टोपी लगाउने विद्यार्थी हो ।}
१० भन्दा ठूला र २० भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरूको समूह	{12, 14, 16, 18}	{x:x, 10 भन्दा ठूलो र 20 भन्दा सानो एउटा जोर सङ्ख्या हो ।}

समूहलाई व्यक्त गर्ने तरिका उदाहरणहरूसहित तालिका प्रस्तुत गरिसकेपछि उनले तलको निष्कर्ष बताइन् ।

- समूहमा पर्ने वस्तुहरूको गुणलाई विचार गरी शब्द वा वाक्यद्वारा अभिव्यक्त गरिने विधिलाई वर्णनात्मक तरिका (Descriptive method) भनिन्छ ।
- समूहमा सबै सदस्यहरूलाई मझौला कोष्ठ { } भित्र अर्धबिराम { , } ले छुट्टाएर सूची बनाई राख्ने तरिकालाई सूचीकरण विधि (Listing method) भनिन्छ ।
- समूहका कुनै एउटा सदस्यको साझा गुणका आधारमा चलको व्याख्या गरिने विधिलाई समूह निर्माण विधि (Set builder method) भनिन्छ । यहाँ यस्तो (:) चिन्हले "भनेको" अर्थात् 'Such that' भन्ने जनाउँछ ।

ग) निष्कर्ष सुनाइसकेपछि विद्यार्थीहरूलाई तल दिइएका समूहहरूलाई माथि उल्लेख गरिएका बाँकी दुईओटा तरिकाबाट लेख्न लगाइन् ।

P = एकदेखि दशसम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह ।

A = {a,e,i,o,u}

N = 20 सम्मका रुढ सङ्ख्याहरूको समूह ।

V = {आँप, केरा, स्याउ, अम्बा}

M = {x:x ज्यामिति बाकसभित्र रहेको एउटा सामान हो}

R = {I,V,X,L,C,D,M}

घ) सहनशीलाले समूहको सदस्यता जनाउने शिक्षण क्रियाकलाप यसरी बनाइन् ।

यहाँ समूह A का सदस्यहरू 1,2,3 र 4 हुन् । अङ्क 5 समूह A को सदस्य होइन । यसलाई गणितीय ढङ्गमा कसरी जनाउने होला ? भन्ने प्रश्न गरिन् र एकछिन विद्यार्थीहरूलाई सोच्ने अवसर दिइन् । विद्यार्थीबाट भएका प्रयासहरूको कदर गर्दै र समेट्दै उनले समूहको सदस्यता जनाउने निश्चित सङ्केतको प्रयोग गर्ने प्रचलन रहेको जानकारी दिइन् । यसका लागि समूह A का सदस्यहरूको सहयोगमा यसरी देखाइन् :

$A=\{1,2,3,4\}$

यो समूहमा 1 छ,

त्यसैले, $1\in\{1,2,3,4\}$

त्यस्तै, यो समूहमा 3 पनि छ,

त्यसैले, $3\in\{1,2,3,4\}$ अर्थात्, $3\in A$

1,2,3,4 समूह A का सदस्यहरू हुन् ।

तर 5 समूह A को सदस्य होइन ।

त्यसैले, $5\notin\{1,2,3,4\}$। अर्थात् $5\notin A$ ·

कुनै पनि समूहको सदस्य हो वा होइन भनेर व्यक्त गर्न $\in$ र $\notin$ चिन्हको प्रयोग गर्ने गरिन्छ ।

- चिन्ह $\in$ ले सदस्य हो अथवा समूहमा पर्छ, भन्ने जनाउँछ ।
- चिन्ह $\notin$ ले सदस्य होइन अथवा समूहमा पर्दैन भन्ने जनाउँछ ।

अन्तमा उनले तलका समूहहरूलाई सूचीकरण विधि (Listing method) मा परिणत गरी समूहमा पर्ने र नपर्ने सदस्यहरूलाई $\in$ र $\notin$ ले जनाउन निर्देशन दिइन ।

- आफ्नो कोठामा भएका सामानहरूको समूह
- दशभन्दा साना सङ्ख्याहरूको समूह
- दशभन्दा साना बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह
- हप्ताका सात बारहरूको समूह ।

२.३ समूहको गणनात्मकता (Cardinality of a set) :

समूह A={ बिरालो, भेडा, गाई, भैसी }

यो चारओटा घरपालुवा जनावरहरूको समूह हो । यसमा जम्मा चारओटा सदस्यहरू छन् । यदि V ले अङ्ग्रेजी वर्णमालामा स्वरहरूको समूह जनाउँछ भने

$V=\{a,e,i,o,u\}$, यसमा समूह V का सदस्यहरूको सङ्ख्या 5 छ । त्यस्तै एकजना शिक्षकले आफ्नो दराजमा 17 ओटा शिक्षण सामग्रीहरू राखेका छन्, उनको दराजमा राखेका सामग्रीहरूको समूहलाई M मान्दा समूह M का सदस्यहरूको सङ्ख्या 17 हुन्छ ।

माथिका यस्ता उदाहरणहरूलाई सङ्केतको रूपमा जनाउँदा,

$n(A)=4$

n(V)=5 र

n(M)=17 हुन्छ ।

यहाँ n ले सदस्य सङ्ख्यालाई जनाउँछ ।

समूहमा भएका सदस्यहरूको सङ्ख्यालाई समूहको गणनात्मकता (Cardinality of set) भनिन्छ ।

समूह B={1,1,1,2,2,2,1} को गणनात्मकता कति होला ? यस्तो जवाफमा विद्यार्थीहरूले 7 भन्न सक्दछन् । समूहको गणनात्मकता समूहमा देखिने सदस्यहरूको सङ्ख्या होइन, फरकफरक सदस्य सङ्ख्या मात्र हो । त्यसैले समूह B को गणनात्मकता 2 मात्र हुन्छ । यसलाई n(B)=2 लेखिन्छ ।

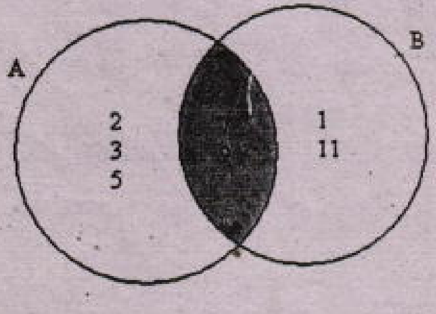
२.४ भेन चित्र (Venn diagram):

समूह वा समूहका विभिन्न सम्बन्धहरूलाई जनाउने चित्रात्मक प्रस्तुतिलाई भेनचित्र (Venn diagram) भनिन्छ । ब्रिटिस गणितज्ञ John venn ले सन् १८७६ मा सर्वप्रथम यसको प्रयोग गरेकाले उनैका नामबाट यस चित्रको नाम पनि भेनचित्र भनी राखिएको हो । समूहलाई चित्रात्मक प्रस्तुतिका लागि यस्ता चित्रहरूको प्रयोग गरिन्छ । सर्वव्यापक समूहका लागि आयताकार क्षेत्रको प्रयोग गरिन्छ भने अन्य समूहका लागि गोलाकार क्षेत्रको प्रयोग गरिन्छ । अर्थात समूहका प्रत्येक सदस्य (Element) हरूलाई वृत्ताकार क्षेत्रभित्र प्रस्तुत गरिन्छ । समूहमा यसको प्रयोगले त्यसलाई बुझ्न र सम्बन्ध पत्ता लगाउन सजिलो हुन्छ ।

A={2,3,5,7,9}

B={1,7,9,11}

समूह A र B लाई भेनचित्रमा निम्नअनुसार देखाइन्छ:



२.५ समूहका प्रकार (Types of Sets):

शिक्षिका सहनशीलाले "समूहको प्रकार" को शिक्षण गर्ने सिलसिलामा तल दिइएअनुसार गर्ने गर्दछिन् । उनको शिक्षण गर्ने तरिका मलाई ज्यादै मन पर्छ । उनले समूहलाई निम्नअनुसार वर्गीकरण गरी शिक्षण गर्ने गर्दछिन् ।

क)   सीमित र असीमित समूह (Finite and infinite sets):

तलका समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्न लगाइन् ।

i. 30 भन्दा साना रुढ सङ्ख्याहरूको समूह

ii. 5 भन्दा ठूला गन्ती सङ्ख्याहरूको समूह

iii. एउटा रेखाखण्डमा भएका बिन्दुहरूको समूह

iv. नेपालका अञ्चलहरूको समूह ।

यी सबै समूहहरूको सूची बनाउन सक्यौ ? भन्ने प्रश्न गरिन् यहाँ (i) र (iv) मा बनेका समूहहरूका सदस्य सङ्ख्या सीमित वा गन्ती गर्न सकिन्छ र (ii) र (iii) मा भएका समूहहरूको सदस्य सङ्ख्या गन्ती गर्न वा सबै सदस्यहरूको सूची बनाउन सकिँदैन । त्यसैले यस्ता समूहहरूलाई क्रमशः सीमित (Finite) र असीमित (Infinite) समूह भनिन्छ, भन्दै तलको निष्कर्ष सुनाइन् ।

कुनै पनि समूहमा रहेका सबै सदस्यहरूलाई गणना गर्न सकिन्छ भने त्यसलाई सीमित समूह र सबै सदस्यहरू अनगिन्ती छन् भने त्यस्तो समूहलाई असीमित समूह भनिन्छ ।

ख)   खाली समूह (Empty set) :

यस समूहको शिक्षण गर्दा विद्यार्थीहरूलाई तलका समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्न लगाउन सकिन्छ ।

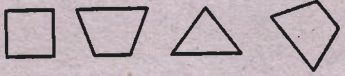
- पुच्छर भएका मानिसको समूह,
- ३ वर्षभन्दा कम उमेरका कक्षा आठमा पढ्ने विद्यार्थीहरूको समूह,
- 5000 kg तौल भएका शिक्षकहरूको समूह,
- नेपालका हालसम्मका महिला प्रधानमन्त्रीको समूह,
- 12 feet अग्ला नेपालीहरूको समूह ।

माथि दिइएका समूहहरूको गणनात्मक (Cardinality) कतिकति छ वा सबै समूहमा कतिकति सदस्य छन् ? भनी प्रश्न गर्ने ।

यसरी शिक्षकबाट गरिएका प्रश्नहरूको जवाफमा विद्यार्थीहरूबाट सदस्य नै छैन वा सदस्य शुन्य छ वा समूहको गणनात्मकता शुन्य हुन्छ भन्ने जवाफ प्राप्त भएपछि यस्तो समूहलाई खाली समूह वा शुन्य समूह भनिन्छ भनी निष्कर्ष दिन सकिन्छ । खाली समूहलाई ϕ वा { } बाट जनाउने प्रचलन छ ।

ग)   समतुल्य र बराबर समूह (Equivalent and equal sets):

शिक्षक प्रशान्तले विद्यार्थीहरूलाई समतुल्य र बराबर भिन्नको अर्थ बुझाउनका लागि तल दिइएको प्रक्रिया अपमाउने गर्दछन् । उनले तलका समूहहरूको विद्यार्थीहरूलाई अध्ययन गर्न लगाए ।

A = {  }

B={बिरालो, मुसा, चरा}

C={a,b,c,d}

D={c,b,d,a}

यी समूहहरूको बीचमा केके समानता र असमानताहरू छन् ? भन्ने प्रश्न गरे । विद्यार्थीहरूबाट आएका जवाफहरूलाई समेट्दै समूह A र समूह C मा सदस्य सङ्ख्या 4 समान छ तर समूहका सदस्यहरू फरकफरक छन् । त्यस्तै समूह C र समूह D सदस्य सङ्ख्या 4/4 छ भने सदस्यहरू पनि समान छन् । माथिको उदाहरणमा समूह A र C, A र D समतुल्य Equivalent) समूह र समूह C र D बराबर वा समान (Equal) समूहका उदाहरणहरू हुन् ।

यदि दुईओटा समूहहरू A र B मा भएका सदस्यहरूको सङ्ख्या बराबर छ भने n(A)=n(B) लेख्न सकिन्छ । यस्ता समूहहरू A र B लाई नै समरूप समूह भनिन्छ । यसलाई A~B लेख्न सकिन्छ ।

यदि दुईओटा समूहका सदस्यहरू उत्तिकै र उही छन् भने ती दुई समूहहरू बराबर हुन्छन् । माथिको उदाहरणमा C र D बराबर छन् । यसलाई C=D लेखिन्छ ।

घ) खप्टिएका र अलग्गिएका समूहहरू (Overlapping and disjoint sets):

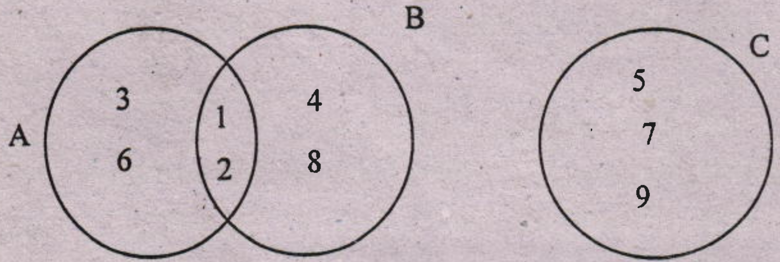
यी समूहहरूको शिक्षण गर्दा केही सदस्यहरू साझा भएमा समूहहरू तथा कुनै पनि सदस्य साझा नभएका समूहहरू निर्माण गरी उदाहरण स्वरूप देखाउन सकिन्छ । जस्तै :

6 लाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याको समूह, A={1,2,3,6}

8 लाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याको समूह, B={1,2,4,8}

3 भन्दा ठूलो र 10 भन्दा सानो बिजोर सङ्ख्याको समूह C={5,7,9}

यी समूहहरूमा A र B का साझा सदस्यहरू 1र 2 छन् भने A र C वा B र C का कुनै पनि सदस्यहरू साझा छैनन् । यहाँ A र B लाई खप्टिएका समूह (Overlapping sets) र A र C वा B र C लाई अलग्गिएका समूहहरू (Disjoint sets) भनिन्छ । यी समूहलाई भेन चित्रमा देखाउदा,



यस्ता प्रशस्त उदाहरणहरू दिन सकिन्छ ।

ङ) **सर्वव्यापक समूह (Universal set) :**

पूर्णसङ्ख्याको समूह w={0,1,2,3,....................} लिऔ र विद्यार्थीहरूलाई निम्न समूहहरू बनाउन लगाऔ :

- जोर सङ्ख्याहरूको समूह E,
- गन्तीका सङ्ख्याहरूको समूह N,
- वर्ग सङ्ख्याहरूको समूह S,
- बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह O।

अब, समूह W र अन्य समूहहरूको बीचमा कस्तो सम्बन्ध छ ? विचार गर्न लगाऔ ।

यस्तै अन्य प्रसस्त उदाहरणहरू दिइसकेपछि समूहको क्षेत्र (Scope) को आधारमा सर्वव्यापक समूहलाई परिभाषित गर्ने गरिन्छ । कुनै एउटा खास उदाहरणका निमित्त आवश्यक भएका सम्पूर्ण सदस्यहरूको समूहलाई सर्वव्यापक समूह भन्ने गरिन्छ । हामी हप्तामा आउने दिनहरूको उदाहरण लिएका अवस्थामा A={आइतबार, मङ्गलबार} छ भने हप्तामा आउने सबै बारहरूको समूहलाई सर्वव्यापक समूह भन्छौ । त्यसैले सबै खाले समूहहरू र समूहका क्रियाहरू अटाउनसक्ने एउटै विशाल समूहलाई सर्वव्यापक समूह (Universal set) भनिन्छ । नेपालका जिल्लाहरूको कुरा गर्दा ७५ ओटा जिल्लाहरूको समूह सर्वव्यापक समूह हुन्छ अञ्चलको कुरा गर्दा १४ ओटा अञ्चल सर्वव्यापक समूह हुन्छ । सर्वव्यापक समूह भन्नाले ब्रहमाण्डका सबै वस्तुहरूको समूह नभई जुन सन्दर्भमा छलफल गर्न लागिएको हो सोही अर्थमा सर्वव्यापक समूहको क्षेत्र निर्धारण हुन्छ । त्यसैले छलफलका लागि तय भएका सदस्यहरू छान्न सकिने सदस्यहरू रहेको ठूलो समूह नै सर्वव्यापक समूह हो । निष्कर्षमा भन्दा,

कुनै एउटा निश्चित समूहमा छलफलभित्र आउन सक्ने सबै प्रकारका समूहहरू समावेश भएका छन् भने सो निश्चित समूहलाई सर्वव्यापक समूह (Universal set) भनिन्छ । यस्तो समूहलाई U ले जनाइन्छ । भेन चित्रमा देखाउँदा यसलाई आयतबाट देखाउने चलन छ ।

निम्नलिखित अवस्थामा आउने सर्वव्यापक समूहहरू कुनकुन होलान् ? विचार गरौ ।

- महिनाहरूको अध्ययन
- एक अङ्कले बनेका सङ्ख्याहरूको अध्ययन
- प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको अध्ययन
- कक्षा ९ मा पढने विद्यार्थीहरू
- पर्वत जिल्लाका महिला शिक्षिकाहरू

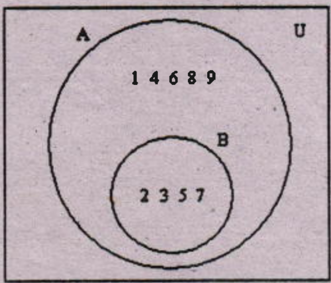
ख) समूहभित्रको समूह वा उपसमूह (Subset):

शिक्षक प्रशान्तले उपसमूह सिकाउन यस्तो क्रियाकलाप गर्दै सिकाए ।

A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

B={2,3,5,7}

यसलाई भेन चित्रमा देखाए ।



यहाँ, समूह A र समूह B का बीचमा केकस्तो सम्बन्ध रहेको छ ? यसको जवाफ विद्यार्थीहरूबाट खोजे । दिइएको उदाहरणमा समूह B का सबै सदस्यहरू समूह A मा पर्दछन् । अर्थात् समूह B का सबै सदस्यहरू समूह A का पनि सदस्यहरू हुन्, त्यसकारण समूह B समूह A को उपसमूह हो ।

साधारणतया एउटा समूहका सदस्यहरूबाट अर्को समूह वा अरू समूहहरू बनेका छन् भने त्यस्ता समूहहरूलाई पहिलेको समूहको उपसमूह भनिन्छ । माथिको उदाहरणमा समूह B समूह A को उपसमूह हो यसलाई सङ्केतमा लेख्दा $B \subset A$ वा $A \supset B$ लेखिन्छ र पढ्दा समूह B, समूह A को उपसमूह हो भनेर पढिन्छ । जुनसुकै समूहमा खाली समूह त्यसको उपसमूह हुन्छ।

नोट :

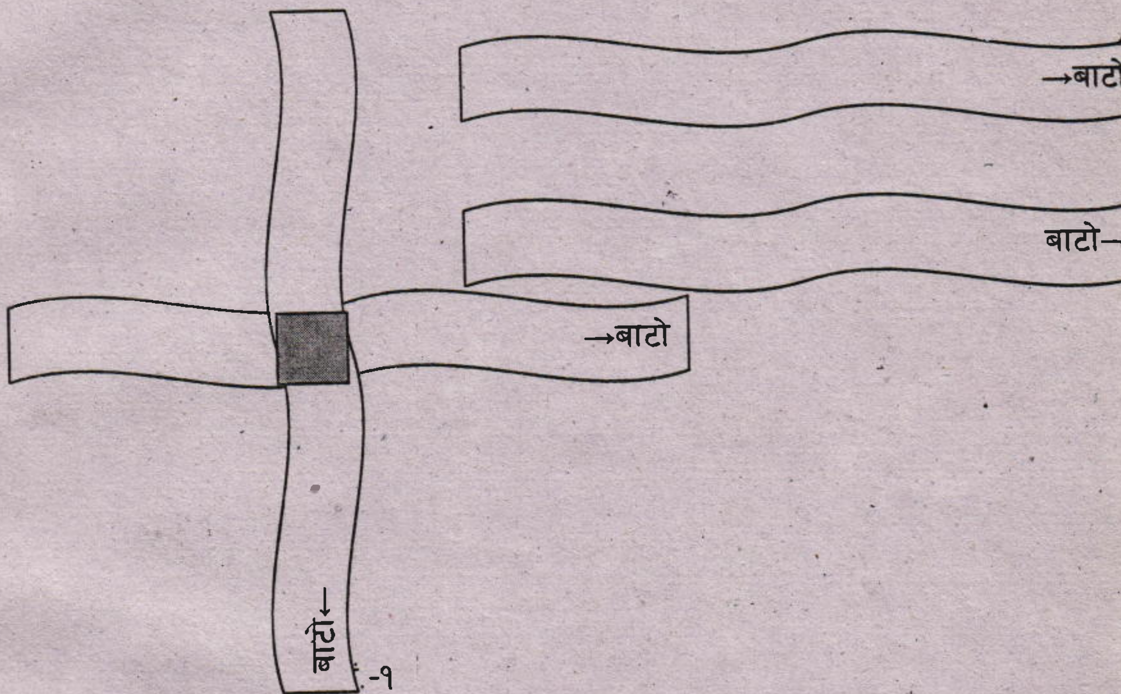
यदि समूह A समूह B को उपसमूह होइन भने समूह A को कम्तिमा एउटा सदस्य समूह B को सदस्य नभएको हुनुपर्दछ । अन्यथा समूह A समूह B को उपसमूह हुन्छ ।

२.६ समूहका क्रियाहरू (Set operations)

समूहहरूका क्रियाअर्न्तगत विद्यालयमा शिक्षण गर्दा शैक्षिक सामग्रीका रूपमा आफ्नो वरिपरि पाइने जुनसुकै वस्तुहरूको सङ्कलन गरी प्रयोगमा ल्याउन सकिन्छ । यस्ता वस्तुहरूको सहयोगबाट कक्षाकोठामा समूहका क्रियाहरू जनाउने गरी सिकाइ क्रियाकलापहरू सञ्चालन गर्न सकिन्छ । समूहका क्रियाहरू निम्नअनुसार छन् :

क) समूहहरूको प्रतिच्छेदन (Intersection of sets)

शिक्षक प्रशान्तले समूहहरूको प्रतिच्छेदनको धारणा शिक्षण गर्दा तल दिइएको जस्तै चित्र बनाए र निम्नअनुसार गर्दै गए :



पहिलो चित्रमा दुईओटा बाटाहरू छायाँ परेको भागमा काटिएका छन् । दुबै बाटोको साझा भागलाई के भन्न सकिएला ? त्यस्तै दोस्रो चित्रमा दुईओटा बाटाहरू कुनै पनि ठाउँमा काटिएका छैनन् । यसलाई गणितीय भाषामा के भन्न सकिएला ?

उनले फेरि तलका दुई समूहहरू बोर्डमा लेखे :

स्याउ मन पराउने विद्यार्थीहरू A={राम, हरि, प्रदिप, पुष्पा}

सुन्तला मन पराउने विद्यार्थीहरू B={कृष्ण, पद्‌मा, प्रदिप, पुष्पा}

समूह A र समूह B दुबैमा भएका अर्थात स्याउ र सुन्तला दुबै मन पराउने विद्यार्थीहरू समूह C={प्रदिप, पुष्पा} बनाउन लगाए, र यस समूहलाई समूह A र B को प्रतिच्छेदन भनिन्छ भनी बताइदिए ।

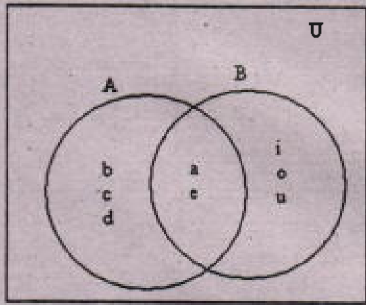
समूहहरू A र B को प्रतिच्छेदनमा A र B दुबै समूहहरूका साझा सदस्यहरूलाई मात्र लिइन्छ । यसलाई $A \cap B$ ले जनाइन्छ । यसलाई पढदा A प्रतिच्छेदन B अर्थात् A intersection B हुन्छ ।

यसलाई समूह चित्रमा देखाउँदा,

यदि, $A=\{a,b,c,d,e\}$

$B=\{a,e,i,o,u\}$ भए

$A\cap B=\{a,e\}$ हुन्छ ।



ख) **समूहहरूको संयोजना** (Union of sets)

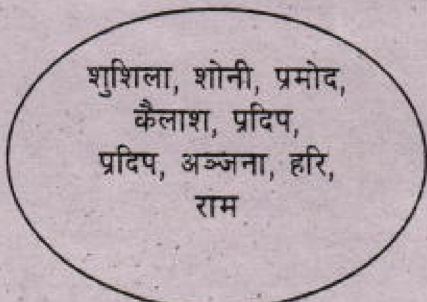
शिक्षणको क्रममा शिक्षक प्रशान्तले कक्षाकोठाबाटै आठजना विद्यार्थीहरू लिई तल दिइए जस्तै समूह बनाए :

A

B

विद्यार्थीलाई A र B दुबै समूहका सदस्यहरू पर्ने गरी एउटै समूह बनाउन सकिन्छ ? भन्दै त्यस्तो समूह बनाउन लगाए । विद्यार्थीहरूले यस्तो समूह बनाए :

C =



अब, प्रशान्तले समूहको संयोजनको अर्थ बताए र विद्यार्थीहरूले बनाएको समूहलाई परिमार्जन गर्न लगाए ।

समूहहरू A र B को सदस्यहरूबाट बनेको समूहलाई ती दुई समूहको संयोजन भनिन्छ । यसलाई $A \cup B$ ले जनाइन्छ । यसलाई A संयोजन B अर्थात् (A union B) भनेर पढिन्छ । यसरी बन्ने समूहमा समूहका सदस्यहरू दोहोरिनु हुँदैन ।

संयोजनको अर्थ स्पष्ट भइसकेपछि विद्यार्थीहरूले माथि आफूले बनाएको संयोजन समूह C मा परिमार्जन गरी यस्तो समूह बनाए :

C= शुशिला, शोनी, प्रमोद,
कैलाश,
प्रदिप, अन्जना, हरि, राम

ग) **समूहको पूरक (Complement of a set)**

शिक्षक प्रशान्तले समूहको पूरकका बारेमा शिक्षण गर्दा सधैंजसो एउटा सर्वव्यापक समूह परिभाषित गरी त्यही सर्वव्यापक समूहको उपसमूह निर्माण गर्दछन् । जस्तै :

उनीसँग बिहानी कक्षामा पढ्न आउने विद्यार्थीहरूको समूह (U)={प्रदिप, सुरज, पुष्पा, शोनी, प्रतिक्षा, प्रकाश}

यीमध्ये गणित विषय मन पराउने विद्यार्थीहरूको समूह A={प्रदिप, सुरज, शोनी}

अब, सर्वव्यापक समूहका सदस्य भएका तर A को सदस्य नभएका विद्यार्थीहरूको समूहलाई "पूरक समूह" भनिन्छ भनी बताए ।

यहाँ, A को पूरक समूह $\overline{A}$={पुष्पा, प्रतिक्षा, प्रकाश}हुन्छ ।

यस्तै गरी उनले अर्को उदाहरण पनि दिए :

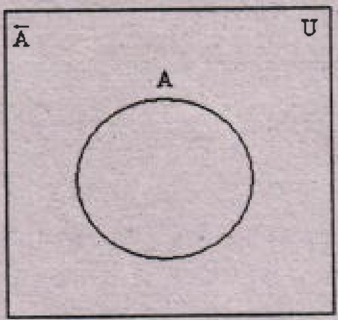
मानौं,

U={नेपालमा आउने पर्यटकहरू}

A={नेपालका हिमाल चढ्ने पर्यटकहरू}

यहाँ समूह A सर्वव्यापक समूह U को उपसमूह हो । हिमाल नचढने पर्यटकहरू समूह U का सदस्यहरूबाट बन्ने समूहलाई समूह A का पूरक समूह (Complement of set A) भनिन्छ । चित्रमा छायाँ परेको भागले समूह A को पूरक समूहलाई जनाउँछ ।

भेन चित्र हेरेर तलका सम्बन्धहरू लेख्न सकिन्छ ?



$U = A \cup \overline{A}$

$A \cap \overline{A} = \phi$

समूहहरू A को पूरक समूह (Complement of set A) भनेको समूह A का सदस्यहरूबाहेकका सर्वव्यापक समूह U को सदस्यहरूबाट बन्ने समूह हो । यस पूरक समूहलाई $\overline{A}$ ले जनाइन्छ ।

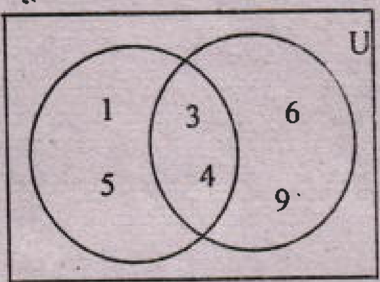
घ) **समूहहरूको फरक** (Difference of sets)

समूहहरूको फरकको शिक्षण गर्दा शिक्षक प्रशान्तले दुईओटा खप्टिएका समूहहरू (Overlapping sets) निर्माण गरी देखाए :

A={1,3,4,5}

B={3,4,6,7}

यी दुई समूहलाई भेन चित्रमा पनि देखाए :



अब,

चित्रमा समूह A को 1 र 5 ले बनेको समूहलाई A र B को सम्बन्ध देखाई कसरी व्याख्या गर्न सकिन्छ ? छलफल गराए ।

"1 र 5 को समूह" भन्दा B को सम्बन्ध देखिएन । तर "B मा नपरेका A का सदस्यहरू" भन्नाले के बुझिन्छ ? के B मा नपरेका A का सदस्यहरूको समूहमा 3 र 4 पर्छन् ? पर्दैनन् । यो समूहलाई A-B ले जनाइन्छ र A-B लाई A फरक B (A differencee B) भनिन्छ ।

"समूह A बाट समूह B सँग खप्टिएको भाग हटाएको समूह" लाई A-B ले जनाइन्छ, र पढ्दा "A फरक B" भनेर पढिन्छ ।

समूहको प्रयोग (Application of set)

उन्नाइसौ शताब्दीका मध्यसम्म समूहको प्रयोग गणितमा भएको मानिदैन । जब यस शताब्दीको मध्यतिर गणितमा यसले औपचारिक रूपमा प्रवेश पायो, त्यसपछि यसको प्रयोगको क्षेत्रमा विस्तार हुँदैगयो । नेपालमा बि.सं.२०४० को दशकसम्म पनि समूहको अध्ययन उच्च शिक्षामा मात्र गरिन्थ्यो र यसलाई जटिल धारणाको रूपमा मानिन्थ्यो । तर विस्तारै समूहको धारणालाई ज्यादै सरल र बहुउपयोगी गणितीय धारणाका रूपमा स्वीकार गरी हाल प्राथमिक तहका कक्षाबाट उच्च शिक्षासम्म नै समावेश गरिएको छ । समूहको प्रयोगले केवल यसको अध्ययनका लागि मात्र नभएर गणितकाससाना Initial धारणाहरूको शिक्षणदेखि जटिल गणितीय समस्याहरू समाधानमा समेत प्रयोगमा ल्याई ती कार्यहरूमा सरलता ल्याइएको देखिन्छ । हाल आएर प्रायः जसो सबै गणितीय धारणाहरूको व्याख्या यसैको आधारमा गरिन थालेबाट समूहको प्रयोगको क्षेत्र र महत्वलाई अनुमान लगाउन सकिन्छ ।

विद्यालय तहको गणित शिक्षण सिकाइका क्रममा कक्षा १ मा सङ्ख्याको ज्ञानदेखि ऐकिक नियमका कठिन समस्याहरूलाई सरलता प्रदान गर्न समूहको प्रयोग गर्ने गरिन्छ । हाम्रो निम्नमाध्यमिक तथा माध्यमिक तहको गणितको पाठ्यक्रमले केही गणितीय समस्याको समाधानमा समूहको प्रयोगलाई जोड दिएको छ । जस्तै : ऐकिक नियमका समस्याहरू, प्रतिशतका समस्याहरू, Lowest Common Factor (L.C.M.) र Highest Common Factor (H.C.F.) सँग सम्बन्धित समस्याहरू, गणितीय शाब्दिक समस्याहरू आदिको शिक्षणमा समूहको प्रयोगबाट शिक्षणलाई ज्यादै उपयोगी र प्रभावकारी मानिन्छ ।

३. परियोजना कार्य :

माध्यमिक तहका कक्षाहरूमा समूह शिक्षणका लागि सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

एकाइ दुई
अङ्क गणित शिक्षण

Competency :	Explain and analyze the historical development of number concepts, number systems, how concepts and principles develop inductively and deductively and use the historical development sequence in classroom teaching as required and development of Arithmetic system and its application in everyday to commercial phenomena.

पाठ एक : सङ्ख्या र सङ्ख्या प्रणालीको ऐतिहासिक विकास

१. परिचय

यस एकाइमा सङ्ख्या प्रणाली तथा अङ्क गणितका विभिन्न विषयवस्तुहरू समावेश गरिएका छन् । सङ्ख्या र सङ्ख्याप्रणालीको ऐतिहासिक विकासअन्तरगत रोमन सङ्ख्याप्रणाली, द्विआधार सङ्ख्याप्रणाली, पञ्चआधार सङ्ख्याप्रणालीका बारेमा चर्चा गरिएको छ । निम्नमाध्यमिक तथा माध्यमिक तहका गणित शिक्षकहरूको अङ्कगणित तथा सङ्ख्या प्रणालीसम्बन्धी ज्ञान तथा सीप अभिवृध्दि गर्न, दैनिक जीवनमा तथा कक्षा शिक्षणमा प्रयोग गर्न सघाउ पुऱ्याउने अभिप्रायले यस एकाइमा विभिन्न विषयवस्तुहरू प्रस्तुत गरिएका छन् ।

२. विषयवस्तु

२.१ सङ्ख्याप्रणालीको विकास

सङ्ख्याको धारणा र गन्ती प्रक्रियाको विकास मानव सभ्यताको विकाससँगसँगै भएको अनुमान गरिन्छ । गन्तीको आदिम तरिकाद्वारा आदिम समाजका मानिसहरू आफ्नो समूहमा भएका सदस्यहरूको सङ्ख्या र शत्रुहरूको सङ्ख्या पत्तालगाउन सक्थे, धेरै वा थोरै तुलना गर्न सक्दथे । प्राचीन कालका मानिसहरूले सङ्ख्याको ज्ञानको विकास एउटा समूहका वस्तुहरू (सदस्यहरू) को अर्को समूहका वस्तुहरूसँग जोडामिलाउने अभ्यासबाट गरेका हुन् भन्ने कुरा इतिहासमा पाइन्छ । जस्तै : उनीहरूले आफूले पालेका घरपालुवा जनावरहरू चराउन लैजाने क्रममा विहान गोठबाट एउटा पशु बाहिर पठाउँदा एउटा ढुङ्गा र अर्को बाहिर पठाउँदा अर्को ढुङ्गा झोलामा हाल्दथे । त्यस प्रकारले प्रत्येक पशुका लागि एउटा एउटा ढुंगा झोलामा हालेर पोको पार्थे । साँझ पशु गोठमा हुल्ने बेलामा पनि प्रत्येक पशु गोठमा भित्र पठाउँदै एउटा एउटा ढुंगा झोलाबाट निकाली बाहिर राख्दथे । यसरी सबै पशु गोठमा हुलिसकेपछि झोलामा एउटा पनि ढुंगा बाँकी रहेन भने सबै पशुहरू फर्के भन्ने थाहा पाउँथे । उहिलेका मानिसहरूले जङ्गलमा शिकार खेल्न जाँदा कति जनावर मारियो भन्ने थाहा पाउनका लागि लट्ठीमा चिन्ह लगाउने गर्थे । यसरी हेर्दा आदिम कालका मानिसहरू पनि सङ्ख्याको अवधारणा समूहको

गुणका रूपमा समूहमा भएका सदस्यहरूको गन्ती मात्रा (एउटा, दुईओटा, तीनओटा आदि) को भावात्मक पक्षमा देखिन्छन् । यसरी सङ्ख्याप्रणालीको विकास क्रममा समूह र समूहका सदस्यहरूको एक एक संगतता (One to one correspondence) को प्रयोगबाट सङ्ख्याको अवधारणा र गन्ती कार्यमा भएको पाइन्छ । गन्ती गर्ने प्रक्रियालाई सजिलो बनाउने उद्देश्यले प्राचीन समयदेखि नै विभिन्न सङ्ख्या आधारहरू प्रयोग गरिएको पाइन्छ । जस्तै २ आधार, ३ आधार, ४ आधार, ५ आधार, ८ आधार, १० आधार (दशमलव प्रणाली), १२ आधार, २० आधार, ६० आधार प्रणालीहरूको प्रयोग विभिन्न सभ्यताका मानिसहरूले विभिन्न समयमा गरेको पाइन्छ । हाम्रो देशमा पनि प्राचीन समयमा २० आधार प्रयोग भएको पाइन्छ जसको प्रभाव स्वरूप गाउँघरका केही बूढापाका मानिसहरूले अफसम्म पनि एक बीस, दुई बीस,..... गरी गन्ती गरेको पाइन्छ ।

संसारका विभिन्न सभ्यतामा सङ्ख्यालाई जनाउने सङ्केतहरू मात्र फरकफरक भएका होइनन्, ती सङ्केतबाट सङ्ख्या निर्माणको पद्धति र ती सङ्ख्याहरूका क्रिया गर्ने तरिकासमेत फरकफरक पाइन्छन् । जोडमा आधारित, गुणनमा आधारित, स्थानमानमा आधारित र दश बाहेक अन्य आधार भएका विभिन्न प्रणालीहरू हाम्रो प्रयोगमा रहेको हिन्दुअरेबिक सङ्ख्या प्रणालीका अतिरिक्त प्राचीन कालदेखि नै प्रयोगमा रहेको देखिन्छ । केही प्राचीन सङ्ख्या प्रणालीहरूको छोटो परिचय यस प्रकार प्रस्तुत गरिन्छ ।

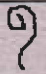
सङ्ख्या प्रणालीको कुरा गर्दा सङ्ख्या जनाउन प्रयोग गरिने आधारभूत सङ्केतहरू (Numerals), सङ्ख्यालाई लेख्ने तरिका, द्विपदीय क्रिया (Binary operation) का गुणहरू पर्छन् । यिनै आधारभूत तत्वहरूको मिलनबाट सङ्ख्या प्रणाली बनेको हुन्छ । सङ्ख्या प्रणालीको अध्ययन क्षेत्रहरू यिनीहरू नै हुन् ।

२.२ जोडमा आधारित सङ्ख्याप्रणाली

मिश्र (Egypt) को सङ्ख्या प्रणाली

प्राचीन इजिप्टमा लेखिएका हस्तलेखहरू, घरका भित्ताहरू, माटाका भाँडाकुँडाहरू, ढुङ्गा, काठ र पातमा लेखेर छोडिएका लिखतको अध्ययनबाट यो सङ्ख्या प्रणाली ५००० वर्ष पुरानो हो भन्ने कुरा अनुमान गरिएको छ ।

यस सङ्ख्याप्रणालीका सङ्ख्याहरू र तिनले जनाउने मान तलको तालिकामा प्रस्तुत गरिएको छ ।

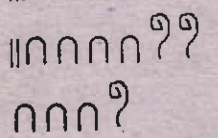
गणनाङ्क	सङ्ख्याको नाम	सङ्केतको अर्थ
	1	तरवार प्रहारको डोब
	10	गोरुको जुवा
	100	तारको क्वाइल
	1000	कमलको विरुवा
	10,000	बाङ्गो औंला
	100,000	चेपागाँडा
	1,000,000	आश्चर्य चकित व्यक्ति

माथिको तालिकाबाट स्पष्ट हुन्छ कि इजिप्सीएन सङ्ख्याप्रणाली पनि दशमलव सङ्ख्याप्रणाली जस्तै हो । यो पुनरावृत्ति हुने (Repetitive) सङ्ख्याप्रणाली हो । कुनै पनि अंक (Numerals) नौ पटकसम्म दोहोरिन सक्छ । सङ्ख्याको कूल मान निकाल्नका लागि त्यस सङ्ख्यामा प्रयोग भएका सबै अंकहरूको मान जोडिन्छ । सानो सङ्ख्यालाई बाँयाबाट दाँयातिर लेखेको देखिन्छ।

जस्तै :

37 ||||∩∩ (अर्थात 7 जोड 30)

|||∩

372  (अर्थात 2 जोड 70 जोड 300)

यस सङ्ख्या प्रणालीका विशेषताहरू यस प्रकार छन् :

- सङ्ख्या निर्माण गर्ने खास सङ्केतहरू हुन्छन् ।
- प्रत्येक सङ्केतको एउटा मान हुन्छ ।
- जोडमा आधारित सङ्ख्या प्रणाली हो ।
- कुनै सङ्ख्याको मान थाहा पाउन ती सबै सङ्केतहरूको मान जोड्नु पर्छ ।
- शुन्यको निमित्त कुनै सङ्केतको प्रयोग भएको छैन ।
- यस प्रणालीमा स्थानमानको प्रयोग भएको छैन ।
- ठूला ठूला सङ्ख्याहरू लेख्न अप्ठ्यारो हुन्छ ।

रोमन सङ्ख्या प्रणाली

रोमनहरूले शुरुमा सङ्ख्याहरू जनाउने सङ्केतको रूपमा हातका औंलाहरूको चित्र, हातको पञ्जाको चित्र प्रयोग गर्दथे ।पछि आएर 5 जनाउन प्रयोग गरिएको हातको पञ्जाको सट्टा V को प्रयोग गरे । 10 जनाउन प्रयोग भएको दुईओटा हातको पञ्जाको सट्टा X (दुईओटा V मिलेर बनेको) को प्रयोग गरे ।

रोमन सङ्ख्याप्रणालीमा प्रयोग हुने आधारभूत सङ्केतहरू तलको तालिकामा दिइएको छ ।

रोमन गणनाङ्क	सङ्ख्या
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

सङ्ख्या निर्माणका नियमहरू

अ) कुनै सङ्केतलाई जति पटक लेखेको छ, त्यति पटक जोड्ने जस्तै : CC=100+100=200, (तर LL हुँदैन, VV हुँदैन) अर्थात् यो जोड सिध्दान्तमा आधारित छ ।

यसरी लेख्दा ३ पटकभन्दा बढी एउटै सङ्केतलाई प्रयोग गरेको पाइन्न । जस्तै : 3 = III तर 4 लाई IIII लेखिन्न ।

त्यस्तै I, X, C जस्ता 1, 10, 100 जनाउने सङ्केतलाई दोहोऱ्याएको पाइन्छ भने 5, 50, 500 जनाउने V, L, D लाई दोहोऱ्याएर लेखेको पाइन्न ।

आ) सामान्यतया, पहिला ठूलो अनि सानो मान भएको सङ्केत बाँयाबाट दायाँतिर लेखेको पाइन्छ । यसो गर्दा पछिल्लो मान जोडिन्छ ।

जस्तै :

CX - 100+10 = 110

VI - 5+1 = 6

इ) ठूलो सङ्केतको बाँयातिर सानो सङ्केत लेख्दा ठूलो सङ्केतले जनाउने सङ्ख्यात्मक मानमा सानो सङ्केतले जनाउने सङ्ख्यात्मक मानले मूल्य घट्छ, अर्थात् यो घटाउ सिध्दान्तमा आधारित छ ।

जस्तै :

IV = 5-1=4

IX = 10-1=9

XL = 50-10=40

I	M	V	X	L	C	D

तर

I लाई V र X बाट मात्र घटाइन्छ (IL वा IC लेखिन्न)

X लाई L र C बाट मात्र घटाइन्छ (XD वा XM लेखिन्न)

C लाई D र M बाट मात्रै घटाइन्छ ।

5, 50 वा 500 जनाउने सङ्केतहरू जस्तै : V, L र D लाई घटाइन्न । (95 लेख्न VC लेख्न सकिन्न बरु XCV लेखिन्छ ।)

ई) कुनै सङ्केत समूहको माथि धर्को (जस्तै : $\overline{XXV}$) लेखेमा मानमा 1000 गुणा बढ्छ । XXV=25 र $\overline{XXV}$=25,000 MMM लेख्दा 3000 हुन्छ, त्योभन्दा ठूलो सङ्ख्या लेख्न सङ्केतमाथि धर्को (Bar) को प्रयोग गरेको देखिन्छ ।

रोमन सङ्ख्या प्रणालीका विशेषताहरू यस प्रकार छन् :

- सातओटा सङ्केतहरूको प्रयोग
- दोहोरिने प्रणाली
- जोड तथा घटाउ सिध्दान्तमा आधारित
- ठूला सङ्ख्या लेख्न गुणन सिध्दान्तको प्रयोग

२.३ गुणनमा आधारित सङ्ख्या प्रणाली (Multiplicative system)

परम्परागत चिनीयाँ/जापानी सङ्ख्या प्रणाली गुणनमा आधारित भएको पाइन्छ । चिनीयाँ/जापानी सङ्ख्या प्रणालीका सङ्ख्या सङ्केतहरू तल तालिकामा दिइएको छ ।

सङ्ख्या	सङ्केत	सङ्ख्या	सङ्कत
1	一	7	七
2	二	8	八
3	三	9	九
4	四	10	十
5	五	100	百
6	六	1000	千

यस प्रणालीमा सङ्ख्यालेख्दा ठाडो लेखिन्छ (माथिबाट तल) । जस्तै: 2581 यसरी लेखिन्छ ।

2	二
1000	千
5	五
100	百
8	八
10	十
1	一

अर्थात् 2×1000 जोड 5×100 जोड 8×10 जोड 1) ।

@=$ स्थानमानमा आधारित सङ्ख्या प्रणाली

कुनै सङ्केत रहेको स्थानअनुसार फरकफरक मान हुने प्रणालीलाई स्थानमानमा आधारित सङ्ख्या प्रणाली भनिन्छ । प्रचलनमा रहेको हिन्दुअरेबिक सङ्ख्या प्रणालीका अतिरिक्त अन्य आधार (Base) भएका प्रणाली(आधार दुई, पाँच, आठ, दश, सांह्र आदि)मा स्थानमानको गुण प्रयोग हुन्छ ।

द्वि–आधार सङ्ख्या प्रणाली (Binary number system)

एउटा व्यवहारिक उदाहरण अध्ययन गरौं :

सुमन र संगिताले आफूसँग भएको गुच्चालाई समूहमा राख्ने र पोको पार्ने विशेष नियम बनाएछन् ।

जस्तै :

एउटा मात्र भए खुल्ला राख्ने ।

2 ओटा भए थैलीमा हाल्ने । अर्थात 1 थैली बराबर 2 गुच्चा ।

3 ओटा गुच्चा हुँदा 1 थैली र 1 खुल्ला ।

4 ओटा गुच्चा भए, 2 थैली भयो । 2 ओटा थैली भएपछि झोलामा हालेर 1 झोला बनाएछ । अर्थात् 1 झोला = 2 थैली = 4 गुच्चा ।

यसैगरी 2 झोलाको एक बाकस र 2 बाकसको 1 बोरा भएछ ।

1	1	1	1
बाकस	झोला	थैली	

यसै गरेर आफूसँग भएका गुच्चालाई जनाएछन् । उनीहरूसँग जम्मा कतिओ ्। गुच्चा रहेछन् ?

तलको तालिकामा यो नयाँ प्रणालीमा कसरी सङ्ख्या लेखिन्छ भन्ने देखाइएको छ ।

गुच्चाको सङ्ख्या	बाकस (8)	झोला (4)	थैली (2)	खुल्ला (1)	सङ्ख्या लेख्ने तरिका
1.				1	1 खुल्ला = 1
2.			1	0	1 थैली, 0 खुल्ला = 10
3.			1	1	1 थैली, 1 खुल्ला = 11
4.		1	0	0	1 झोला, 0 थैली, 0 खुल्ला = 100
5.		1	0	1	1 झोला, 0 थैली, 1 खुल्ला = 101
6.		1	1	0	1 झोला, 1 थैली, 0 खुल्ला = 110
7.		1	1	1	.... = 111
8.	1	0	0	0	.... = 1000
9.	1	0	0	1	.... = 1001
10.	1	0	1	0	.... = 1010
11.	1	0	1	1	.... = 1011
12.	1	1	0	0	.... = 1100
13.	1	1	0	1	.... = 1101
14.	1	1	1	0	.... = 1110
15.	1	1	1	1	.... = 1111

अर्थात्

1 बाकस = 8

1 झोला = 4

1 थैली = 2

1 खुल्ला = 1

जम्मा 15

तसर्थ, 1111=15

ऊसँग 15 ओटा गुच्चा रहेछन् ।

दशमलव प्रणालीमा 325 को अर्थ के हो ?

$325=3\times10^2+2\times10^1+5\times10^0$

त्यसैगरी त्यस केटाले लेखेको सङ्ख्या द्वि-आधार प्रणालीमा छ, जहाँ 0 र 1 गरी जम्मा 2 ओटा सङ्केत छन् ।

अनि,

$1111_2 = 1\times2^3+ 1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$

$=8+4+2+1$

$=15$ ओटा गुच्चा ।

त्यस प्रणालीमा 11001_2 लेखेमा त्यसको अर्थ कति हुन्छ ? यो सङ्केतले जनाउने सङ्ख्याको दशमलव सङ्ख्या प्रणालीमा कति हुन्छ भन्ने कुरा माथिजस्तै विस्तारित रूपलाई रूपान्तरण गरेर पाउन सकिन्छ ।

अब,

दशमलव प्रणालीको 47 लाई द्वि-आधारमा कसरी लेखिन्छ हेरौ :

- 2 ले भाग गर्दै जाने
- भागफल तल र शेष दायाँ लेख्दै जाने ।

2	47	1
2	23	1
2	11	1
2	5	1
2	2	0
2	1	1
	0	

धेरै पटक भाग गर्नुको मतलब, थैली, झोला, बाकस हुँदै ठूलो सङ्ख्यातिर अघि बढछ ।

त्यसकारण तलबाट लेख्दै जाँदा 101111

$47 = 101111_2$

जाँचेर हेरौ

$101111_2 = 1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$

$=32+0+8+4+2+1$

$=47$

पञ्च आधार सङ्ख्या प्रणाली (Quinary number system)

पञ्च आधार सङ्ख्या प्रणालीमा 0,1,2,3 र 4 गरी जम्मा पाँचओटा सङ्केतको प्रयोग गरिन्छ ।

दशमलव Notation	पञ्चआधार Notation	दशमलव Notation	पञ्चआधार Notation
1	1	9	14
2	2	10	20
3	3	11	21
4	4	12	22
5	10	13	23
6	11	14	24
7	12	15	30

पञ्चआधारबाट दशमलव पद्धतिमा रूपान्तर :

$4023_5 = 4\times5^3+0\times5^2+2\times5^1+3\times5^0$

$=(4\times125)+0+10+3$

$=513$

त्यसैगरी दशमलवबाट पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तरण 278 लाई पञ्चआधार पद्धतिमा लैजाँदा :

5	278	3
5	55	0
5	11	1
5	2	2
	0	

त्यसैले $278 = 2103_5$

तलको तालिका पूरा गर्नुहोस् :

क)

हिन्दु अरेबिक	मिश्र	रोमन
2308		
	||||∩∩	
		MCDXLIV

ख)

हिन्दु अरेबिक	द्विआधार	पञ्चआधार
179		
	110010	
		1032

सङ्ख्या प्रणाली र क्रिया

केही समस्याहरू :

क) कुनै आधार (Base) 'b' हुँदा, 25 (पढ्दा दुई पाँच भनी पढिन्छ) यो दुई गुणा 52 (पाँच दुई) हुन्छ । 'b' को मान कति होला ?

$25_b = b^1 \times 2 + 5$

$= 2b + 5$ (दश आधारमा)

$52_b = 5b + 2$

अब, $5b + 2 = 2(2b + 5)$

वा, $b = 8$ (आधार 8 रहेछ) ।

जाँचेर हेरौ,

$25_8 = 2 \times 8 + 5$

$= 21$

$52_8 = 5 \times 8 + 2$

$= 42$

अनि,

$42 = 2 \times 21$ (मिल्यो ।)

ख) कति आधार प्रणालीमा 413 ले सोही प्रणालीको 204 को दोब्बर जनाउँछ ?

मानौ, त्यो आधार = b,

तब, 413 लाई b आधार प्रणालीमा विस्तार गर्दा,

$413_b = 4b^2 + 1b + 3$

त्यसरी नै 204 लाई पनि b आधारमा विस्तारित गर्दा

$204_b = 2b^2 + 0 + 4$

फेरि, दिइएको दोब्बर हुन्छ भन्ने शर्तबाट

$4b^2 + b + 3 = 2(2b^2 + 4)$

or, $b + 3 = 8$

$b = 5$

आधार 5 हुँदा 204 को दोब्बर 413 हुन्छ ।

जाचौं :

$204_5 = 2\times5^2+0+4$
$\quad = 50+4$
$\quad = 54$
$413_5 = 4\times5^2+1\times5+3$
$\quad = 100+5+3$
$\quad = 108$
$108 = 2\times54$ (मिल्यो) ।

हिन्दु अरेबिक सङ्ख्या प्रणाली

हामीहरूले लेख्ने गरेका गणनाङ्क सर्वप्रथम हिन्दुहरूले विकास गरेका हुन् ।पछि अरेवियनहरूले युरोपतिर लगी प्रचार प्रसार गरे । अनि यस सङ्ख्या प्रणालीको नाम हिन्दु अरेविक सङ्ख्याप्रणाली रह्यो । यस प्रणालीमा सङ्ख्याहरूलाई दश दशको समूहमा राखिने भएकोले यसलाई दशमलव सङ्ख्याप्रणाली पनि भनिन्छ । दशमलव (deci) शब्द ल्याटिन भाषाबाट आएको हो जसको अर्थ हुन्छ दश । हिन्दुअरेविक सङ्ख्यासङ्केत सर्वप्रथम इशापूर्व २५० मा सम्राट अशोकद्वारा निर्मित स्तम्भमा भेटिएको थियो । इशापूर्व १०० मा भारतको पुना तथा नासिकका गुफाहरूमा पनि यी सङ्ख्यासङ्केतहरू पाइएका थिए । त्यस बेला पाइएका नमूनाहरूमा शुन्यको प्रयोग भएको पाइदैन । आठौं , नवौं शताब्दितिर मात्र शुन्यको प्रयोग शुरु भयो । इश्वी सम्वत् ८२५ मा पर्सियाका गणितज्ञ Al-Khowarizmi ले शुन्यसहीतको पूर्ण हिन्दुअरेविक सङ्ख्याप्रणालीका बारेमा व्याख्या गरेका थिए ।

हिन्दुअरेविक सङ्ख्याप्रणालीका विशेषताहरू यस प्रकार छन् ।

- यस प्रणालीमा जम्मा दशओटा अङ्कहरू छन् ।
- यसको आधार दश हो ।
- यो सङ्ख्याप्रणाली स्थानमानमा आधारित छ ।
- सङ्ख्यामा अंकका विभिन्न मानहरू हुन्छन् ।
  जस्तै देख्ने मान, स्थानमान र कुलमान । जस्तै 365 मा 3 को देख्नेमान 3 हो, स्थानमान 100 हो भने कुलमान 300 हो ।
- कुनै पनि गणनाङ्कको मान त्यसमा भएका विभिन्न अङ्कहरूको कुलमानहरूको योगफल बराबर हुन्छ ।
- दुई वा सोभन्दा बढी अंकहरूबाट बनेका गणनांकहरूको स्थानमानअनुसार विस्तार गरी देखाउन सकिन्छ ।
  जस्तै $365 = 3\times10^2+6\times10^1+5\times10^0$

हिन्दु अङ्क गणितमा क्रियाहरू

देवनागरी सङ्केतहरू	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
हिन्दु अरेबिक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

हिन्दुहरूको जोड्ने तरिका

भारतीय गणितज्ञ भाष्कर (Bhaskara, 1150) द्वारा लिखित पुस्तकमा दुई खाले जोड्ने तरिका प्रस्तुत गरिएको पाइन्छ, बाँयाबाट दाँयातिर र वाँयाबाट दाँयातिर ।

जस्तै 6537 र 886 जोडौ (बाँयाबाट दाँयातिर) ।

7 3		7 4		7 4 2
$\cancel{6}\cancel{5}37$	$\longrightarrow$	$\cancel{7}\cancel{3}1$	$\longrightarrow$	$\cancel{7}\,\cancel{3}\,\cancel{1}\,3$
886		$\cancel{6}\cancel{5}\cancel{3}7$		$\cancel{6}\,\cancel{5}\,\cancel{3}\cancel{7}$
		8 8 6		8 8 6
सयको स्थान जोडेको		दशको स्थान जोडेको		एकको स्थान जोडेको

- 8 र 5 जोड्दा 13
- 5 काटेर माथि 3 लेख्ने
- हाता लागि जोडदा 6 काटेर माथि 7 लेख्ने ।

फेरि

- 8 र 3 जोडदा 11
- 3 को माथि 1 लेख्ने
- हातलागि 1 लगेर 4 बनाउने
- 7 र 6 जोडने र हात लागि 1 लाई 1 मा जोड्ने र 2 बनाउने र एक काट्ने ।

तसर्थ, योगफल = 7423

घटाउने तरिका

घटाउँदा पनि बाँयाबाट बाँयातिर, जस्तै : 531 बाट 245 घटाउँदा,

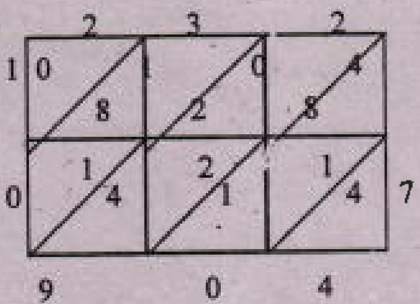
		2		2 8
3		$\cancel{3}\,9\,6$		$\cancel{3}\,\cancel{9}\,6$
$\cancel{5}\,3\,1$	$\longrightarrow$	$\cancel{5}\,{}^1\cancel{3}\,{}^1\cancel{1}$	$\longrightarrow$	$\cancel{5}\,{}^1\cancel{3}\,{}^1\cancel{1}$
$-\cancel{2}\,4\,5$		$-\cancel{2}\,\cancel{4}\,\cancel{5}$		$-\cancel{2}\,\cancel{4}\,\cancel{5}$

त्यसैले 531 - 245 = 286

गुणन गर्ने तरिका

गुणन गर्ने यो तरिकालाई Gelosia अथवा Grating method भनिन्छ । यस तरिकाको शुरुआत पन्ध्रौं र सोह्रौं शताब्दी तिर भारतबाट शुरुभएको मानिन्छ ।

उदाहरणका लागि 232 × 47 लिऔं ।



त्यसैले 232 × 47 = 10904

२.५ आगमनात्मक र निगमनात्मक विचार पद्धति (Inductive and Deductive logic)

गणितीय ज्ञान निर्माण गर्ने दुईओटा विचार पद्धति छन् : आगमनात्मक (Inductive reasoning) र निगमनात्मक विचार (Deductive reasoning) । यी दुई पद्धतिले नै गणित निर्माण र विकास भएको छ । विचार पद्धति (System of logic) का जन्मदाता ग्रिक दार्शनिक एवम् सिद्धान्तहरू हुन् र पहिलो नाम अरस्तुको नै आउँछ । उनी Logic का पिता मानिन्छन् । १९ औ शताब्दीमा अरस्तुको तर्क (विचार) गर्ने तरिकाले गणितीय तर्क वा साङ्केतिक तर्क पद्धतिको रूपमा विकास हुने मौका पायो । यही तर्क पद्धतिबाट प्राचीन गणितज्ञका गणितीय प्रस्तावनाहरू/भनाइहरूलाई ठीक (सत्य) वा बेठीक (असत्य) सावित गर्न थालियो । यही तर्क पद्धति नै गणितीय स्वरूपको विकासको मुख्य आधार बन्यो ।

परम्परागत रूपमा तर्क (Logic) लाई दुई भागमा बाँड्ने गरिन्थ्यो : आगमनात्मक (Inductive) र निगमनात्मक (Deductive logic) तर्क विधि । निगमनात्मक तर्क विधिमा विचार गर्ने प्रक्रिया स्वीकृत मान्यता/सिद्धान्तका आधारबाट गरिन्छ र निष्कर्षलाई सत्य/असत्य सावित गराइन्छ । गणितीय सिध्दान्त र साध्यहरू प्रमाणित गर्न यही पद्धतिको प्रयोग गरिन्छ । वैज्ञानिकहरूले कुनै सामान्यीकरण वा परिकल्पना तयार पार्न आगमन पद्धतिको प्रयोग गर्छन् । खासखास तर यथेस्ट उदाहरणहरूका आधारमा वा तथ्यहरू/अवलोकनहरूका आधारमा एउटा सामान्यीकरण/नियम बनाइन्छ ।

सामान्यतया गणितमा तर्क (Logic) भन्नाले निगमनात्मक तर्क (Deductive logic) भन्ने बुझिन्छ । यसको मुख्य सरोकार गणितीय भनाइहरूको सत्यतालाई खोजीगर्ने तरिकासँग हुन्छ । गणितमा गणितीय भनाइहरूलाई स्थापित मान्यता, स्वयम् सिद्ध तथ्यहरूका आधारमा

सत्यता पुष्टि गर्ने कार्यलाई प्रमाण (Proof) भनेर चिनिन्छ । कसरी निगमनात्मक पद्धतिको चिन्तन प्रक्रिया अगाडि बढाइन्छ भन्ने कुरालाई तल एउटा उदाहरणबाट हेरौं ।

कथन : यदि समूह B, समूह A को उपसमूह हो भने समूह $A \cup B$, समूह B को उपसमूह हुन्छ ।

तह प्रथम : सर्वप्रथम यो भनाइलाई पुष्टि गर्न चाहिने परिकल्पनाहरू (Hypothesis) अर्थात् स्वीकृत मान्यताहरूको सूची बनाई विचार गरौं ।

i. दुईओटा समूह X र Y छन् भने $X \cup Y \supseteq Y$, र $X \cup Y \supseteq X$

ii. यदि X एउटा समूह हो भने, $X \supseteq X$

iii. यदि X, Y र Z तीनओटा समूहहरूमा $Z \supseteq X$ र $Z \supseteq Y$, छन् भने $Z \supseteq X \cup Y$

iv. यदि X र Y दुई समूहहरू छन्, $X \supseteq Y$, र $Y \supseteq X$ छन् भने $X = Y$ हुन्छ ।

यी माथि उल्लिखित गणितीय तथ्यहरू दिइएको भनाइलाई पुष्टि गर्न चाहिन्छ भनेर कसरी जान्ने भन्ने विषय नै निगमनात्मक (Deductive) प्रमाणका लागि असजिलो कुरा मानिन्छ । माध्यमिक तहका विद्यार्थीहरूले ज्यामितिक साध्यहरू प्रमाणित गर्न गाह्रो मान्ने कारण पनि आवश्यक स्वीकृत सिद्धान्तहरू, परिभाषाहरू र प्रमाणित गर्नुपर्ने प्रस्तावनाबीचको सम्बन्ध देख्न नसक्नु हो ।

माथिका स्वीकृत तथ्य वा सिद्धान्तहरूको प्रयोगबाट दिइएको समस्याको प्रमाण यसरी दिइन्छ ।

1. $A \supseteq B$, दिइएको परिकल्पना

2. $A \supseteq B$, (माथि ii मा X को सट्टा A राख्दा)

3. माथि I र 2 बाट

$A \supseteq A \cup B$ (माथि iii मा X र Z को सट्टा A र Y को सट्टा B राख्दा)

4. फेरि $A \cup B \supseteq A$ (माथि i मा $X = A$ र $Y = B$ राखेर विचार गर्दा)

5. माथि 3 र 4 बाट,

$A \cup B = A$ (माथि iv को तथ्यअनुसार)

माथिको उदाहरणबाट निगमनात्मक तर्क पद्धतिले गणितीय साध्यहरूको प्रमाणित गर्न कसरी मद्दत गर्छ र प्रक्रिया कसरी शुरु हुन्छ भन्ने जानकारी प्राप्त गर्न सकिन्छ । गणितमा साध्यहरूको प्रमाणमा जानुअघि त्यसका लागि आवश्यक पर्ने सम्पूर्ण स्वीकृत तथ्यहरू र सिद्धान्तहरूको पहिचान गर्नसक्ने सीप अनिवार्य हुन्छ र यी सीपहरू Connection र Reasoning दुईओटा प्रक्रियासँग सम्बन्धित छ ।

निगमनात्मक तर्क (Deductive reasoning) मा प्रमाण दिने कार्य परिकल्पनाहरू (Hypothesis) र स्वीकृत परिभाषाहरू/तथ्यहरूबाट सुरु गरिन्छ र यसलाई Premises

भनिन्छ । यिनै Premises का आधारमा तार्किक सम्बन्ध कायम गरी साध्य प्रमाणित गरिन्छ । यसको मान्यता भनेको Premises ठीक छन् भने निष्कर्ष पनि ठीक हुन्छ भन्ने हो ।

आगमनात्मक तर्क निगमनात्मक तर्क गर्ने तरिकाभन्दा भिन्न छ । दर्शनशास्त्रीहरू र वैज्ञानिकहरूले वैज्ञानिक सम्बन्धहरू र परिकल्पनाहरूलाई दार्शनिक हिसाबले स्थापित गरी परिकल्पनाहरू निर्माण गर्न यसको प्रयोग गर्छन् ।

गणितीय निष्कर्षहरू जस्तै : सबैपूर्ण सङ्ख्या x र y का लागि, $x \times y = y \times x$ हुन्छ ।

त्रिभुजका मध्यिकाहरू समविन्दुगामी हुन्छन् ।

यी निष्कर्षहरूको स्थापना शुरुमा पर्याप्त उदाहरणहरूमा देखिने समानता (जसलाई गणितमा Pattern भनिन्छ) को आधारमा गरिन्छ । निगमनात्मक प्रमाणका लागि आगमनात्मक तर्क आधार हो । गणितमा आगमनात्मक तर्कको प्रक्रिया गणितीय संरचना वा ढाँचाको खोज कार्यसँग सम्बन्धित हुन्छ । कसरी नयाँ गणितीय नतिजाहरूको खोजी गरिन्छ ? गणितीय नतिजाहरूको प्रमाण कसरी दिइन्छ ? जस्ता प्रश्नहरूको समाधान आगमन पद्धतिबाट गरिन्छ । आगमनात्मक तर्क प्रणालीको शुरु उदाहरणहरूबाट हुन्छ र धेरैभन्दा धेरै उदाहरणहरूमा पाइने समान गुणहरूका आधारमा एउटा निष्कर्ष निकालिन्छ । यो निष्कर्ष नै निगमनात्मक तर्क प्रणालीका लागि गणितीय सिद्धान्त बन्छ रपछि यसलाई प्रमाणित गरिसकेपछि गणितीय सिद्धान्त वा पूर्ण गणितको रूप लिन्छ । आज विकसित गणित शुरुमा आगमन पद्धतिबाट सिर्जना गरी निगमनद्वारा प्रमाणित भएपछि पूर्ण गणित बन्छ ।

३. परियोजना कार्य

- विभिन्न सङ्ख्याप्रणालीको विकासले वर्तमान गणित शिक्षणमा पारेको प्रभावको विवेचना गरी निबन्ध लेख्नुहोस् ।
- द्विआधार र पञ्चआधार सङ्ख्या प्रणाली शिक्षणका लागि सिकाइ मोडुल तयार गर्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- Wally 'Wallyop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philipines, National Institutes for Science and Mathematics Education Development.
- Howard Eves, An Introduction to the History of Mathematics, Saunders College Publishing
- Morgan Ward, et. al., Modern Elementary Mathematics, Addison- Wesley Publishing Company, Inc.
- SATA, त्रि. वि. वि., गणित शिक्षण विधि

पाठ दुई : प्रतिशत, ऐकिक नियम, घरायसी बिल, कमिसन, नाफा नोक्सान र ब्याज

१. परिचय

हाम्रो दैनिक जीवनमा प्रतिशत, ऐकिक नियम, घरायसी विल, कमिसन, नाफा नोक्सान तथा व्याज जस्ता अङ्कगणितसम्बन्धी विषयवस्तुहरूले ठूलो महत्व राखेको हुन्छ । विद्यार्थीको आफ्नो पढाइ सम्बन्धमा होस् वा दैनिक जीवनका अन्य समस्या समाधानमा होस्, प्रतिशतको आधार मानी वस्तुहरूको तुलना गरिएको हुन्छ । प्रतिशतको प्रयोग घरायसी अङ्कगणितका एकाइहरू जस्तै : बिल, बजेट, कर तथा लाभांश, नाफा नोक्सान, कमिशन, छुट, कर दरका साथै ब्याजहरू निकाल्नसमेत व्यापक रूपमा गरिएको हुन्छ । प्रतिशतविना कुनै वस्तुहरूका बीच तुलना गर्न गाह्रो हुन्छ । यस पाठमा हामी प्रतिशत ऐकिक नियम, घरायसी विल, कमिसन, नाफा नोक्सान तथा साधारण, चक्रीय व्याज जस्ता विषयवस्तुसम्बन्धी व्यवहारिक समस्याहरू कसरी हल गर्ने भन्ने बारे छलफल गर्नेछौ ।

२. विषयवस्तु

२.१ प्रतिशत

शिक्षक हरिजीले प्रतिशतको महत्व दर्शाउन कक्षामा एउटा उदाहरण निम्नअनुसार प्रदर्शन गर्नुभयो - कुनै विद्यालयको गत सालको एस.एल.सी. परीक्षामा कूल परीक्षार्थी ४० मध्ये ६०% उत्तीर्ण भएछन् । त्यस्तै अर्को विद्यालयको ५० परीक्षार्थीमध्ये ५०% उत्तीर्ण भएछन् भने कुन विद्यालयको नतिजा राम्रो होला ? हिसाब नगरी अनुमान गर्न लगाउनुभयो । धेरै जसोले "पहिलो विद्यालयको नतिजा राम्रो" भने किनभने प्रतिशत बढी देखिन्छ । विद्यार्थीले दुवै विद्यालयमा उत्तीर्ण परीक्षार्थी सङ्ख्या निकाले । पहिलो विद्यालयको उत्तीर्ण परीक्षार्थी २४ र दोस्रोको २५ निकाले । हरिजीले यसको व्याख्या गर्दै (प्रतिशत बढी हुँदैमा परिणाम बढी नहुने तर्क दिँदै) आजको पाठ अगाडि बढाउनुभयो ।

कुनै परिमाणको केही प्रतिशत निकाल्न सो परिमाणलाई त्यस प्रतिशतले गुणा गर्नुपर्छ भन्ने तर्कलाई विद्यार्थीद्वारा आफैले प्रश्न बनाउन लगाई हलसमेत प्रस्तुत गर्न लगाउनुभयो । जस्तै : एकजना विद्यार्थीले यस प्रकारको प्रश्न बनाए रु २००० मा १५% रकम बचत भए कति रकम बचत भएछ ? कति रकम खर्च भएछ ?

यससम्बन्धी अरु समस्याहरू हरिजीले उदाहरणसहित यस प्रकार प्रस्तुत गर्नुभयो । कुनै विद्यालयका कूल विद्यार्थीमध्ये ४०% छात्रा छन् । यदि छात्राको सङ्ख्या ३६० जना भए कूल विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ । यस्ता प्रकारका प्रश्नको उत्तर अनुमान गर्न लगाउनुभयो । के

उत्तर ३६० जनाभन्दा बढी हुन्छ वा घटी ? यदि बढी निकालेको छ भने सो उत्तरलाई x मान्नु पर्ने र समीकरण बनाई हल गर्नु पर्ने बारे छलफल गर्नुभयो ।

यहाँ कूल विद्यार्थी सङ्ख्यालाई x मान्दा,

x को 40 % = 360 हुन्छ ।

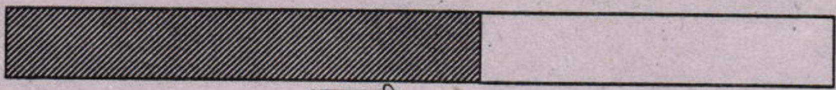
त्यसैले $x \times \frac{40}{100} = 360$

$x = 900$ हुन्छ ।

त्यस्तै गरी, उहाँले अर्को प्रश्न राख्नुभयो "गणेश आफ्नो आम्दानीको 60% खर्च गरेर रु 3600 बचाउँछ भने उसको आम्दानी कति होला ?

यस प्रश्नको उत्तरमा विद्यार्थीले, $x \times \frac{60}{100} = 3600$ बनाई हल गरेछ । जुन गलत थियो । यसका लागि उहाँले चित्रद्वारा निम्नअनुसार स्पष्ट पार्नुभयो ।

60 % खर्च   रु. 3600 बचत



आम्दानी

यहाँ दिइएको रकम रु 3600 को बराबर कति % हो सो स्पष्ट हुनै पर्छ । अघिल्लो उदाहरणमा 40% छात्रा र सङ्ख्या 360 पनि छात्रा नै भएकोले समस्या समाधान गर्न सकियो । तर यस उदाहरणमा रु 3600 को बराबर 60% छैन्, त्यसैले,

खर्च = 60%,   बचत = 100% - 60% = 40 %

अब,

$x \times 40\% =$ रु. 3600

$\therefore x =$ रु. 9000

हरिजीले अर्को तरिका पनि प्रदर्शन गराउनुभयो ।

पहिलो उदाहरणमा कूल विद्यार्थी सङ्ख्या = 100% हुन्छ ।

$40\% = 360$

$1\% = 360/40$

$100\% = (360/40)\times 100$

$= 900$

त्यस्तै दोस्रो उदाहरणमा, उसको आम्दानी =100% हुन्छ ।

त्यसैले,

खर्च = 60%

बचत= 100% - 60% = 40%

अब,

$40\% = 3600$

$1\% = 3600/40$

$100\% = (3600/40) \times 100$

$= 9000$

उहाँले यस्ता प्रकारका प्रश्नहरू विद्यार्थी स्वयम्‌लाई दुईदुईओटा बनाउन लगाई हल पनि गर्न लगाउनुभयो र प्रत्येकको समाधान नजिकको साथीलाई जाँच्न लगाउनुभयो ।

२.२ प्रतिशतका समस्या समाधान गर्ने तरिकाहरू

विद्यार्थीहरूले प्रायजसो प्रतिशतका समस्याहरू समाधान गर्न नसक्नुका कारणहरूमध्ये एउटा कारण समस्या राम्ररी नबुझ्नु हो । यसका लागि सर्वप्रथम दिइएका प्रश्नहरूको मर्म बुझी छोटो रूपमा त्यसलाई व्यक्त गर्नुपर्दछ । उदाहरणका लागि निम्नलिखित प्रश्नहरूको समाधान हेरौं ।

१. एउटा परीक्षामा 50 जना विद्यार्थीहरूमध्ये 25 जना उत्तीर्ण भएछन् भने कति प्रतिशत उत्तीर्ण भए ?

यसलाई छोटो रूपमा लेख्दा,

50 को ------% बराबर 25 हुन्छ ।

२. गणितमा 60 जना विद्यार्थीहरूमध्ये 75% उत्तीर्ण भएछन् भने कति जना विद्यार्थीहरू उत्तीर्ण भएछन् ?

यसलाई छोटो रूपमा लेख्दा,

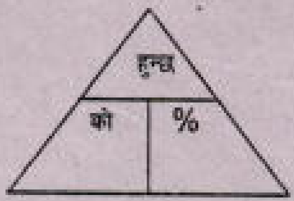
60 को 75% बराबर ------ हुन्छ ।

३. कुनै विद्यालयबाट गतसालको SLC परीक्षामा 60% उत्तीर्ण भएछन् , यदि जम्मा उत्तीर्ण विद्यार्थी 120 जना भए कति विद्यार्थीहरूले परीक्षा दिएका रहेछन् ।

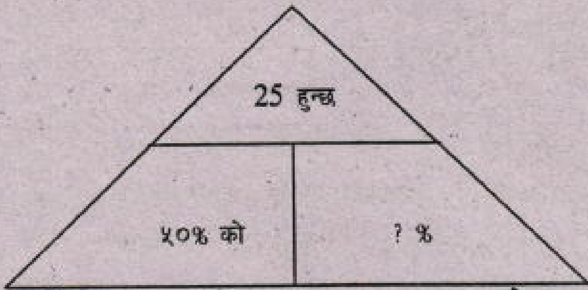
यसलाई छोटो रूपमा लेख्दा,

------ को 60% बराबर 120 हुन्छ ।

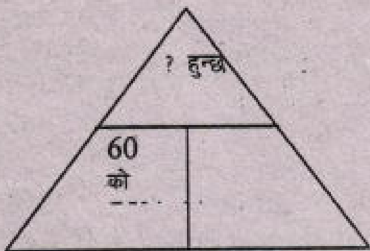
यस प्रकार दिइएका प्रश्नहरूलाई छोटो रूपमा लेख्न जानेपछि मात्र ती प्रश्नहरूको समाधानका लागि निम्नलिखित "त्रिभुज तरिका" को प्रयोग गर्न सकिन्छ ।



त्रिभुजलाई चित्रमा झैं तीन भागमा विभाजन गर्ने । माथिल्लो भागमा “हुन्छ” राख्ने, तल्लो भागमा बायाँपट्टि “ को ”र दायाँपट्टि % राख्ने । अब प्रश्न नम्बर १ को समाधानका लागि त्रिभुजका खण्डहरू भरौं ।



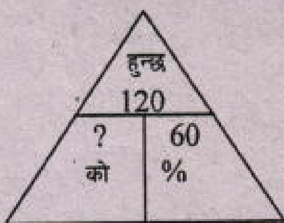
% बराबर 25/50 हुन्छ । यसलाई दशमलवमा लेख्दा 0.5 हुन्छ । % मा लेख्दा 50% हुन्छ ।
त्यसैले 50 को 50% बराबर 25 हुन्छ ।
त्यसैगरी प्रश्न नं. २ को लागि



60 को 75% बराबर ----- हुन्छ । यसका लागि % खण्डमा 75 र “को ” खण्डमा 60 लेखी “हुन्छ ” खण्डमा ? लेखिएको छ । अघिल्लो समाधानमा जस्तो यहाँ भिन्न आउँदैन । यहाँ 75% र 60 को गुणनफल निकाले पुग्छ ।

अर्थात् 60 को 75% $= 60 \times \frac{75}{100} = 45$

त्यसैले, 60 जनाको 75 बराबर 45 हुन्छ ।
त्यसैगरी प्रश्न नं ३ के लागि पनि त्रिभुज बनाई खण्डहरूमा सङ्ख्याहरू भरौं ।
----- को 60% बराबर 120 हुन्छ ।



यहाँ % को खण्डमा 60 % बराबर 0.6 लेख्नुपर्छ । “को” खण्डको उत्तर निकाल्न पनि अंशको भागलाई हरको भागले भाग गर्नुपर्छ ।
अर्थात्

$$? = \frac{120}{0.6} = 200$$

त्यसैले जम्मा 200 विद्यार्थीहरूले SLC परीक्षा दिएका रहेछन् ।

२.३ ऐकिक नियम

ऐकिक नियमको पाठ शुरु गर्नुभन्दा अगाडि हरिजीले प्रत्यक्ष र अप्रत्यक्ष विचरण लेखिएको निम्नअनुसारको चार्ट प्रदर्शन गर्नुभयो ।

चार्ट नं. १

15 कलमको मूल्य बराबर रु 225 पर्छ भने 10 ओटाको कति पर्ला ?
15 कलमको मूल्य = रु 225 $\quad \downarrow \div$
1 कलमको मूल्य = रु 225/15
15 कलमको मूल्य = रु (225/15)×10 $\quad \uparrow \times$

यस उदाहरणमा उहाँले परिमाण घट्दा मूल्य पनि घट्छ र परिमाण बढ्दा मूल्य पनि बढ्छ भन्ने धारणा दिन चार्टमा वाण चिन्ह (Arrows) ले स्पष्ट पार्नुभएको छ । यसका साथै यस्ता परिमाणमा थोरै निकाल्न भाग र धेरै निकाल्न गुणन गर्नु पर्ने बारे पनि छलफल गर्नुभयो । यस्तै उदाहरण विद्यार्थीलाई बताउन लगाई हल गर्न लगाउनुभयो । तर 1 भन्दा सानो भिन्नको परिमाणबाट बढी वा घटी परिमाण निकाल्न के गर्नु पर्छ भन्ने कुरा निम्नअनुसारका उदाहरणद्वारा छलफल गर्नुभयो ।

एक बोरा चामलको 3/5 भागको मूल्य रु 540 पर्छ भने 3/4 भागको मूल्य कति पर्ला ?

यस प्रश्नको उत्तर निकाल्न उहाँले एकजना विद्यार्थीलाई बोर्डमा हल गर्न लगाउनुभयो । जुन यस प्रकार थियो ।

3/5 भाग बराबर रु 540

1 भाग बराबर रु $540 \times \frac{3}{5} = 324$

3/4 भाग बराबर रु 324/(3/4) = रु 486

यसमा 3/5 भागको मूल्यभन्दा 3/4 भागको मूल्य घटेकोछ । त्यसैले यहाँ बढी मूल्य निकाल्न भाग गर्नुपर्छ ।

अर्थात्

3/5 भाग बराबर रु 540

1 बराबर रु 540/(3/5) = 900

3/4 भाग बराबर रु 900 × (3/4) = रु 600 हुन्छ ।

यसैगरी उहाँले यस्ता प्रत्यक्ष विचरणसम्बन्धी समस्याहरू एकएकओटा विद्यार्थीलाई बनाउन लगाउनुभयो र समाधान गरेपछि उत्तरहरू नजीकको साथीलाई जाँच्न लगाउनुभयो ।

हरिजीले अप्रत्यक्ष विचरणका समस्याहरू एकजना विद्यार्थीलाई बोर्डमा लेख्न लगाउनुभयो । उसले यस प्रकार लेखेको थियो ।

10 जना मानिसले 15 दिनमा एउटा टहरा निर्माण गर्न सक्छन् भने 10 दिनमा सिध्याउन कति ज्यामी चाहिएलान् ?

यो प्रश्न किन अप्रत्यक्ष विचरणको हो ? छलफल गर्नुभयो । एउटा परिमाण बढ्यो भने अर्को परिमाण घट्छ, पहिलो परिमाण घट्यो भने दोस्रो परिमाण बढ्छ । त्यसैले यस्ता समस्याहरू अप्रत्यक्ष विचरणका हुन भनी छलफल गर्नुभयो ।

यहाँ,

15 दिनमा सो टहरो बनाउन 10 ज्यामी चाहिन्छ ।

1 दिनमा सो टहरा बनाउन 10×15 ज्यामी चाहिन्छ ।

10 दिनमा सो टहरा बनाउन (10×15)/10=15 ज्यामी चाहिन्छ ।

यसलाई उहाँले वाण चिन्हद्वारा यस प्रकार प्रष्ट्याउनुभयो ।

↓ ↑

↑ ↓

यसैगरी तीनओटा परिमाण भएका ऐकिक नियम तथा समानुपातसम्बन्धी समस्याहरू हल गर्दा अपनाउनुपर्ने सतर्कतासम्बन्धी छलफल गर्नुभयो । दुई परिमाणहरूबीचको सम्बन्धबारे क्रियाहरू भइसकेपछि मात्र तेस्रो परिमाणसँग क्रिया गर्नुपर्छ, जुन दिइएको समस्यामा भर पर्छ । त्यसैले उहाँले निम्नअनुसार एउटा उदाहरण प्रस्तुत गरी छलफल गर्नुभयो ।

यदि 8 ज्यामीलाई 1/3 खेत खन्न 20 दिन लाग्छ भने 10 ज्यामीलाई 2/3 खेत खन्न कति दिन लाग्ला ?

यस प्रश्नको उत्तर निकाल्न हरिजीले पहिले यस प्रकार गरी छोटकरीमा लेख्नुभयो,

ज्यामी	खेत	दिन
8	1/3	20
10	2/3	?

ऐकिक नियमद्वारा यसरी समाधान गर्नुभयो :

8 ज्यामीलाई 1/3 खेत खन्न 20 दिन लाग्छ ।

1 ज्यामीलाई 1/3 खेत खन्न 20×8 दिन लाग्छ ।

10 ज्यामीलाई 1/3 खेत खन्न (20×8)/10 दिन लाग्छ ।

10 ज्यामीलाई 1 खेत खन्न (20×8)×3/10 दिन लाग्छ ।

8 ज्यामीलाई 2/3 खेत खन्न (20×8)×(2/3)×3/10 दिन लाग्छ ।

= 32 दिन ।

यसलाई Chain rulecg';f/ लेख्दा,

ज्यामी	दिन	खेत
8	1/3	20
10	2/3	? (x) मानौं

त्यसैले,

$8\times(2/3)\times20 = 10\times(1/3)\times x$ हुन्छ ।

$x = \dfrac{8\times2\times20\times3}{10\times3} = 32$ दिन ।

उहाँले ज्यामी, खेत र दिनको परस्पर सम्बन्ध प्रत्यक्ष वा अप्रत्यक्ष कस्तो हुन्छ सो बारे छलफल गर्नुभयो । यस्तै प्रश्नहरू विद्यार्थीलाई बनाउन लगाई उत्तरहरू छलफल गर्नुभयो ।

२.४ घरायशी बिलसम्बन्धी धारणा

हरिजीले अघिल्लो दिन विद्याथीलाई आआफ्नो घरको बिजुलीको महशुल बिल ल्याउन भन्नु भएको थियो । आजको कक्षामा त्यहाँ ल्याइएका बिलहरू प्रत्येक बेन्चमा कम्तीमा एउटा एउटा पुग्ने गरी बाँड्नुभयो र सो बिल पूरा अध्ययन गर्न लगाउनुभयो । अनि प्रश्नहरू गर्नुभयो ।

- खपत यूनिट कसरी निकालियो ?
- कति यूनिटसम्म न्यूनतम मूल्य लाग्ने रहेछ ?
- न्यूनतम मूल्य कति रहेछ ?
- न्यूनतम यूनिटभन्दा बढी यूनिटको महसुल कुन दरले लिने रहेछ ?
- छुट र जरिवानाका नियमहरू केके रहेछन् ?

यी प्रश्नहरूको उत्तर विद्यार्थीबाट लिइसकेपछि उहाँले एउटा बीलको महसुलको निर्धारण कसरी गरेको रहेछ भन्ने बारे छलफल गर्नुभयो ।

जम्मा खपत युनिट = हालको अङ्क - अघिल्लो महिनाको अङ्क

न्यूनतम युनिटसम्मको मूल्य =

बाँकी युनिटको मूल्य =

जम्मा महसुल =

त्यसपछि उहाँले त्यहाँ वितरित विद्युत बिलको रकम ठीक छ वा छैन जाँच्न लगाउनुभयो । उहाँले केही टेलिफोनका बिलहरू समूहमा वितरण गर्नुभयो र विद्यार्थीलाई अध्ययन गर्न लगाउनुभयो र निम्न प्रश्न गर्नुभयो :

- जम्मा खपत कल कति छ ?
- Rental कल कति छ ?
- न्युनतम महसुल कति छ ?

- बढी कलको महसुल कसरी निकालियो ?
- कुनकुन कलहरू कसरी लिइएको रहेछ ?
- जरिवाना कसरी लिइन्छ ?

त्यसपछि उहाँले एउटा बिलको महसुल उदाहरणका रूपमा बोर्डमा गर्नुभयो । यसको छलफलपछि समूहगत रूपमा वितरित टेलिफोन बीलको महसुल निकाल्न लगाउनुभयो र उत्तर जाँच्न लगाउनुभयो । त्यसैगरी उहाँले पानीको महसुल बीलको नमूना चार्टमा लेखी विद्यार्थीहरूलाई अध्ययन गर्न लगाउनुभयो र निम्न प्रश्न गर्नुभयो :

- कति हजार लिटरको एक यूनिट रहेछ ?
- कति यूनिट खपत भएछ ?
- न्यूनतम यूनिट र महसुल कतिकति रहेछ ?
- कुनकुन कर लिइएको रहेछ ?
- कति % कर लिइएको रहेछ ?
- न्यूनतम यूनिटभन्दा बढी यूनिटको कुन दरले महसुल लगाइएको रहेछ ?
- छुट कसरी रहेछ ?

उहाँले कुनै एउटा बिलको महसुल निकाल्ने तरिकाको छलफल गरेपछि वितरित बिलको महसुल निकाल्न लगाउनुभयो । उत्तर र बिलको महसुल ठीक छ वा छैन जाँच्न लगाउनुभयो ।

- एक हजार लिटर पानीको 1 यूनिट हुन्छ ।
- न्यूनतम 10 यूनिटको रु 40 पर्छ ।
- न्यूनतम युनिटभन्दा माथि प्रति युनिटको रु 25 को दरले थपिन्छ ।
- ढल निकास कर 50% लिइन्छ ।
- मिटर रिडिङ्ग भएको 2 हप्ताभित्र महसुल बुझाएमा 3% छुट दिइन्छ ।

हरिजीले विद्यार्थीलाई प्रश्न गर्नुभयो "कर शब्द कहाँकहाँ सुन्ने गरिएका छन् ?" विद्यार्थीले उत्तर दिए कि सवारी कर, मनोरञ्जन कर, आय कर, मूल्य अभिवृद्धि कर आदि । यी करहरू किन लिइएका हुन् ? कसरी लिइन्छ ? कोसँग लिइन्छ ? आदि प्रश्नहरू गर्नु भई उहाँले कथा शुरु गर्नुभयो ।

राजुले राज्य विकास तथा निर्माण कार्य गर्न आवश्यक रकम त्यस राष्ट्रका जनताबाट कार्यको प्रकृति हेरी निश्चित रकम लिने गर्दछ । त्यही रकमलाई कर भनिन्छ । उहाँले एउटा उदाहरण यस प्रकार दिनुभयो ।

सविर प्रति महिना रु 7500 कमाउँछ । प्रति वर्ष वार्षिक आम्दानी रु 7500 भन्दा बढी कमाउने व्यक्तिले सो बढी रकमको 15% को दरले आयकर तिर्नु पर्छ भने उसले कति रकम कर तिर्छ होला ?

यहाँ, सविरको वार्षिक तलब =रु 7500×12

=रु 90000

करयोग्य रकम =रु 90000 - रु 75000 = रु 15000

तिर्नु पर्ने कर = रु 15000×15/100 = रु 2250

त्यसैगरी नगरपालिकाभित्रका बासिन्दाले घर बहाल कर पनि तिर्नुपर्छ । सिनेमाहलको टिकटमा मनोरञ्जन कर लिइएको हुन्छ । मूल्य वृद्धि कर (VAT) हाल वृद्धि भएर 13% पुगेकोछ । कुनै सामान किन्दा त्यसमा VAT समावेश गरिएको हुन्छ । जस्तै : एकजना मानिसले रु 5400 मा एउटा TV किनेछ । सो रकममा VAT पनि जोडिएको हुन्छ । त्यसैगरी सवारी साधनको पनि कर तिर्नुपर्दछ । जुन निश्चित प्रतिशतको आधारमा लिइन्छ भनी छलफल गर्नुभयो । उहाँले निम्न प्रश्नको उत्तर निकाल्ने तरिकाबाट कक्षामा यस प्रकार छलफल गर्नुभयो । एउटा कमीजको मू.अ.क. सहीत मूल्य रु 226 पर्छ । यदि 13% मू.अ.क. लाग्दछ भने यसको शुरु मूल्य तथा मू.अ.क. निकाल ।

यहाँ,

मू.अ.क. सहीतको मूल्य = रु 226

शुरुको मूल्य = रु x मानौं ,

प्रश्नअनुसार,

x + x × 13/100 = रु 226

x = रु 200

मू.अ.क. = रु 200 × 13/100 = रु 26

त्यसैले अङ्कित मूल्य रु 200 र मू.अ.क. रु 26 पर्छ ।

त्यसपछि हरिजीले केही दैनिक पत्रिकाहरू विद्यार्थीलाई समूहगत रूपमा अध्ययन गर्न लगाउनुभयो । जसमा भएका मू.अ.क.सम्बन्धी सूचनाहरू, वर्गीकृत विज्ञापनहरूमा रहेका सामानहरूको मूल्य मू.अ.क. सहीत वा मू.अ.क समावेश नगरिएका मूल्यहरू आदिको मूल्यहरू निकाल्न लगाउनुभयो । जस्तै : एउटा विज्ञापनमा "रङ्गीन TV को मूल्य रु 17500, यस्मा VAT जोडिएको छैन् ।" VAT जोडेपछि सो TV को मूल्य कति पर्ला ? छलफल गर्नुभयो ।

२.५ कमिशन, छुट र लाभाँस

हरिजीले कक्षामा एउटा नाटक देखाउनुभयो । एक जना विद्यार्थीलाई उसको झोलासहित आगडि राख्नुभयो । उसको झोलामा 5% छुट भन्ने लेखिएको कागजको टुक्रा र रु 350 लेखिएको अर्को टुक्रा पनि टाँस्नुभयो ।

अर्को एकजना विद्यार्थीलाई सो झोला किन्न लगाउनुभयो । उसले कति रकम तिरी सो झोला किन्छ होला ? प्रश्न गर्नुभयो । यस प्रश्नको उत्तर सोही विद्यार्थीलाई बोर्डमा गर्न लगाउनु भयो ।

अङ्कित मूल्य =रु 350

छुट =रु 5%

छुटपछिको मूल्य =रु 350 -रु 350×5/100

=रु 350 - 17.5

=रु 332.5

उहाँले यही समस्यामा, छुटपछिको मूल्य रु 332.5 दिइएको झोलाको अङ्कित मूल्य निकाल्न लगाउनुभयो । यहाँ छुट 5% छ । यस बारे छलफल उहाँले निम्नअनुसार गर्नुभयो ।

अङ्कित मूल्य-अङ्कित मूल्यको 5% = छुटपछिको मूल्य

अथवा,

x-x×5/100= रु 332.5

95x= रु 332.5/95 = रु 350

एउटा कारखाना वा थोक बिक्रेताले पसलपसलमा गएर सामानहरू बेचेवापत बिक्रेतालाई केही रकम परिमाणअनुसार दिइन्छ भने त्यसलाई कमिशन भनिन्छ । जस्तै : एउटा दालमोट कम्पनीले पसलमा गई कुनै व्यक्तिले सो सामान पसलेलाई बिक्री गर्छ भने उसले 2% कमिशन पाउँछ ।

अर्थात्,

प्रति कि.ग्रा. दालमोटको मूल्य रु 80 पर्छ भने उसले रु 80×2/100= रु 1.60 कमिशन पाउँछ । यस्तै उदाहरणहरू उहाँले विद्यार्थीलाई बनाउन दिई समस्याहरू समाधान गर्न लगाउनुभयो र उत्तरहरू विद्यार्थीबीच एक आपसमा जाँच्न लगाउनुभयो ।

त्यसैगरी यदि कुनै कारखानाले आफूले कमाएको नाफाको केही हिस्सा प्रत्येक कामदारलाई उनीहरूको तलवमानको आधारमा वितरण गर्छ भने त्यो वितरित हिस्सालाई लाभांश भनिन्छ । जस्तै : एउटा सिमेन्ट कारखाना गत वर्ष रु १ करोड नाफामा थियो । त्यहाँ पाँच तहका कर्मचारीहरू कार्यरत छन् । कुनै तहको कर्मचारीले प्रति महिना रु 3200 कमाउँछ । उसले गत वर्षको लाभांश 0.12% पाउँछ भने उसले रु 1,00,00,000×0.12/100 = रु 12,000 लाभाँश पाउँछ ।

२.६ नाफा नोक्सान

हरिजीले नाफा नोक्सानसम्बन्धी क्रय मूल्य र नाफा नोक्सान प्रतिशत दिएमा विक्रय मूल्य निकाल्ने तथा विक्रय मूल्य र नाफा नोक्सान प्रतिशत दिएमा क्रय मूल्य निकाल्ने बारे निम्न

प्रश्नद्वारा छलफल गर्नुभयो । एउटा रेडियो रु 3600 मा बेच्दा 10% नोक्सान हुन्छ भने कतिमा बेच्दा 15% नाफा होला ?

यो प्रश्न विद्यार्थीलाई अध्ययन गर्न लगाएपछि उहाँले विक्रय मूल्य दिएरपछि फेरि विक्रय मूल्य नै सोधेको हुनाले सर्वप्रथम विक्रय मूल्य र नोक्सान प्रतिशतबाट क्रय मूल्य निकाल्नै पर्ने र त्यस क्रयमूल्य र नाफा प्रतिशतबाट विक्रय मूल्य निकाल्नु पर्ने बारे छलफल गर्नुभयो । उहाँले ऐकिक नियमबाट यो प्रश्नको समाधान गरिसकेपछि पहिले क्रय मूल्य निकाल्ने सूत्र रपछि विक्रय मूल्य निकाल्ने सूत्र प्रतिपादन गर्नुभयो ।

यदि विक्रय मूल्य = रु 100 - रु 10 = रु 90 भए क्रय मूल्य = रु 100 हुन्छ ।

यदि विक्रय मूल्य = रु 1 भए क्रय मूल्य = रु 100/90 हुन्छ ।

यदि विक्रय मूल्य = रु 3500 भए क्रय मूल्य = रु (100/90)×3600 हुन्छ ।

= रु 4000

विक्रय मूल्य निकाल्दा,

यदि क्रय मूल्य रु 100 भए विक्रय मूल्य = रु 100+15=115 हुन्छ ।

यदि क्रय मूल्य रु 1 भए विक्रय मूल्य = 115/100 हुन्छ ।

यदि क्रय मूल्य रु 4000 भए विक्रय मूल्य = (115/100)×4000 हुन्छ ।

= रु 4600

त्यसैले अब रेडियो रु 4600 मा बेच्दा 15% नाफा हुन्छ ।

यसलाई अर्को तरिकाबाट हेर्दा

पहिलो चरणबाट,

क्रय मूल्य =100×वि.मू. / 100+नाफा %

=100×वि.मू. / 100 - नोक्सान %

त्यसैगरी,

दोस्रो चरणबाट,

विक्रय मूल्य =(100+नाफा %/100)×क्रय मूल्य

=(100-नोक्सान %/100)×क्रय मूल्य

उहाँले यी सूत्रहरूको प्रतिपादन बारे छलफल गर्नुभयो ।

अर्को उदाहरण पनि उहाँले निम्नअनुसार दिनुभयो।

एउटा पंखाको अङ्कित मूल्यमा 5% छुट दिई 10% VAT लगाएर बेच्दा क्रय मूल्यको 5% नाफा हुन्छ । यदि छुट नदिई VAT 10% मात्र लगाउँदा रु 220 नाफा हुन्छ भने उक्त पंखाको अङ्कित मूल्य र क्रय मूल्य निकाल ।

यो प्रश्न विद्यार्थीलाई अध्ययन गर्न लगाइसकेपछि हरिजीले प्रश्नका मुख्यमुख्य बुँदाहरू टिप्न लगाउनुभयो ।

पहिलो चरण,

छुट = अङ्कित मूल्यको 5%

VAT = छुट पछिको मूल्यमा 10%

नाफा = क्रय मूल्यको 5%

दोस्रो चरण,

VAT = अङ्कित मूल्यमा 10%

नाफा = रु 220

दुवै चरणका लागि अङ्कित मूल्य =रु x मानौ

अङ्कित मूल्य (x)=?,

क्रय मूल्य = ?

प्रश्नअनुसार,

छुट = रु $x \times 5/100 = x/20$

छुटपछिको मूल्य = $x - x/20$ = रु $19x/20$

VAT = छुटपछिको मूल्य $\times 10/100$= रु $19x/200$

VAT पछिको मूल्य = रु $(19x/20)+(19x/200)=209x/200$

रु $(209x/200)$ - क्रय मूल्य = क्रय मूल्य $\times 5/100$

अथवा,

$209x/200=(21/20) \times$ क्रय मूल्य

अथवा,

$209x-210$ क्रय मूल्य =0.............................(i)

फेरि,

दोस्रो चरणका लागि,

VAT = अङ्कित मूल्यको 10% = $(x \times 10)/100$

VAT पछिको मूल्य = रु $x+(x/10)=11x/10$

प्रश्नअनुसार,

VAT पछिको मूल्य - क्रय मूल्य = रु 220

अथवा,

$11x/10$-क्रय मूल्य =रु 220

$11x - 10$क्रय मूल्य =रु 2200..........................(ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई हल गर्दा,

$209x-210$ क्रय मूल्य =0

<u>$11x - 10$ क्रय मूल्य =2200</u>

209x-210 क्रय मूल्य =0

231x-210 क्रय मूल्य =46200

\- + -

-22x=-46200

x=रु 2100

अङ्कित मूल्य = रु 2100

फेरि, क्रय मूल्य निकाल्दा,

11×2100-2200=10 क्रम मूल्य

क्रय मूल्य = रु 2090

उहाँले यस्तै प्रकारका अरु समस्याहरू विद्यार्थीलाई नै बनाउन लगाई समाधान पनि गर्न लगाउनुभयो ।

२.७ साधारण ब्याज, चक्रीयब्याज, जनसङ्ख्या वृद्धि र ह्रास

हरिजीले एउटा कागजको बाकसमा बैंक लेखेर ल्याउनुभएको रहेछ र उहाँले एउटा उदाहरण भन्नुभएछ । विजयले बैंकमा रु 1000 जम्मा गरेछ भनी कागजको टुक्रामा रु 1000 लेखेर खसाल्नुभएछ । 2 वर्षपछि बैंकले कति रकम थपेर दिन्छ ? भनी प्रश्न गर्नुभयो तर विद्यार्थीले यति हो भनेर भन्न सकेनन् तर अवश्य पनि केही रकम थपेर दिन्छ भन्नेमा सहमत भए । रकम थपेर दिन पनिं निश्चित नियमको दर हुनै पर्छ र समय पनि तोकिएको हुनै पर्छ नत्र आजको भोलि नै पूरा रकम थपेर दिँदैन् । त्यसैले उहाँले बाकसमा दर 5% पनि लेख्नुभयो । व्याख्या गर्नुभयो कि दर 5% भनेको प्रति रु 100 मा 1 वर्षपछि रु 5 थपेर दिन्छ वा रु 100 मा 1 वर्षपछि रु 5 ब्याज दिन्छ ।

त्यसैले,

रु 100 मा 1 वर्षपछि रु 5 ब्याज दिन्छ ।

रु 1 मा 1 वर्षपछि रु 5/100 ब्याज दिन्छ ।

रु 1000 मा 1 वर्षपछि रु (5/100)×1000 ब्याज दिन्छ ।

= रु 100

अर्थात्

साँवा = रु 1000,

समय = रु 2 वर्ष,

दर = रु 5%

ब्याज = (5×1000×2)/100

= (साँवा × दर × समय) / 100

बाकसमा एकवर्षपछि रु (1000+100) = रु 1100 जम्मा हुन्छ । अर्थात् मिश्रधन = साँवा + ब्याज हुन्छ भनी छलफल गर्नुभयो । त्यसपछि ब्याज निकाल्ने सूत्रबाट अरु परिवर्तित सूत्रहरू प्रतिपादन गर्नुभयो ।

जस्तै :

दर = (100×ब्याज)/ (समय×साँवा)

साँवा = (100×ब्याज)/ (समय×दर)

समय = (100×ब्याज)/ (साँवा×दर)

मिश्रधन दिइएका साँवा निकाल्ने सूत्र पत्ता लगाउने कार्य उहाँले विद्यार्थीलाई दिनुभयो।

जस्तै :

$A = P+I$

$A = P+(PTR/100)$

$P = (A\times100)/(100+TR)$

जहाँ, साँवा (P), समय (T), दर (R), मिश्रधन (A) जनाइएको छ ।

यस प्रकार उहाँले साधारण ब्याजबारे छलफल गर्नुभएपछि चक्रीयब्याज निकाल्ने बारे छलफल गर्नुभयो ।

बैंकको नियमअनुसार यदि प्रति 1 वर्ष ब्याज दिइन्छ भने दोस्रो वर्षको शुरुमा सो ब्याजसमेत जोडी साँवा हुन्छ अर्थात् दोस्रो वर्षको साँवा पहिलो वर्षको मिश्रधन हुन्छ । यसरी ब्याजको ब्याज पनि पाइने हुनाले यसलाई चक्रीयब्याज भनिन्छ । यसका लागि उहाँले निम्नअनुसारका उदारहण दिनुभयो ।

वर्षेनी चक्रीय ब्याज दिने बैंकले रु 10,000 को दुई वर्षपछि 10% को दरले कति मिश्रधन होला ?

पहिलो वर्ष पाउने ब्याज निकाल्दा,

ब्याज =(10000×1×10)/100= रु 1,000

त्यसैले 2 वर्षपछि मिश्रधन रु 11,000 + रु 1,000 = रु 12,100 हुन्छ ।

यस समस्यालाई सूत्र प्रयोग गरेर पनि देखाउनुभयो ।

चक्रीय मिश्रधन (A) = $P(1+R/100)^T$

= रु $10000(1+10/100)^2$

= रु 10,000×11/10×11/10

= रु 12,100

चक्रीय ब्याज $I = P[(1+R/100)^T-1]$ बारे पनि छलफल गर्नुभयो । यदि बैंकले अर्धवार्षिक रूपमा ब्याज दिन्छ भने १ वर्षमा २ पटक ब्याज पाइन्छ । दोस्रो पटकमा चक्रीय ब्याज

पाइन्छ । त्यसैले समय १ वर्षको २ अर्धवार्षिक वा २ वर्षको ४ अर्धवार्षिक हुन्छ भने दर पनि आधा हुन्छ ।

जस्तै :

$P =$ रु 10,000

$T = 2$ वर्ष $= 4$ अर्धवार्षिक

$R = 10/2\ \% = 5\%$ (अर्धवार्षिक रूपमा चक्रीय ब्याज दिने भएकोले)

$A = ?$

सूत्रअनुसार,

$A = P(1+R/100)^T$

$= 10{,}000(1+5/100)^4$

$= 10{,}000\times21/20\times21/20\times21/20\times21/20$

$=$ रु 12155.06

यसपछि उहाँले यस्ता उदाहरणहरू विद्यार्थीलाई बनाउन दिई अभ्यस्त गराउनुभयो । यसका साथै R, P, T निकाल्ने समस्याहरू पनि गराउनुभयो ।

यसैगरी कुनै ठाउँको जनसङ्ख्या पनि वर्षेनी ब्रढ्दै जान्छ भने दोस्रो वर्ष पहिलो वर्ष झै बृद्धि हुने भएकाले जनसङ्ख्या निकाल्न पनि चक्रीयब्याजको सूत्र प्रयोग गरिन्छ । यसका लागि उहाँले निम्न उदाहरण प्रस्तुत गर्नुभयो ।

कुनै ठाउँको जनसङ्ख्या 20,000 छ । यदि जनसङ्ख्या वृद्धिदर 2% भए 2 वर्षपछि सो ठाउँको जनसङ्ख्या कति होला ?

यहाँ,

अहिलेको जनसङ्ख्या $(P)=20{,}000$

वृद्धि दर $(R) = 2\%$

समय $(T)=2$ वर्ष

दुई वर्षपछिको जनसङ्ख्या $(P_T)=?$

सूत्रअनुसार,

$P_T=P(1+R/100)^T$

$=20{,}000\times5/50\times5/50$

$=20{,}808$

यस प्रकार अघिल्लो वर्षमा बढदो जनसङ्ख्या पनि निकाल्न सकिन्छ ।

जम्मा बढेको जनसङ्ख्या $= 20{,}808 - 20{,}000 = 808$ जना हुन्छ ।

यस सूत्रबाट पहिलेको जनसङ्ख्या, दर र समय पनि निकाल्न सकिने बार पनि उदाहरण सहित छलफल गर्नुभयो ।

हरिजीले आफ्नो घडी विद्यार्थीलाई देखाएर शुरुमा यसको मूल्य कति थियो होला भनेर सोध्नु भयो । विद्यार्थीले रु 2000 भने । उहाँले फेरि प्रश्न गर्नुभयो अहिले बेच्दा कति रकम आउँछ होला ? विद्यार्थीले यसको मूल्य अवश्य घट्छ भने । त्यसैगरी उहाँले दैनिक पत्रिकाको वर्गीकृत विज्ञापन देखाउनुभयो । जसमा नयाँ मोटरसाइकलको मूल्य रु 1,05,000 थियो र वर्गीकृत विज्ञापनमा सोही कम्पनीको सोही मोटरसाइकलको मूल्य रु 68,000 मा बिक्रीका लागि राखिएको रहेछ । त्यसैले मेशीनरी सामानको मूल्य घट्दै जान्छ । यसैगरी उहाँले अरु उदाहरणहरू विद्यार्थीबाट लिएर छलफल गर्नुभयो । उहाँले निम्न समस्यामा छलफल गर्नुभयो । एउटा लुगा सिउने मेशीन शुरुमा रु 5600 मा किनेछ । वर्षेनी 5% का दरले मेशीनमा ह्रास आउँछ भने 3 वर्षपछि सो मेशीन बेच्नु पर्‍यो भने कति मूल्य होला ?

पहिलेको मूल्य (P) = रु 5600

ह्रास दर (R) = 5%

समय (T) = 3 वर्ष

हालको मूल्य (D_T) = ?

सूत्रअनुसार,

$D_T = P(1-R/T)^T$

= रु $5600\ (1-5/100)^3$

= रु $5600 \times 19/20 \times 19/20 \times 19/20$

= रु 4801.30

यसै सूत्रद्वारा पहिलेको मूल्य, ह्रास दर वा समय निकाल्ने उदाहरणहरू विद्यार्थीलाई बताउन लगाउनुभयो र समाधान पनि गर्न लगाउनुभयो ।

३. परियोजना कार्य

निम्नलिखित क्रियाकलापहरू विद्यार्थीहरूलाई गराउनुहोस् र यसबाट विद्यार्थीहरूको सिकाइमा परेको प्रभावको बारेमा प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस् ।

- घर निर्माण गरिएको ठाउँमा गई कति ज्यामी, कति समय प्रतिदिन काम गर्दा पूरा काम सिध्याउन कति दिन लाग्छ ? आदि कुरा ठेकेदार वा सम्बन्धित ज्यामिलाई सोधी त्यसको लागत मूल्य निर्धारण गर्न विद्यार्थीहरूलाई लगाउनुहोस् ।
- गत महिनाको विजुलीको बिलमा लेखिएको रकम जाँच्न लगाउनुहोस् ।
- 100 वाटका हिटर 10 मिनेट बाल्न लगाई कति युनिट खपत हुन्छ, हेर्न लगाउनुहोस् ।
- बैंक, नागरिक लगानी कोष, राष्ट्रिय बिमा संस्थान आदि संस्थाहरूले व्याज कसरी निर्धारण गर्दछ ? अर्धवार्षिकी चक्रीयव्याज भनेको के हो ? तिमीले बैंकमा राखेको रकम कहिले दोब्बर होला ? उल्लिखित संस्थाहरूमा गई उत्तर लेख्न लगाउनुहोस् ।

- आफ्ना क्षेत्रमा लगाइएका करहरू के के हुन् ? आफ्नो वडा / गा.वि.स. मा गई लेख्न लगाउनुहोस् । ती रकमहरू कहाँ कसरी प्रयोग भएका छन् ? सोधेर लेख्न लगाउनुहोस् ।

४. **सन्दर्भ सामग्री**

- डा. हिराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण,
- डा. हरिप्रसाद उपाध्याय, गणित शिक्षण
- K.S. Sidhu ,Teaching of Mathematics,
- NCERT, Content cum Methodology of Teaching Mathematics for B.Ed. Students

पाठ तीन : भिन्न, दशमलव , ल.स. र म.स.

१. परिचय :

कक्षा शिक्षणमा विद्यार्थीहरूले ज्यादै कठिनाई महसुस गर्ने विषयवस्तुमध्ये भिन्न पनि एक हो । भिन्नका आधारभूत कुराहरूमा ध्यान नपुग्नु, भिन्नलाई दैनिक जीवनको गणितसँग सम्बन्धित गर्न नसक्नु र भिन्नसम्बन्धी आधारभूत क्रियाहरू गर्न नसक्नु नै भिन्नको पाठसंग टाढा रहनु हो । भिन्न र दशमलव अत्यन्तै सम्बन्धित कुरा भएकाले भिन्नलाई दशमलवसँग एक अर्काको पूरकका रूपमा गणितीय क्रियाहरू गरिनु पर्दछ ।

गुणनखण्डहरू, रुढगुणन खण्डीकरणका साथै सङ्ख्याहरूको महत्तम समापवर्तक (HCF) र लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) का शिक्षण नमूनाहरू यसपाठमा छलफल गर्नेछौं । यसका अतिरिक्त जोड तथा घटाऊ, गुणन तथा भाग क्रिया एक आपसमा उल्टो क्रिया (Inverse relationship) हुन्छ भन्ने कुराको पनि यहाँ छलफल गरिनेछ ।

२. विषयवस्तु

२.१ पूर्ण सङ्ख्या

शिक्षक बसन्तले पूर्ण सङ्ख्याको बारेमा शिक्षण गर्दैहुनुहुन्छ । प्राकृतिक सङ्ख्याको समूह र शुन्य मिलेर पूर्ण सङ्ख्याको समूह बन्दछ । पूर्ण सङ्ख्याको समूहलाई सामान्यतया W जनाइन्छ ।

W={0, 1, 2, 3, ...}

पूर्ण सङ्ख्याको समूहबाट धेरै उपसमूहहरू निर्माण गर्न सकिन्छ ।

अपवर्त्य

यदि पूर्ण सङ्ख्या b लाई दुईपूर्ण सङ्ख्या c र d को गुणनफलको रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ । अर्थात्,

b=c×d छ भने b लाई c र d को अपवर्त्यको रूपमा परिभाषित गर्न सकिन्छ । उदाहरणका लागि 18=2×9 मा 2 र 9 को अपवर्त्यहरू 18 हो । त्यसैगरी 2 र 9 का अन्य थुप्रै अपवर्त्यहरू हुन्छन् । 2 का अपवर्त्यको समूह र 9 को अपवर्त्यको समूह सबै पूर्ण सङ्ख्याका उपसमूहहरू हुन् ।

यदि b एउटा पूर्ण सङ्ख्या छ भने b को अपवर्त्यहरूको समूहलाई M_b ले जनाउन सकिन्छ ।

उदाहरणहरू :

M_2={0, 2, 4, 6, ...}

M_9={0, 9, 4, 6, ...}

अर्थात्,

M_b={b×n/n एउटा पूर्ण सङ्ख्या हो}

2 का अपवर्त्यहरूको समूहलाई जोर सङ्ख्या भनिन्छ भने 2 का अपवर्त्यबाहेकका पूर्ण सङ्ख्याको समूहलाई विजोर सङ्ख्या भनिन्छ । जोर सङ्ख्यालाई 2n ले जनाउन सकिन्छ । बिजोर सङ्ख्यालाई 2n+1 ले जनाउन सकिन्छ । कुनै सङ्ख्या 3 वा 9 को अपवर्त्य हो कि होइन भनेर सजिलै छुट्टयाउन सकिन्छ । कुनै सङ्ख्याका अङ्कहरूको योगफल 3 वा 9 को अपवर्त्य हो भने त्यो सङ्ख्या पनि 3 वा 9 को अपवर्त्य हो ।

पूर्ण सङ्ख्याका विशेष उपसमूहहरू :

वर्ग र वर्गमूल :

यदि $n = m^2$ छ र m एउटा पूर्ण सङ्ख्या हो भने पूर्ण सङ्ख्या n लाई वर्ग सङ्ख्या भनिन्छ । वर्ग सङ्ख्याको समूहलाई सामान्यतया S ले जनाइन्छ ।

S = {m^2/m एउटा पूर्ण सङ्ख्या हो}

$n = m^2$ मा m लाई n को वर्गमूल भनिन्छ ।

गुणनखण्ड र भाजक (Factors and Dividers) :

यदि पूर्ण सङ्ख्या b लाई अन्य दुई पूर्ण सङ्ख्या c र d को गुणनफलको रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ भने c र d लाई b को गुणनखण्ड भनिन्छ । अर्को शब्दमा यदि b को गुणनखण्ड c छ भने c को अपवर्त्य b हुन्छ । प्रत्येक पूर्ण सङ्ख्याको (१ भन्दा ठूलो) घटीमा २ ओटा गुणनखण्डहरू हुन्छन् ।

यदि c पूर्ण सङ्ख्या हो र c×d = b छ भने d लाई b को भाजक भनिन्छ । यसबाट स्पष्ट हुन्छ कि गुणनखण्ड र भाजक पर्यायवाची शब्द हुन् ।

रुढ र संयुक्त सङ्ख्या (Prime and Composite numbers):

कुनै पनि पूर्ण सङ्ख्याका दुई वा सोभन्दा बढी गुणनखण्डहरू हुन्छन् । २ ओटा मात्र गुणनखण्ड भएको पूर्ण सङ्ख्या रुढ सङ्ख्या हो भने २ भन्दा बढी गुणनखण्डहरू हुने पूर्ण सङ्ख्या संयुक्त सङ्ख्या हो । सबै संयुक्त सङ्ख्यालाई रुढ सङ्ख्याको गुणनफलको रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

यदि b एकभन्दा ठूलो छ भने b का सबैअपवर्त्यहरू (b बाहेक) संयुक्त सङ्ख्या हुन्छ र b का सबै वर्गहरू पनि संयुक्त सङ्ख्या हुन्छ ।

यसबाट पूर्ण सङ्ख्याको समूह W का चारउपसमूह हुन्छन् । समूह {0}, समूह {1}, रुढ सङ्ख्याहरूको समूह र संयुक्त सङ्ख्याहरूको समूह । इशापूर्व 194 मा ग्रीक गणितज्ञ Eratosthenes ले रुढ सङ्ख्या पत्ता लगाउन Sieve method प्रयोग गरेका थिए जसलाई Sieve of eratosthenes भनिन्छ ।

कुनै पूर्ण सङ्ख्यालाई गुणनखण्डको रूपमा व्यक्त गर्ने प्रक्रियालाई खण्डीकरण (Factorization) भनिन्छ । जस्तै : 24 को खण्डीकरण 1×24, 2×12, 2×2×6, 2×2×2×3 हुनसक्छ । खण्डीकरण दुई प्रकारका हुन्छन् । Trivial खण्डीकरण र रुढ खण्डीकरण । माथिको

उदाहरणमा 1×24 Trivial खण्डीकरण हो भने 2×2×2×3 रुढ खण्डीकरण हो । जुनसुकै सङ्ख्याको पनि Trivial खण्डीकरण हुन्छ ।

२.२ भिन्न

भिन्नको इतिहास :

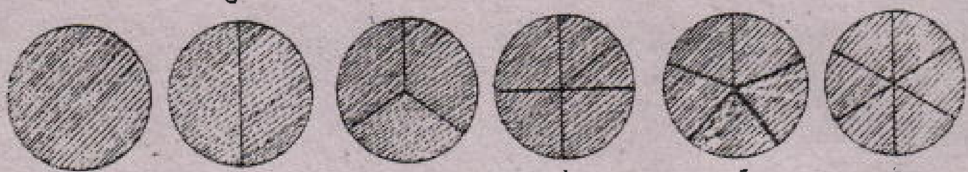
अरेविकहरूले "टुक्रा गर्नु" लाई पहिले Al Kasr भन्ने गर्दथे, जसको अर्थ भिन्न भन्ने हो । त्यस्तै ल्याटिन भाषामा टुक्रा गर्नुलाई Frangere भन्दथे, जसलाई उनीहरू Fractus प्रयोग गर्दथे पहिलेका लेखकहरूले Fractio, Minimum ruptus वा Ruptus पनि प्रयोग गरेको पाइन्छ । अङ्ग्रेजी शब्द fraction सर्वप्रथम सन् 1321 मा गणितज्ञ Chavcer ले प्रयोग गरेका थिए । 1568 मा Baker ले भिन्नलाई "टुक्राको टुक्रा" संज्ञा दिए । त्यस्तै 1542 मा Recorde ले भिन्नलाई टुक्रिएको सङ्ख्याका साथै यो सङ्ख्या होइन तर कुनै सङ्ख्याको अंश हो भन्न थाले । त्यसलाई 1556 मा Tartaglia ले अंशलाई माथि र एउटा रेखाखण्ड लेखी त्यसको मुनि हर राखी भिन्न लेख्न थाले ।

त्यसैगरी भिन्न शिक्षणमा Fibonanci , Abrahambar Chica , र Rabbiber Exre ले ×, ÷, + र - को प्रतिपादन गरे जब कि 1518 मा Grammateus ले +, ×, - र ÷ को क्रम मिलाए ।

भिन्नको धारणा :

भिन्नको धारणा दिन शिक्षक वसन्तले कक्षाकोठाभित्र वा विद्यालयबाहिर उपलब्ध विभिन्न वस्तुहरूको प्रयोग गर्नुभयो । एउटा बेञ्चमा टोपी लगाएका केटाहरू २ जना र नलगाएका केटाहरू ३ जना भए भिन्नमा लेख्नु पर्दा टोपी लगाउनेलाई २/५ र टोपी नलगाउनेलाई ३/५ ले जनाउन सकिन्छ । त्यसैगरी केटाहरूको सङ्ख्या र केटीहरूको सङ्ख्या पनि उदाहरणका लागि लिन सकिन्छ । विद्यार्थीहरूले दैनिक जीवनमा उपयोग गरिरहेका भिन्नका उदाहरणहरू : आधी गाग्री पानी, आधा लिटर मट्टीतेल, एक चौथाइ तोरीको तेल, आधा चक्की वा आधा चम्चा औषधि, आधा रोटी इत्यादि ।

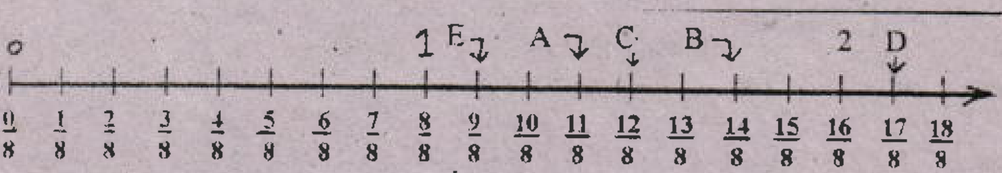
तलको चित्रबाट समतुल्य भिन्नको धारणा दिन सकिन्छ ।



$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6}$$

गुणन तालिकालाई पनि समतुल्य भिन्न चार्टको रूपमा प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

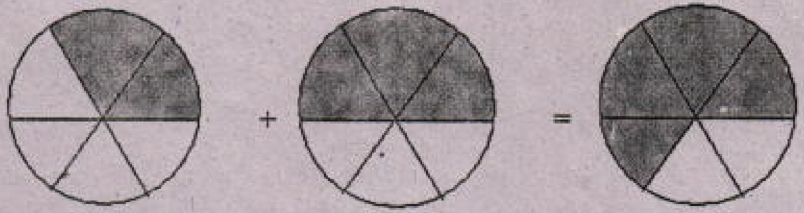
सङ्ख्या रेखाको माध्यमबाट मिश्रित भिन्न र अनुपयुक्त भिन्नको धारणा दिन सकिन्छ ।



भिन्न तथा दशमलवका आधारभूत क्रियाहरू :

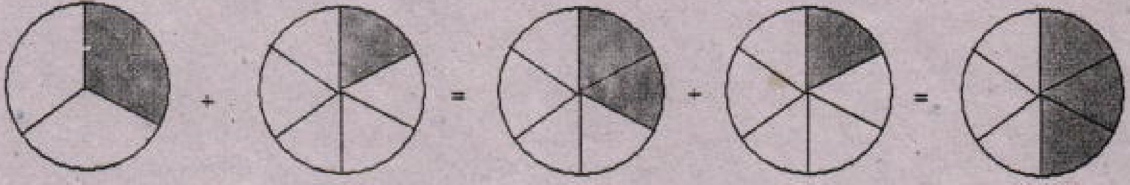
बसन्तजीले भिन्नहरूको जोड् निकाल्न चित्रहरूद्वारा स्पष्ट पार्नुभयो । निम्न लेखिएका चार्ट प्रयोग गर्नुभयो ।

$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=?$



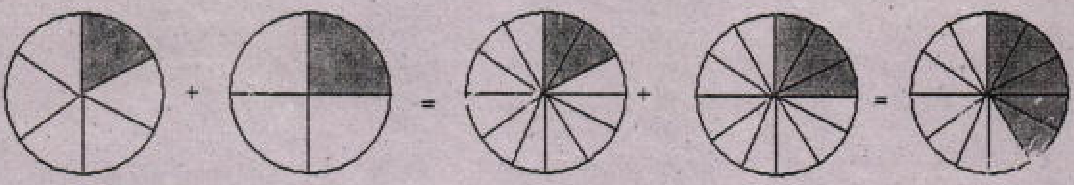
$\frac{2}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{5}{6}$

समान हर भएका भिन्नहरूको योग निकाल्न अंशहरू मात्र जोडी हरको साझा अङ्क हरमा नै राख्नुभयो । $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=?$



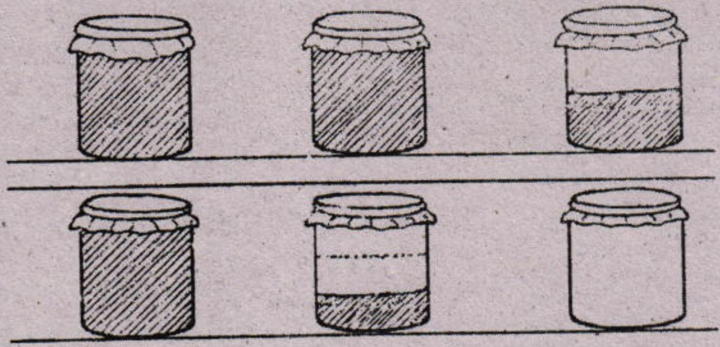
1/3 1/6 2/6 1/6 3/6=1/2

उहाँले अर्को एउटा चार्ट पनि देखाउनुभयो । $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=?$



1/6 1/4 2/12 3/12 5/?

उहाँले यस्ता भिन्नहरूको जोड् चित्रहरूद्वारा छलफल गर्नु भई त्यस्तै उदाहरणहरू विद्यार्थीलाई गर्न दिनुभयो र बोर्डमा प्रस्तुत गराउनुभयो ।



$2\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}$

$=2+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}$

$=3+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

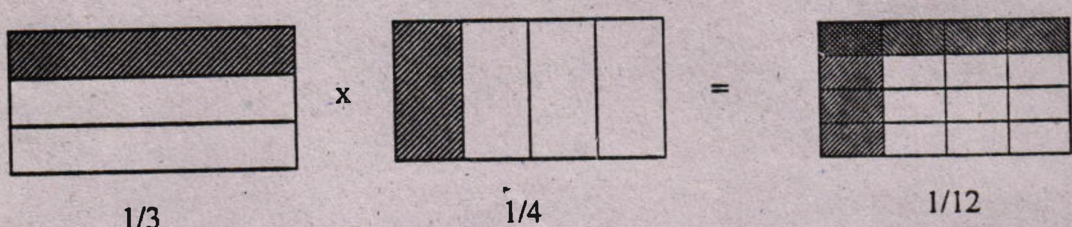
$=3+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$

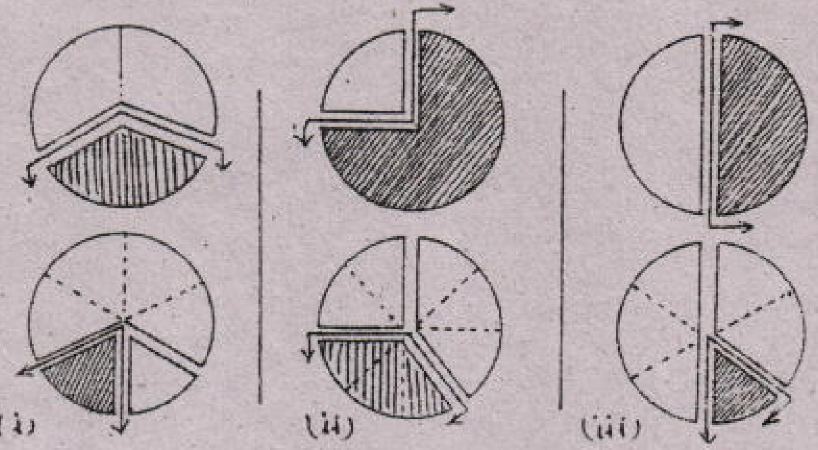
$=3+\frac{5}{6}$

$=3\frac{5}{6}$

बसन्तजीले माथिकै जस्तै गरी भिन्नहरूको घटाउका पनि चार्टहरू प्रस्तुत गरी समस्याहरू विद्यार्थीलाई बनाउनदिनुभयो र समाधान पनि गर्न लगाउनुभयो ।

भिन्नहरूको गुणनबारे निम्नअनुसार उदाहरणद्वारा प्रष्ट पार्नुभयो । $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=?$





पहिलो चित्रबाट,

$\frac{1}{3}$ को $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

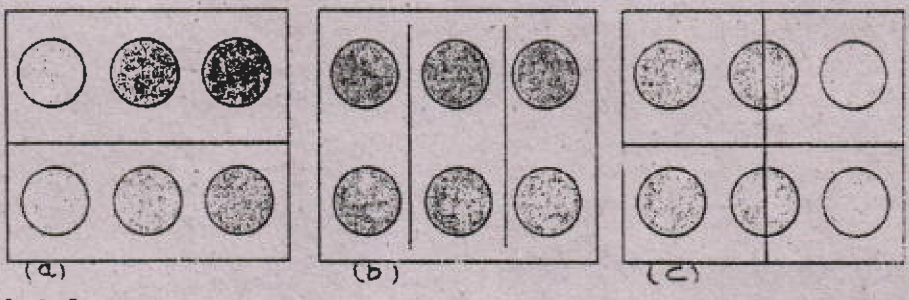
दोस्रो चित्रबाट,

$\frac{1}{2}$ को $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

त्यसैले, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

यस प्रकारका चित्रबाट धारणा बसिसकेपछि मात्र उहाँले भिन्नहरूको गुणनगर्ने तरिका बारे छलफल गर्नुभयो ।

उहाँले विद्यार्थीहरूलाई भिन्नको भाग सिकाउनुभन्दा पहिले उनीहरूलाई $a \div b = \frac{a}{b}$ हुन्छ भन्ने धारणाबाट सुरु गर्नुभयो ।



पहिलो चित्रमा,

$$6 \div 2 = 3$$

अथवा $\frac{6}{2} = 3$

दोस्रो चित्रमा, $6 \div 3 = 2$

अथवा $\frac{6}{3} = 2$

तेस्रो चित्रमा,

$$6 \div 4 = 1\frac{1}{2}$$

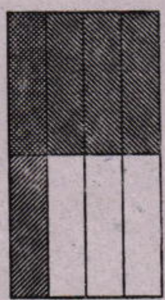
अथवा $\frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$

त्यसैगरी $4 \div \frac{1}{2}$ मा 4 मा कतिओटा 1/2 छन् ? भन्ने कुरा सङ्ख्या रेखाबाट देखाउन लगाउनुभयो ।

त्यस्तै गरी बसन्तजीले भिन्नहरूको भागसम्बन्धी पनि चित्रद्वारा छलफल गर्नुभयो ।

$\frac{1}{4} \div 2 = ?$

$\div$२ (दुई भाग लगाउने)



=1/8 (दोहोरो छायाँ परेको भाग नै उत्तर हुन्छ).

1/4÷=1/8

यहाँ, $\frac{1}{4} \div 2$ हुँदा $\frac{\frac{1}{4}}{2}$ हुन्छ ।

अर्थात्, $1/4 \times 1/2 = 1/8$ हुन्छ ।

यसबाट धारणा बसिसकेपछि मात्र उहाँले $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$ को सरल गर्नुभयो ।

जसरी $\frac{\frac{1}{4}}{2}$ हुँदा $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{1}}$ भई $1/4 \times 1/2$ भयो ।

त्यसरी नै $\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=1/4\times2/1$ हुन्छ किनभने हरमा 1 बनाउनु पर्छ ।

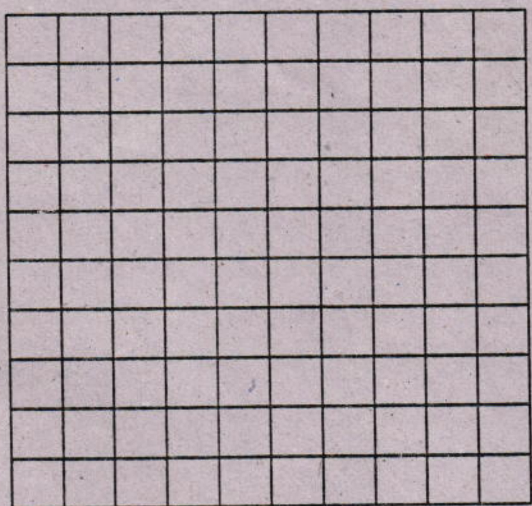
त्यसैले हरमा 1 बनाउन अंश र हरमा 1/2 को व्युत्क्रम (Reciprocal) 2/1 ले गुणा गरेकोहो । यससम्बन्धी पनि प्रश्नहरू विद्यार्थीहरूलाई बनाउन दिनु भई समाधान पनि गर्न लगाउनुभयो ।

दशमलव :

बसन्तजीले 100cm लामो रेखा बोर्डमा खिच्नुभयो र प्रत्येक 10/10cm को अन्तरमा चिन्ह पनि लगाउनु भई अङ्क पनि अङ्कित गर्नुभयो ।

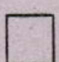
सो रेखाको एक चौथाई (1/4) भागमा चिन्ह लगाउनुभयो । जुन 25cm मा अङ्कित भएको प्रष्ट्याउनु भयो । त्यसैले 25cm भएको 100 भागमा 25 औ भाग हो । अर्थात् 25/100 भाग हो अर्थात् 0.25 भाग हो ।

त्यसैले 25/100=0.25 भयो । यसलाई शून्य दशमलव दुई पाँच भनी पढिन्छ । एउटा ग्राफ पेपरमा 100 ओटा वर्ग भएका एउटा ठूलो वर्गलाई 1 मानेर दशांश, सयांशको धारणा दिन सकिन्छ ।



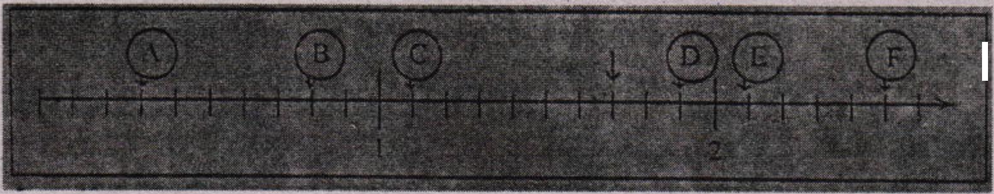
1

1/10



1/100

सङ्ख्या रेखाबाट पनि दशमलवको धारणा दिन सकिन्छ ।



उहाँले चित्रमा A, B, C, D, E र F ले कुनकुन दशमलव सङ्ख्या जनाउँछन् भनेर विद्यार्थीहरू बीच छलफल चलाउनुभयो ।

यसरी दशमलवको ज्ञान दिनुभएपछि भिन्नलाई दशमलवमा परिणत गर्ने तरिका छलफल गर्नुभयो ।

1/4 को हरले अंशलाई भाग गर्नुपर्छ ।

4) 10 (0.25
-8
20
20
×

4 ले 1 लाई भाग नजाने भएकोले शून्य राखेपछि दशमलव राखी भाज्यमा शून्य थप्ने । दोस्रो चरणमा पनि शून्य थप्ने ।

दशमलवको जोड तथा घटाउ गर्दा, दशमलवभन्दा पछिका अङ्कहरू उत्तिकैओटा रहनु पर्ने कुरामा छलफल गर्नुभयो । जस्तै : 12.34 र 3.6 जोड्दा 3.6 लाई 3.60 बनाउनु पर्छ ।

12.34+3.60=15.94

त्यस्तै, 12 बाट 3.62 घटाउँदा, 12 लाई 12.00 बनाउनु पर्छ ।

12.00-3.62=8.38 हुन्छ ।

स्थानमान तालिकाबाट पनि दशमलवको जोड घटाउ सिकाउन सकिन्छ ।

दशमलवको जोड :

एक	दशांश	सयांश
1	4	5
+3	2	3
•4	6	8

त्यसैगरी दशमलवको गुणा गर्दा,

12.34 दशमलवकोपछि दुईओटा अङ्क छ ।

$\underline{\times\ .03}$ दशमलवकोपछि दुईओटा अङ्क छ ।

0.3702 चारओटा अङ्कको माथि दशमलव राख्नु पर्छ ।

वसन्त सरले कक्षामा एउटा 4.2 मिटर लामो धागो दिनुभयो । 0.7 मिटरको फरकमा चिन्ह लगाउन निर्देशन दिनुभयो। त्यसपछि चिन्ह लगाएको ठाउँबाट काट्दा कति टुक्रा भयो गन्न लगाउनुभयो । जम्मा 6 टुक्रा भए

अर्थात्,

$4.2 \div 0.7 = 6$

त्यसैगरी भाग गर्दा,

$36.24 \div 12$ मा

12) 36.24 (3.02

$\underline{36}$

24

$\underline{24}$

×

12×3 हुँदा 36 भएपछि दशमलव आएकोले भागफलमा पनि दशमलव राखेको हो । 2 लाई 12 ले भाग नजाने भएकोले 0 राखियो र 4 समेत राखियो ।

यस्तै समस्याहरू विद्यार्थीहरूलाई बताउन लगाई समाधान पनि गर्न लगाउनुभयो ।

10, 100 र 1000 ले गुणन र भाग

विद्यार्थीहरूलाई 10, 100, 1000 ले विभिन्न दशमलव सङ्ख्यालाई गुणन गर्न लगाउनुभयो । कुनै दशमलव सङ्ख्यालाई 10 ले गुणन गर्दा र भाग गर्दा तालिकामा देखाइअनुसार अङ्कहरू सर्ने कुरा प्रस्टयाउनुभयो ।

सय	दश	एक	दशांस	सयांश
		4	3	8
	4	3	8	

$\times 10$

सय	दश	एक	दशांस	सयांश
	4	3	8	
		4	3	8

$\div 10$

त्यसैगरी 100 ले कुनै दशमलव सङ्ख्यालाई गुणन वा भाग गर्दा तालिकामा देखाइएअनुसार अङ्कहरू सर्ने कुरा प्रस्ट पार्नुभयो ।

सय	दश	एक	दशांस	सयांश	हजारांश
		8	3	6	
8	3	6			

×100

सय	दश	एक	दशांस	सयांश	हजारांश
	2	7	5		
			2	7	5

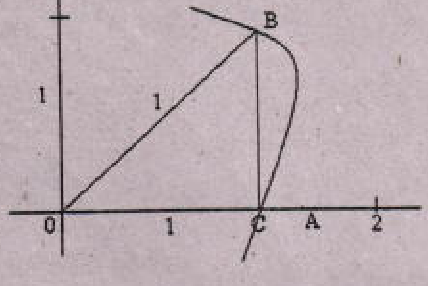
÷100

अनानुपातिक सङ्ख्या (Irrational number)

शिक्षक बसन्तले विभिन्न किसिमका सङ्ख्याहरूको बारेमा छलफल गर्नुभयो । जस्तै : प्राकृतिक सङ्ख्या, पूर्ण सङ्ख्या, पूर्णाङ्क, अनुपातिक सङ्ख्या, अनानुपातिक सङ्ख्या । वस्तुहरूको जोडका लागि प्राकृतिक सङ्ख्या भए पुग्ने तर जब वस्तुहरू घटाउनु पर्‍यो भने पूर्ण सङ्ख्याको जरुरत पर्ने निष्कर्ष निस्क्यो । जस्तै १० वस्तुमा १० वस्तु नहुँदा कति हुन्छ भन्ने प्रश्न खडा भएपछि ० को आवश्यकता पर्‍यो र पूर्ण सङ्ख्या बन्यो ।

जब मानिसको दैनिक व्यवहारमा लम्बाइ, तौल, क्षेत्रफल, आयतन समय जस्ता नाप लिनुपर्ने भयो तब दुई सङ्ख्याको बीचमा पर्ने सङ्ख्याको जरुरत पर्‍यो । अनि अनुपातिक (Rational) सङ्ख्या प्रचलनमा आयो । सङ्ख्याहरू घटाउँदा ठूलो सङ्ख्याबाट सानो सङ्ख्या मात्र घटाउने मान्यताविपरीत जुनसुकै सङ्ख्याबाट जुनसुकै सङ्ख्या घटाउन मिल्ने मान्यता राखी ऋणात्मक चिन्ह प्रयोग गरी पूर्णाङ्कको विकास भयो ।

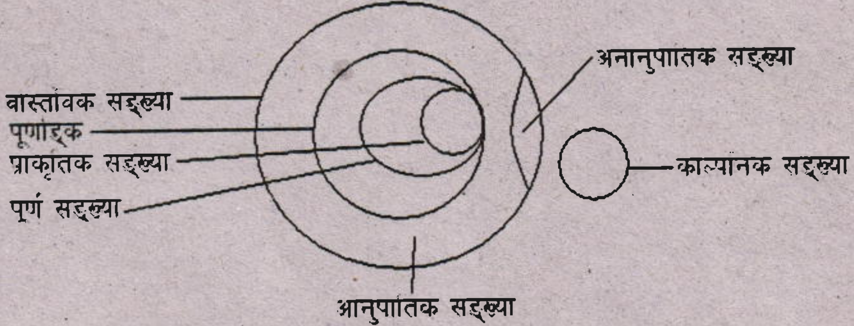
आनुपातिक (भिन्नात्मक) सङ्ख्याको अविष्कारपछि सङ्ख्या रेखामा प्रत्येक बिन्दु कुनै न कुनै भिन्नबाट जनाउन मिल्ने मान्यता राखियो ।



माथिको चित्रमा देखाइएको सङ्ख्या रेखामा 1 एकाइ लम्बाइ र 1 एकाइ चौडाइको वर्गको विकर्णको नापले सङ्ख्या रेखामा काट्ने बिन्दु A लाई कुन भिन्नबाट जनाउने भन्ने प्रश्नको उत्तर खोज्ने क्रममा उक्त बिन्दुलाई कुनै भिन्नले जनाउन नसकिने र त्यसलाई अनानुपातिक सङ्ख्या भनी निष्कर्ष निकालियो ।

दुई सङ्ख्याहरूलाई अनुपातको रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ भने त्यसलाई आनुपातिक सङ्ख्या(Rational number) भनिन्छ । a/b अनुपातिक सङ्ख्या हो जहाँ $b \neq 0$ हुनुपर्छ । यदि दुई सङ्ख्याहरूलाई अनुपातको रूपमा लेख्न सकिदैन भने त्यसलाई अनानुपातिक सङ्ख्या (Irational number) भनिन्छ । जस्तै : $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ .... आदि ।

यसरी वास्तविक सङ्ख्या (Real number), काल्पनिक सङ्ख्या, अनुपातिक सङ्ख्या, अनानुपातिक सङ्ख्या, पूर्णाङ्क, पूर्णसङ्ख्या, प्राकृतिक सङ्ख्यालाई तलको भेन चित्रबाट जनाउन सकिन्छ ।



महत्तम समापवर्तक (HCF)

बसन्तजीले विद्यार्थीलाई कक्षाकोठाबाहिर चौरमा राखी १६ ओटा ढुङ्गाका टुक्राहरू एक ठाउँमा राख्नुभयो । एकजना विद्यार्थीलाई 1/1 ओटाको समूह बनाउन लगाउनुभयो । त्यसैगरी अर्को विद्यार्थीलाई 2/2 ओटाको समूह बनाउन लगाउनुभयो । त्यस्तै 3/3 ओटाको समूह बनाउन दिनुभयो तर 5 ओटा 3/3 ओटाको समूह बनी 1 ओटा बाँकी रहयो अर्थात् 3 ले 16 लाई निःशेष भाग लाग्दैन । त्यस्तै 4/4 ओटाको समूह बनाउन लगाउनुभयो । यस पटक निःशेष भाग लाग्यो तर 5/5 ओटाको समूह बनाउँदा निःशेष भाग लागेन । यस प्रकारको क्रियाकलाप गरी सकेपछि कक्षामा फर्केर बसन्तजीले यस प्रकार छलफल गर्नुभयो ।

16 लाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरू कुनकुन हुन्, आ-आफ्नो कापीमा लेख्न लगाउनुभयो ।

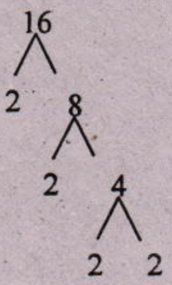
16 लाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरू 1, 2, 4, 8 र 16 हुन् ।

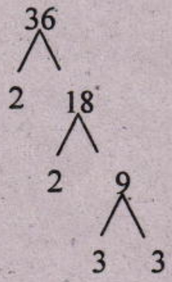
त्यसैले 16 को गुणनखण्डहरू (Factors) 1, 2, 4, 8 र 16 भयो ।

यस्तै अरु सङ्ख्याहरूको पनि गुणनखण्डहरू निकाल्न लगाउनुभयो । त्यसपछि उहाँले 17 को गुणनखण्डहरू निकाल्न लगाउनुभयो । 17 का गुणनखण्डहरू 1 र 17 मात्र हो । त्यसैले 17

एउटा रुढ सङ्ख्या (Prime number) हो भनी छलफल गर्नुभयो । यस्तै अरू रुढ सङ्ख्याहरू लेख्न लगाउनुभयो ।

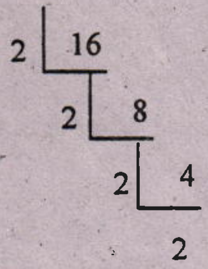
उहाँले कुनै सङ्ख्याको रुढ खण्डीकरण (Prime factorisation) गर्न निम्न तरिकाको प्रदर्शन गर्नुभयो ।

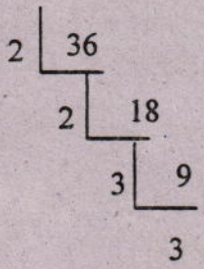




$16=2\times2\times2\times2$ $36=2\times2\times3\times3$

यस प्रकारका उदाहरणहरू गरिसकेपछि अर्को तरिका पनि प्रस्तुत गर्नुभयो ।





त्यसैले 16 को रुढ़ खण्डीकरण गर्दा $2\times2\times2\times2$ र 36 को रुढ खण्डीकरण गर्दा $2\times2\times3\times3$ हुन्छ

उहाँले निम्नअनुसारका उदाहरणमा छलफल गर्नुभयो ।

शिक्षक बसन्तले म.स.को धारणा दिन निम्नलिखित क्रियाकलाप गराउनुभयो । 12 र 18 को म.स. निकाल्नका लागि 12 एकाइ र 18 एकाइ लम्बाइका डण्डीहरू (अथवा पेपर स्ट्रीप) विद्यार्थीहरूलाई दिनुभयो। ती दुवै डण्डीहरूलाई 2 एकाइ, 3 एकाइ, 4 एकाइ, 5 एकाइ, 6 एकाइ, 7 एकाइ लम्बाइका डण्डीहरूले पालैपालो नाप्न लगाउनुभयो । कुन कुनले दुवैलाई ठीक्क नाप्न सकियो कुनले सकिएन भन्ने कुरा पत्ता लगाउन दिनुभयो। दुवैलाई ठीक्क नाप्न सकिने सबभन्दा ठूलो नाप 6 एकाइ भएको कुरा विद्यार्थीहरूले पत्ता लगाए । यसबाट 12 र 18 को म.स. 6 कसरी भयो भन्ने कुरा स्पष्ट भयो ।

प्रमिलाले आफ्नो जन्मदिन मनाउने क्रममा आफ्ना केही साथीहरूलाई बोलाएकी छ । उनले 18 ओटा स्याउ र 24 ओटा केरा किनिन् । ती फलफूलहरू बराबर सङ्ख्यामा बाँड्न सकिन्छ भने उनले बढीमा कतिजना साथी बोलाएकी छ ।

18 का गुणनखण्डहरू = 1, 2, 3, 6, 9, 18

24 का गुणनखण्डहरू =1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

साझा गुणनखण्ड =1, 2, 3, 6

त्यसैले 18 र 24 को सबैभन्दा ठूलो साझा गुणनखण्ड 6 हुन्छ ।

अर्थात् म.स. = 6 हुन्छ ।

त्यस्तै रुढ खण्डीकरण तरिकाबाट म.स. निकाल्दा,

$18=2\times3\times3$

$24=2\times2\times2\times3$

त्यस्तै भाग विधिबाट,

```
12)  18(1
     12
     6)   12(2
          12
          ×
```

म.स. = साझा गुणनखण्डको गुणनफल $=2\times3=6$ हुन्छ ।

म.स.का दुईओटा गुणहरू हुन्छन् ।

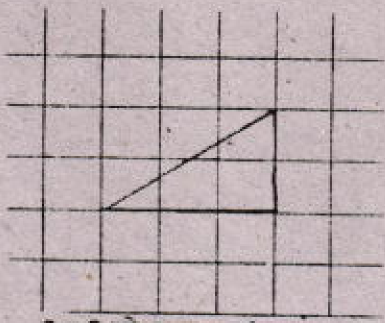
क) दिइएका सङ्ख्याहरूका म.स. ले दिइएका सङ्ख्याहरूलाई निशेष भाग लाग्छ ।

ख) दिइएको सङ्ख्याको सबै साझा भाजकहरू म.स.का पनि भाजकहरू हुन् ।

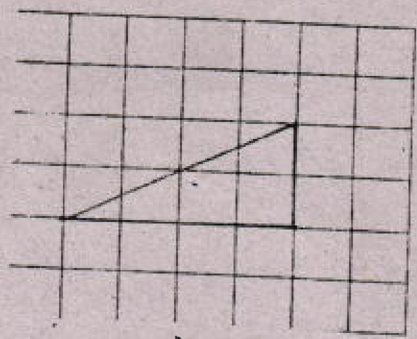
भिन्नलाई सानो पदमा लैजानका लागि म.स. को प्रयोग हुन्छ । उदाहरणका लागि $\frac{24}{56}$ लाई लघुत्तम पदमा लैजानका लागि 24 र 56 को म.स. अर्थात् 8 ले अंश र हर दुवैलाई भाग गर्नु पर्दछ ।

$\frac{24}{56}=\frac{24\div8}{56\div8}=\frac{3}{7}$ हुन्छ ।

जियो वोर्डबाट म.स. :



3 र 2 को म.स. = 1



4 र 2 को म.स. = 2

लघुत्तम समापवर्त्य (LCM)

3 र 4 को ल.स. निकाल्नका लागि शिक्षक बसन्तले निम्नलिखित क्रियाकलाप गराउनुभयो । 3 एकाइ र 4 एकाइका डण्डीहरू वा पेपर स्ट्रीप विद्यार्थीहरूलाई दिनुभयो ।

दुई डण्डी बराबर नभएकोले 3 एकाइमा अर्को 3 एकाइ जोड्दै जाने । 4 एकाइमा अर्को 4 एकाइ जोड्दै जाने । यो प्रक्रिया दुवै बराबर नभएसम्म जारी राख्ने । दुवै बराबर हुँदा 12 एकाइ हुन्छ । त्यसैले 3 र 4 को ल.स. 12 भयो ।

विमलाले आफ्नो जन्मोत्सवका उपलक्ष्यमा कक्षाका आफ्ना साथीहरूलाई वितरण गर्नका लागि केही मिठाइहरू किनिन् । उनका साथीहरू 4 जना उपस्थित भए पनि बराबर बाँड्न पुग्छ र 6 जना उपस्थित भए पनि बराबर बाँड्न पुग्छ भने उनले घटीमा कतिओटा मिठाइ किनेकी छन् ?

यहाँ,

4 का अपवर्त्यहरू (Multiples) 4, 8, 12, 16, 20, 24 .... हुन् ।

6 का अपवर्त्यहरू (Multiples) 6, 12, 18, 24 .... हुन् ।

यहाँ 4 र 6 का साझा अपवर्त्यहरू 12, 24 .... हुन् ।

त्यसैले 4 र 6 को सबैभन्दा सानो साझा अपवर्त्य =12 हुन्छ ।

ल.स.=12 हुन्छ ।

0 पनि 4 र 6 को साझा अपवर्त्य हो तर यहाँ 0 लाई लिइदैंन किन कि 0 सबै पूर्ण सङ्ख्याको अपवर्त्य हो ।

त्यस्तै रुढ खण्डीकरण तरिकाबाट ल.स. निकाल्दा,

$4=2\times2$

$6=2\times3$

4 र 6 का साझा गुणनखण्ड =2

बाँकी गुणनखण्ड =2×3

ल.स. =2×2×3=12 हुन्छ ।

त्यस्तै भाग विधिबाट,

$2\underline{|4, 6}$

$\quad 2, 3$

ल.स. $= 2 \times 2 \times 3 = 12$ हुन्छ ।

यस्तै समस्याहरू विद्यार्थीलाई बनाउन दिई समाधान पनि गर्न लगाउनुभयो ।

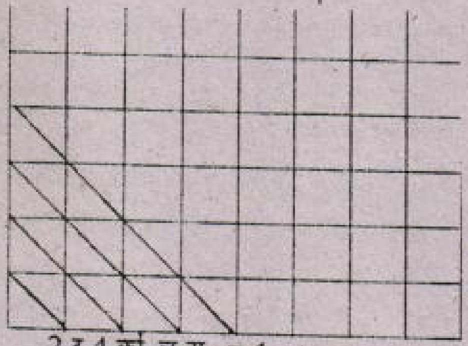
ल.स.का दुईओटा गुणहरू हुन्छन् :

क) दिइएका सङ्ख्याहरूको ल.स. ती सङ्ख्याहरूको अपवर्त्य हुन्छ ।

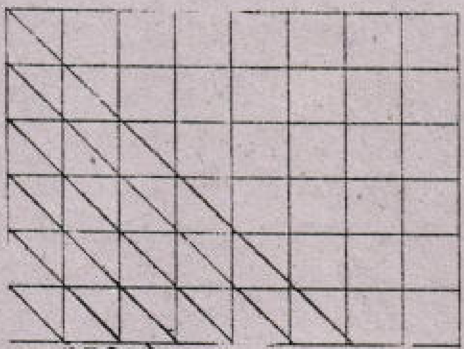
ख) दिइएको सङ्ख्याहरूको प्रत्येक साझा अपवर्त्य ल.स.को पनि अपवर्त्य हुन्छ ।

असमान हर भएका भिन्नहरूको जोड घटाउका लागि ल.स.को प्रयोग हुन्छ । जस्तै : 3/4 र 1/6 को योगफल निकाल्नका लागि 4 र 6 को ल.स. पत्ता लगाउनु पर्दछ ।

जियोबोर्डबाट ल.स. :

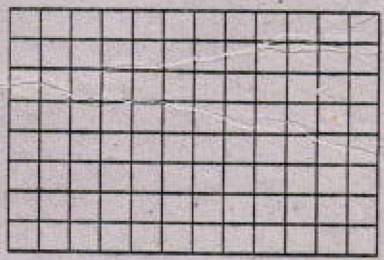


2 र 4 को ल.स. = 4



2 र 3 को ल.स. = 6

वास्तविक जीवनमा म.स. तथा ल.स. को प्रयोग कहाँ प्रयोग हुन्छ ? एउटा उदाहरण हेरौं । 12m लामो र 8m चोडाइको हलको भुईंमा कुनै नापका वर्गाकार मार्बल (ढुङ्गा) छान्नुपर्‍यो भने सबैभन्दा ठूलो वर्गको लम्बाइ कति होला ?

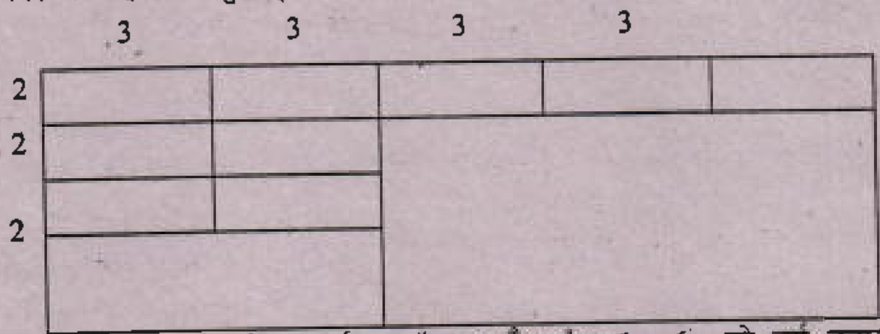


यस प्रश्नमा $1\ m \times 1\ m$ को वर्ग छान्नु पर्दा 96 ओटा चाहिन्छ भने $2\ m \times 2\ m$ को वर्ग 24 ओटा चाहिन्छ । तर $3\ m \times 3\ m$ को वर्गले हलको भुईं ढाक्न सकिदैन (टुक्रा नगरिकन) । तर $4\ m \times 4\ m$ का वर्गहरू अटाउँछन् । यहाँ $4m \times 4m$ का वर्गाकार मार्बलहरू 6 ओटा चाहिन्छन् । त्यस्तै $5\ m \times 5\ m$, $6\ m \times 6\ m$ का वर्गाकार मार्बलहरू अटाउलान् ।

यहाँ सबै भन्दा ठूलो वर्ग 4 m × 4 m का भएकाले (सो वर्गको एउटा भुजा 4m) 12m×8m का आयतको म.स. 4m हुन्छ ।

त्यसैगरी ल.स. का लागि कुनै प्रश्न बनाउन सक्नुहुन्छ ।

3m×2m को आयताकार मार्वलले कुनै वर्गाकार क्षेत्रफल ढाक्नुपऱ्यो भने सबैभन्दा सानो वर्गको लम्बाइ निकाल्नुहोस् ।



यहाँ 3m×2m को 6 ओटा मार्वल भुईंमा छाप्दै जाँदा 6m×6m को वर्ग बनाउन सकिन्छ । त्यस्तै 12m×12m को वर्ग पनि बनाउन सकिन्छ । अरु नि ? यहाँ सबैभन्दा सानो वर्गको भुजा 6m नै 3m×2m को ल.स. हुन्छ ।

जोड् र घटाऊ तथा गुणन र भाग एकआपसमा विपरीत क्रियाहरू हुन्छन् भनी प्रष्ट्याउन बसन्तजीले निम्नअनुसार क्रियाकलापहरू गर्नुभयो ।

125	201	201
+76	-76	-125
201	125	76

बसन्तजीले कक्षाकोठाको अग्रभागका भुईंमा 0 लेख्नुभयो र 0 बाट एकजना विद्यार्थीलाई अगाडि बढाउनुभयो । विद्यार्थी 5 पाइला अगाडि बढ्यो अर्थात् पहिलो पाइलामा अर्को पाइला जोड्दै 5 औ पाइलासम्म पुग्यो । 5 औ पाइला पुग्न 4 औ पाइलामा 1 जोडेर पुगेको हो ।

0 1 2 3 4 5

फेरि 5 औ पाइलाबाट एक पाइला पछाडि फर्क्यो भने 4 औ पाइलामा पुगिन्छ । अर्थात् 5 बाट 1 घटाउँदा 4 हुन्छ ।

त्यसैले अगाडि बढनु जोड (+) हुन्छ भने पछाडि हुन घटाऊ (-) हुन्छ ।

त्यसैले जोड र घटाउ एकआपसमा उल्टो क्रिया हुन् । त्यसैगरी दुईदुईओटा ईंटाका समूह 5 चोटी राख्दा 10 ओटा ईंटाका टुक्रा हुन्छ । अर्थात् 5×2=10 हुन्छ ।

त्यस्तै 10 बाट 2/2 ओटाका ईंटाका टुक्राहरू समूह बनाउँदा 5 ओटा बन्छ । अर्थात् 10÷2=5 हुन्छ ।

यस प्रकार गुणन र भाग पनि एकआपसमा उल्टो क्रिया हुन् भनी उहाँले प्रष्ट्याउनुभयो ।

वर्गमूल

64 वर्ग सङ्ख्या हो भने 64 को वर्गमूल 8 हो ।

के 1/64 को वर्गमूल 1/8 हुन्छ ? वर्ग सङ्ख्या र त्यसैको वर्गमूलमा कुन ठूलो हुन्छ ? तर भिन्नता के फरक पाउनुभयो ?

निश्कर्ष के पाउनुभयो ?

त्यसैले वर्ग सङ्ख्या र त्यसैको वर्गमूलमा प्राकृतिक सङ्ख्यामा मात्र वर्ग सङ्ख्या ठूलो हुन्छ । तर भिन्न र प्राकृतिक सङ्ख्याको प्रणाली फरक भएकाले गर्दा ठूलो र सानोको तुलना गर्न मिल्दैन ।

बसन्तजीले एउटा रेखा बोर्डमा खिच्नुभयो जुन 20cm लामो थियो । सो रेखामा एकजना विद्यार्थीलाई एउटा वर्ग खिच्न लगाउनुभयो र प्रश्न गर्नुभयो, त्यसको क्षेत्रफल कति होला ? विद्यार्थीले $400cm^2$ भन्ने जवाफ दिए । त्यसैले वर्गको क्षेत्रफल वा वर्ग निकाल्न त्यसको एकभागलाई त्यत्ति नै परिमाणले गुणा गर्नुपर्छ ।

त्यस्तै उहाँले विद्यार्थीलाई चौरमा लानुभयो र वर्गाकार रूपमा बस्न लगाउनुभयो । त्यहाँ जम्मा 52 विद्यार्थी थिए । 49 जना वर्गाकार रूपमा बसे र 3 जना बस्न पाएनन् । उनीहरूलाई उहाँले अलगअलग राख्नुभयो । उहाँले प्रश्नगर्नु भयो कि सो वर्गाकारमा अगाडि पङ्क्तिमा कतिजना विद्यार्थीहरू छन् ? विद्यार्थीहरूले 7 जना भनेर जवाफ दिए । अर्थात् लम्बाइ तथा चौडाइमा 7/7 जना छन् भनेर जवाफ दिए । त्यसैले 49 को वर्गमूल 7 हो अर्थात् $\sqrt{49} = 7$ हुन्छ । त्यस्तै 7 को वर्ग 49 हो अर्थात् $7^2=49$ हुन्छ ।

यस्तै उदाहरणहरू उहाँले विद्यार्थीहरूबाट पनि लिनुभयो र वर्ग तथा वर्गमूल एक आपसमा उल्टो क्रिया (Inverse relationship) हुन्छ भनी छलफल गर्नुभयो ।

३. परियोजना कार्य :

- वर्ग, वर्गमूल, ल.स., म.स., पूर्णसङ्ख्या शिक्षणका लागि सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- डा. हीराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण - गणित शिक्षण - डा. हरिप्रसाद उपाध्याय
- K.S. Sidhu ,Teaching of mathematics
- NCERT Publication, Content - cum - Methodology of Teaching Mathematics for B.Ed. Students, New Delhi.

एकाइ तीन
बीजगणित शिक्षण

> **Competency :** Understand algebra as language of mathematics and used it in interpreting everyday discourse into mathematical language.

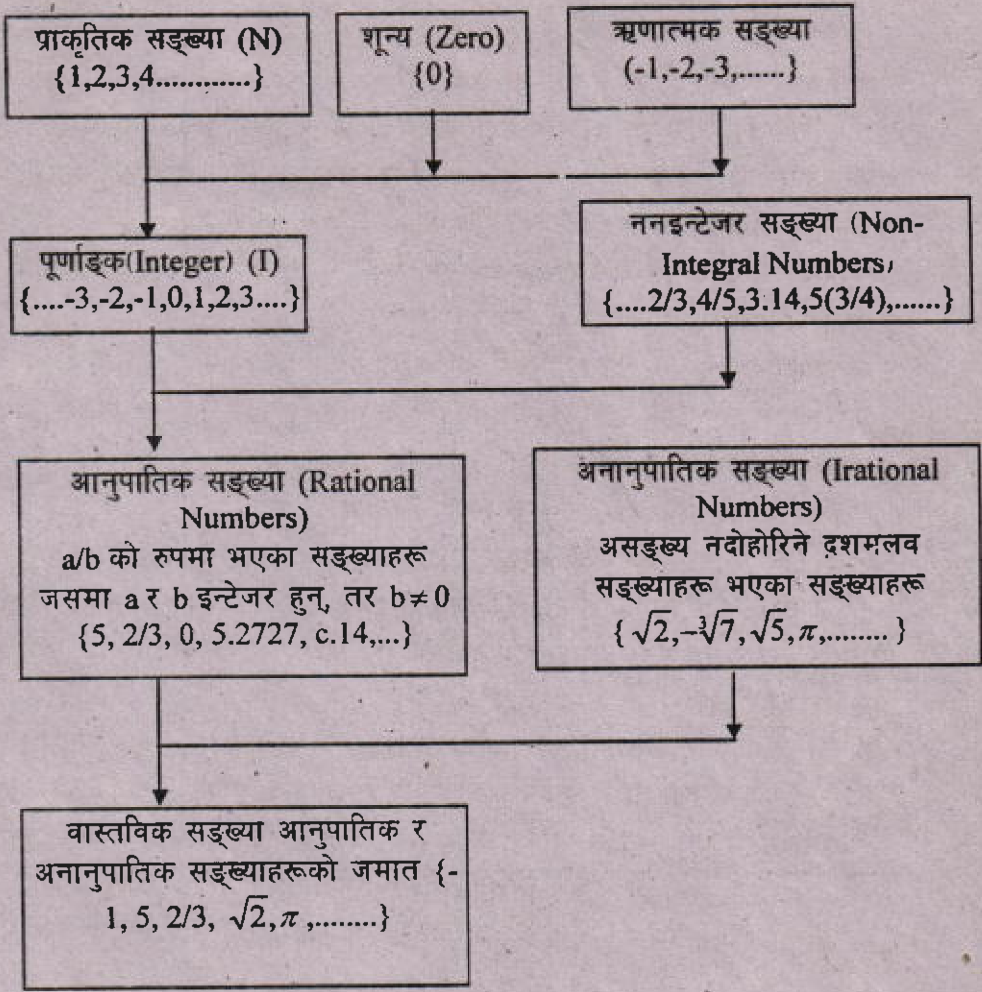
१. परिचय :

बीजगणित शुरुवातको इतिहासलाई हेर्ने हो भने यो हजारौ वर्ष पुरानो पाइन्छ । विद्यालय तहको शिक्षामा यसको प्रयोग हुन थालेको पनि लामो समय भइसकेको छ । गणित विषयको सम्पूर्ण पाठ्यभारको ३०% भन्दा बढी भाग बीजगणितले ओगट्ने गरेको पाइन्छ । बीजगणित क्षेत्रका विषयवस्तुहरूको शिक्षण सिकाइमा एउटा निश्चित ढाँचा हुने, हिसाब गर्ने विधि (Algorithm) को प्रयोग स्पष्ट रूपमा हुने, भाषागत प्रयोगको न्यून महत्व रहने जस्ता विशेषताहरू भएका कारण विद्यार्थीहरूले एकपटक बुझिसकेपछि त्यसलाई केही समयको अन्तरालमा समेत पुनः प्रयोग गर्न सक्दछन् । यस पाठमा बीजीय अभिव्यञ्जक, चल र अचल राशीहरू, अभिव्यञ्जकको मान तथा बीजीय अभिव्यञ्जकहरूका आधारभूत क्रियाहरू (Algebraic expression, Variables and Constants value of expressions and basic operations on algebraic expression) सम्बन्धमा चर्चा गरिने छ ।

२. विषयवस्तु :

२.१ बीजगणित सिकाइको प्रारम्भ (Begining to learn algebra)

बीजगणित अङ्कगणितको सामान्यीकरण गरिएको रूप हो । यो वास्तविक सङ्ख्या पद्धति (Real number system) बाट विकास गरिएको सामन्यीकृत अङ्कगणित (Generalized arithmetic) हो । यसैले बीजगणितले वास्तविक सङ्ख्या पद्धतिमा गरिने आधारभूत क्रियाहरू जोड र गुणनसँग सम्बन्धित गुणहरूको अध्ययन गर्दछ । सङ्ख्या प्रणालीका विस्तृत अध्ययन पहिलेका एकाइहरूमा भइसकेको हुँदा यहाँ त्यसैको केही पुनरावृत्ति मात्र गरिएको छ । विभिन्न सङ्ख्या समूहहरूको सम्बन्धलाई यहाँ प्रस्तुत गरिएको छ ।



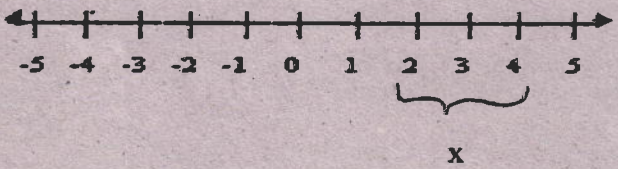
बीजगणितले यिनै विभिन्न सङ्ख्या प्रणालीका प्रकृतिहरूको अध्ययन गर्छ । चाहे हामीले अभिव्यञ्जकको कुरा गरौं, चाहे असमानता र समीकरण सबैमा कार्य समूह (Working set) परिभाषित गरेर मात्रै काम गरिन्छ । बीजगणितले भाष्य अभिव्यक्तिलाई सङ्केतहरूका माध्यमबाट अभिव्यक्त गर्छ । यसर्थ बीजगणित एउटा भाषा पनि हो जसले संसारका वस्तु एवम् घटनाहरूलाई व्यक्त गर्न र समस्याहरूको समाधानको नमूना पनि दिन्छ ।

२.२ चल र अचल (Variables and Constants)

शिक्षक मदन उप्रेतीले कक्षामा बीजगणित पढाउँदै छन् । उनले a लेखिएको बाकसमा केही सङ्ख्यामा चकलेट राखे । विद्यार्थीहरूलाई सोधे कि यो बाकसमा कतिओटा चकलेटहरू छन् ? विद्यार्थीहरूले a ओटा चकलेट छन् भन्ने कुरा बताए । एक जना विद्यार्थीलाई बोलाएर चकलेट गन्न लगाए । गरिसकेपछि a को मान बोर्डमा लेख्न लगाए । यहाँ a ले एउटा निश्चित सङ्ख्याको प्रतिनिधित्व गरेको कुरा बताए ।

उनले कक्षाका विद्यार्थीहरूलाई दुई समूहमा बाँडे र एउटा समूहको विद्यार्थी सङ्ख्यालाई b र अर्को समूहको विद्यार्थी सङ्ख्यालाई c मान्न लगाए । अनि दुईजना विद्यार्थीहरूलाई उठाएर विद्यार्थीहरू गन्न लगाए र विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या कालोपाटीमा लेख्न लगाए । यी उदाहरणहरूमा a, b र c को मान निश्चित एउटामात्र भएको तथ्यामा विद्यार्थीहरूसँग छलफल गरे ।

शिक्षक मदनले एउटा सङ्ख्या रेखामा तलको चित्रमा जस्तै x चिनो लगाए ।



सङ्ख्यारेखामा देखाइएको x को मान पूर्णसङ्ख्यामा कतिकति छन् भनी विद्यार्थीहरूलाई लेख्न लगाउनुभयो । यहाँ x का तीन ओटा मानहरू भएको कुरा विद्यार्थीहरूले बताए ।

उनले एउटा कार्डबोर्डमा तलको चार्ट बनाए । विद्यार्थीहरूलाई y र z का मानहरू लेख्न लगाए ।

1	2	y	y	y	y	7
8	9	10	11	12	13	14
15	z	z	z	19	20	21

यहाँ y का ४ ओटा र z का ३ ओटा मानहरू भएको कुरा विद्यार्थीहरूसँग छलफल भए ।

उनले शब्दपत्तीद्वारा एउटा गणितीय वाक्य $z + 2 < 8$ बनाई बोर्डमा टाँसे । z को मान पूर्णसँख्यामा कतिकति हुन्छ भन्नेबारेमा विद्यार्थीहरूसँग छलफल गरे ।

शिक्षक मदनले माथि निकालिएका a, b, c, र x, y, z का मानहरूमा के फरक छ ? किन ?

यहाँ कुनै अक्षरले एउटा मात्र मान र कुनैले एकभन्दा बढी मानहरूको प्रतिनिधित्व गरेका छन् भन्ने सम्बन्धमा छलफल गराई उनले चल र अचलको धारणा दिए । त्यसैगरी एउटा वर्गको क्षेत्रफलाई A र भुजालाई s ले जनाई सो वर्गको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र लेखी चलको धारणा सम्बन्धमा छलफल गराए । यस प्रकारका चल र अचलसम्बन्धी प्रश्नहरू मौखिक रूपमा पनि सोधे ।

निष्कर्ष: बीजगणित, अंकगणितको सामान्यीकरण (Generalization) हो । यी दुबैमा एउटै नियम, क्रिया , सङ्केत र चिन्हहरू भए पनि बेग्लै तरिकाले व्याख्या वा विश्लेषण गरिन्छ । विद्यार्थीका लागि अंकगणितमा प्राप्त हुने सङ्ख्यात्मक उत्तरले बीजगणितमा प्राप्त हुने सामान्य (General) उत्तरलाई विश्वास गर्न गाह्रो बनाउन सक्छ । बीजगणितमा खास प्रक्रिया, सम्बन्ध

र साधारण मानहरूलाई जोड दिइन्छ । तसर्थ शिक्षकले अंकगणितमा प्रयोग हुने सँख्याको सट्टामा बीजगणितमा अक्षरको प्रयोग गरिन्छ भन्ने धारण दिनु अति आवश्यक हुन्छ ।

२.३ बीजगणितीय अभिव्यञ्जकमा चलराशीको प्रयोग

एउटा भनाइ लिऔं, एउटा आयताकार जमिनको परिमिति लम्बाइ र चौडाइको जोडको दुई गुणा हुन्छ । यो भनाइलाई साङ्केतीकरण गरी आधारभूत गणितीय क्रिया प्रयोग गरेर लेख्दा, परिमिति = p, लम्बाइ = a, चौडाइ = b मान्दा,

$p = 2(a+b) = 2a+2b$ हुन्छ ।

यहाँ $2a+2b$ ले जे अर्थ दिन्छ, त्यो अर्थ अघिको भनाइले दिने अर्थसँग समान/एउटै छ । यो भनाइ $2a+2b$ जुनसुकै किसिमको आयताकार वस्तुको परिमितिका लागि सत्य हुन्छ । यो $2a+2b$ नै बीजगणितीय अभिव्यञ्जक हो ।

यो अभिव्यञ्जकमा p, a र b चल राशी मानिन्छन् । विभिन्न नापका आयातहरूका लागि p, a र b सबै भिन्नभिन्न हुन्छन् । p, a र b ले वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई लिन्छ र यो एकभन्दा बढी वास्तविक सङ्ख्याहरूको स्थानग्राहकको रूपमा रहेको हुन्छ । तर २ अचल हो । यसले एउटा मात्र सङ्ख्या जनाउँछ ।

एउटा मात्र सङ्ख्यात्मक मान लिने सङ्केत वा अङ्क अचल र एकभन्दा बढी सङ्ख्यात्मक मानहरू लिने सङ्केत वा अक्षरहरूलाई चल राशी भनिन्छ ।

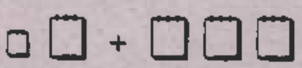
बीजगणितीय अभिव्यञ्जक सङ्केतिक रूप हो जसमा चल, अचल, गणितीय क्रियाहरू जोड, घटाउ, गुणा र भागहरू सम्मिलित भएका हुन्छन् । साथै समूहकृत गर्ने चिन्हहरू जस्तै कोष्ठहरू ( ), { } र [ ] पनि समावेश गरिएको हुन्छ ।

बीजीय अभिव्यञ्जक शिक्षण

बीजगणितीय अभिव्यन्जक एउटा साङ्केतिक रूपमा हुन्छ जसमा चल, अचल र गणितीय क्रियाहरू जोड, घटाउ, गुणन, भाग समावेश गरिएका हुन्छन् । बीजगणितीय अभिव्यञ्जकको धारणा दिनुअघि अङ्कगणितीय अभिव्यञ्जंक लेख्ने क्रियाकलाप गराउनुपर्छ । यसपछि शाब्दिक भनाइ (Verbal satement) का आधारमा बीजगणितीय अभिव्यञ्जक स्पष्ट पार्नका लागि विभिन्न किसिमका उदाहरणहरू दिएर क्रियाकलापहरू गराउन सकिन्छ । बीजगणितलाई व्यवहारिक तरिकाबाट र दैनिक जीवनका क्रियाकलापसँग सम्बन्धित गरेर शिक्षण गर्न सके मात्र सिकाइ अर्थ पूर्ण हुन्छ

शिक्षक मदनले निम्नलिखित उदाहरणबाट छलफल गराए

सीतासँग २ ओटा कापी र हरिसँग ३ ओटा कापी छन् । यसलाई गणितीय भाषामा यसरी लेख्न सकिन्छ



2 ओटा 3 ओटा

अर्थात 2 + 3 ओटा कापीहरू

एउटा कापीको मोल रु 10 र एउटा कलमको मोल रु 8 पर्छ भने 10 ओटा कलम र 10 ओटा कलमको मोल कति ? के x ओटा कापी र y ओटा कलमको मोलका लागि सामान्यीकरण होला ?

1 कापीको मोल रु 10 र 1 कलमको मोल रु 8

2 कापीको मोल रु 2×10 र 2 कलमको मोल रु 2×8

3 कापीको मोल रु 3×10 र 3 कलमको मोल रु 3×8

5 कापीको मोल रु 5×10 र 5 कलमको मोल रु 5×8

10 कापीको मोल रु 10×10 र 10 कलमको मोल रु 10×8

x कापीको मोल रु $x\times 10$ र y कलमको मोल रु $y\times 8$

त्यसैले x कापी र y कलमको मोल रु $10x + 8y$

उनले एउटा बाकसमा a ओटा चकलेटको पोका र अर्को बाकसमा पनि a ओटा चक्लेटका पोका राखेर कति पोका चकलेट भए गन्ती गर्न लगाए ।

$a + a = 2a$

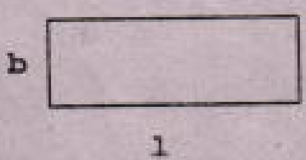
बीजगणितमा पनि विद्यार्थीहरूले अंकगणितमा 15 भन्नाले 10 + 5 भए जस्तै 2a भन्नाले 20 + a को धारणा राख्न सक्छन् । त्यसैले शिक्षकले 2a मा a एकाइ स्थानमा र 2 दस स्थानमा नरही एक अर्काका गुणनका रूपमा रहेको धारणा प्रष्ट पार्न अति आवश्यक हुन्छ ।

शिक्षक मदनले विद्यार्थीहरूलाई निम्नानुसार एउटा गणितीय ट्रिक गराए ।

- आफूलाई मन लागेको कुनै एउटा सङ्ख्या रोज्ने ।
- त्यसमा त्यसपछि लगत्तै आउने ठूलो सङ्ख्या जोड्ने ।
- त्यसमा फेरि 9 जोड्ने ।
- त्यसलाई 2 ले भाग गर्ने ।
- त्यसमा पहिले रोजेको सङ्ख्या घटाउने ।

सबै विद्यार्थीहरूको उत्तर 5 आएको कुरा उनले बताए । त्यसपछि सङ्ख्याको सट्टामा अक्षर x राखेर ती सबै चरण दोहोऱ्याउन लगाए । यसबाट सबैको उत्तर कसरी 5 आउँछ भन्ने कुरा स्पष्ट भयो ।

त्यसैगरी बीज गणितीय अभिव्यञ्जकका अन्य उदाहरणहरू पनि उहाँले प्रस्तुत गर्नुभयो । जस्तै एउटा आयातको परिमिति लम्बाइ र चौडाइको योगको दोब्बर हुन्छ ।



यसलाई पनि बीजगणितीय अभिव्यन्जकका रूपमा विद्यार्थीहरूलाई लेख्दा

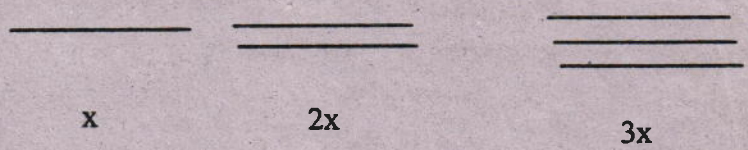
$P = 2(l + b)$ जहाँ l र b आयतका क्रमशः लम्बाइ र चौडाइ हुन् ।

त्यसैगरी सो आयतको क्षेत्रफललाई बीजगणितीय अभिव्यञ्जकका रूपमा लेख्दा

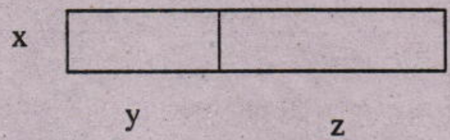
$A = lb$ हुन्छ

बीजगणितीय अभिव्यञ्जकको धारणा दिने अन्य तरिकाहरू पनि हुन सक्छन् । जस्तै केही एकै खाले र केही फरक खाले सिन्काहरू देखाउने र प्रत्येक बराबर नापका सिन्काहरूलाई a,b,c आदि सङ्केतले जनाउन लगाउने र प्रश्न गर्ने जस्तै : a नापका लट्ठीहरू कतिओटा छन् ? b नापका कतिओटा छन् ? यी पमिाणलाई बीजीय रूपमा कसरी लेख्ने ? यस्ता प्रश्नको उत्तर खोज्न र लेख्न लगाउने ।

जस्तै :

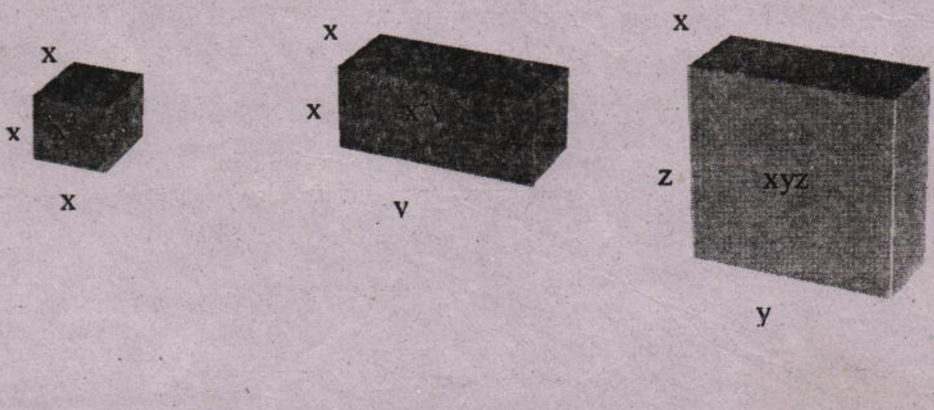


केही एउटै नापका वर्गाकार, आयताकार तथा लम्बाइमात्र भएका कागजका टुक्राहरूको विभिन्न समूह देखाउँदै बीजीय रूपमा लेख्न लगाउन सकिन्छ जस्तै :



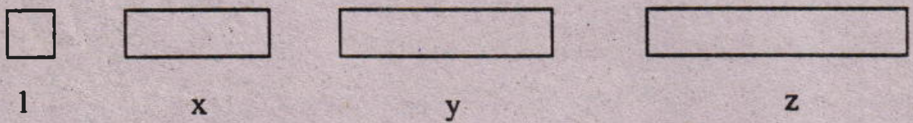
$x(y + z) = xy + xz$

घनाकार बट्टाहरूको प्रयोग गरेर x^3, x^2y, xyz आदि पनि देखाउन सकिन्छ ।

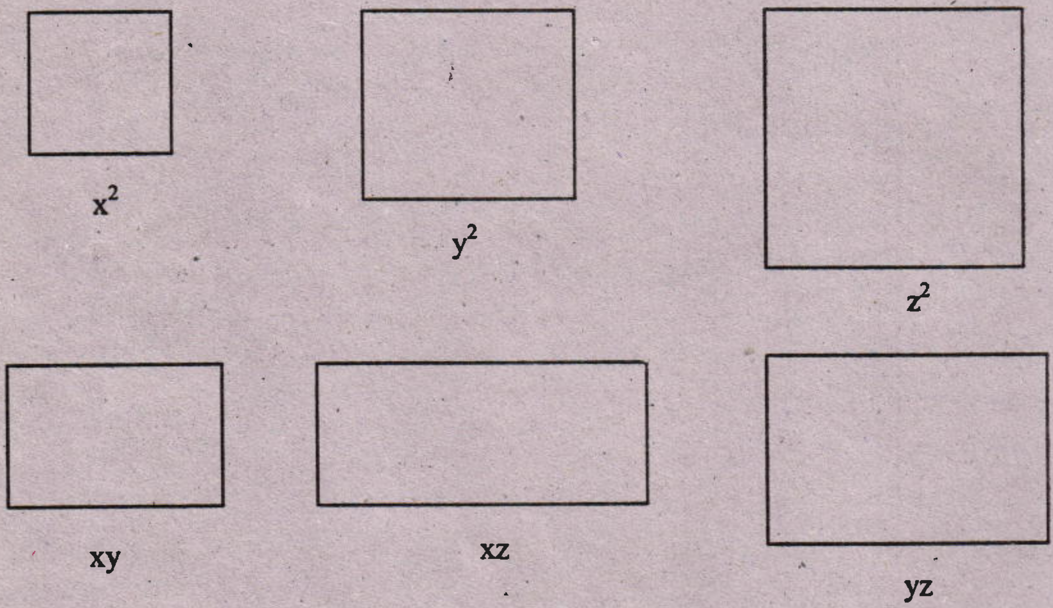


२.४ बीजगणितीय पत्तीहरूको प्रयोगबाट बीजगणितीय अभिव्यञ्जकको जोड, घटाउ र गुणन शिक्षण

बीजगणितीय पत्तीहरू प्रयोग गरी बीजगणित शिक्षणलाई प्रभावकारी बनाउन सकिन्छ । यसका लागि कार्डबोर्ड , रुलर, पेन्सिल, साइनपेन, कैंची इत्यादि सामग्रीहरू आवश्यक पर्दछ । सर्वप्रथम कार्डबोर्ड पेपरहरूबाट निम्नबमोजिमका पत्तीहरू तयार पार्न सकिन्छ ।
($x = 2$ इन्च वा सोभन्दा बढी, $y = 3$ इन्च वा सोभन्दा बढी, $z = 4$ इन्च वा सोभन्दा बढी)



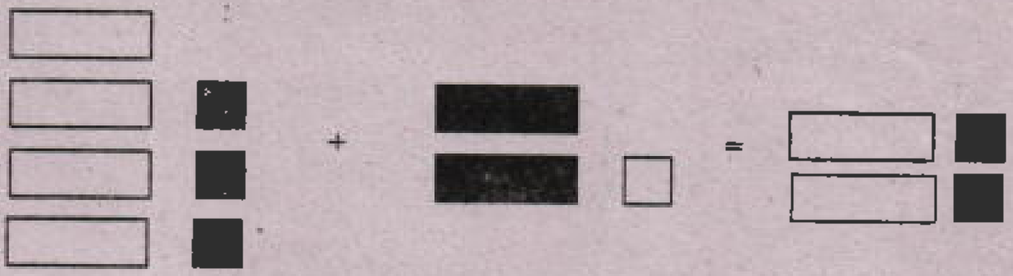
(सबै पत्तीहरूका चौडाइ १ एकाइ छन् ।)



यी पत्तीहरूलाई एकापट्टि सेतो नै छोडेर अर्कोपट्टि कालो रङ् लगाउनु पर्दछ । सेतोपट्टिका भागले धनात्मक र कालोपट्टिका भागले ऋणात्मक जनाउँछ । यी पत्तीहरू एकभन्दा बढी सङ्ख्यामा बनाउन लगाउनु पर्दछ । यी पत्तीहरूको प्रयोगसम्बन्धी उदाहरणहरू यसप्रकार छन् ।

अभिव्यन्जकहरूको जोड/घटाउ

$(4x - 3) + (-2x + 1) = ?$

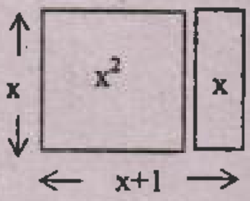


यसैगरी $(3x^2 + 2x - 1) - (2x^2 - x + 3) = ?$ जस्ता अभिव्यन्जकहरूको सरलीकरणको धारणा पनि यी बीजगणितीय पत्तीहरूको माध्यमबाट दिन सकिन्छ ।

अभिव्यन्जकहरूको गुणन

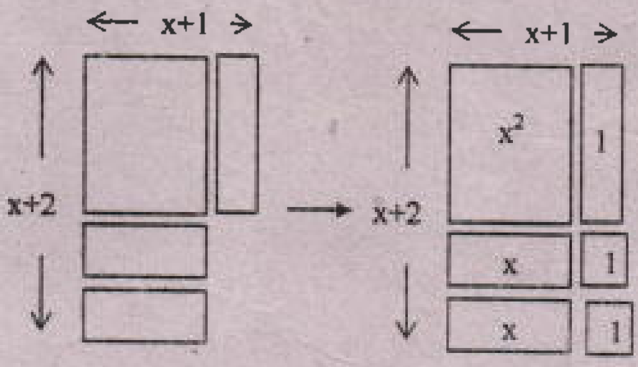
$x(x + 1) = ?$

माथि निर्माण गरिएका पत्तीहरूमध्येबाट मिलाएर एउटा साइड x र अर्को साइड x + 1 भएको आयात कसरी बनाउन सकिन्छ, र आयात बनेपछि सो आयातको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? विद्यार्थीहरूलाई सोच्न/पत्तालगाउन दिनुपर्छ ।



$(x + 1)(x + 2) = ?$

पत्तीहरू मिलाएर एउटा साइड (x + 1) र अर्को साइड (x + 2) भएको आयात बनेपछि सो आयातको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? विद्यार्थीहरूलाई सोच्न दिनुपर्छ ।



यी बीजगणितीय पत्तीहरूको सहायताबाट $(a + b)^2 = ?$, $a^2 - b^2 = ?$ $(a - b)^2 = ?$ जस्ता सूत्रहरू निकाल्ने तरिका पनि सजिलै सिकाउन सकिन्छ ।

२.५ अभिव्यञ्जकहरूको समता (Equality of expressions) :

समता (बराबर) को अर्थ तार्किक सर्वसमिका (Logical identity) हो । दुईओटा अभिव्यञ्जक जुनसुकै अवस्थामा पनि एउटै हो भन्ने अर्थमा मात्र (=) सङ्केत प्रयोग गरिन्छ । दुईओटा अभिव्यञ्जकलाई बराबरी सङ्केतले जोडेमा त्यो बिजीय समीकरण (Algebraic equation) वा सर्वसमिका (Algebraic identity) हुन्छ । तलका दुई उदाहरण हेरौं :

i. $3x+5 = (2x+3)+(x+2)$

ii. $2x+3 = 7$

यी दुईमा फरक छ, (i) मा x को जुनसुकै वास्तविक सङ्ख्याहरू राखेमा पनि सङ्ख्यात्मक मान बराबर आउँछ, तर (ii) मा x को मान २ हुँदा मात्र बराबरी तथ्यलाई मान्य गर्छ । यस्तो किन हुन्छ ? पहिलो अर्थात् (i) को गणितीय भनाइ सर्वसमिका (Identity) हो, र (ii) को समीकरण हो । यो प्रस्तुतिपछि मात्र विद्यार्थीहरूलाई सर्वसमिका र समीकरणको परिभाषा गराउन सकिन्छ ।

समानताका गुणहरू (Properties of equality)

a, b र c तीनओटा वस्तुहरू हुन् भने

i. a = a हुन्छ, (Reflective property)

ii. यदि a = b, छ भने b = a हुन्छ (Symetric property)

iii. यदि a = b र b = c छ भने a = c हुन्छ, (Transitive property)

iv. यदि a = b, छ भने दुवैमध्ये कुनै एकलाई कुनै पनि अभिव्यञ्जकमा प्रतिस्थापन गर्न सकिन्छ र यसबाट गणितीय वाक्यको सत्यतामा कुनै फरक पर्दैन (Substitution principle)

यी माथिका नियमहरूलाई अभिव्यञ्जक र समीकरण हल गर्ने काममा प्रयोग गरिरहेका हुन्छौं । यो कुराको अनुभव विद्यार्थीहरूले काम गर्दा मात्र लिन सक्छन् । तसर्थ रहेक समस्याको समाधान गर्ने बेला कुन नियम किन प्रयोग भएको भन्ने अर्थ बुझ्नु जरुरी हुन्छ । जस्तै एउटा समस्या लिऔं,

यदि a = 2, र b = 4 छ भने अभिव्यञ्जक 4b -3a को मान निकाल्नुहोस् ।

यो समाधान गर्न 4b - 3a मा b र a को मान प्रतिस्थापन गरी उत्तर निकाल्न लगाइन्छ । तर किन यसरी गरेको भन्ने प्रश्नको उत्तर विद्यार्थीहरूले दिन सक्दैनन् । यहाँ माथिको नियम ii. र iv प्रयोग भएको छ ।

२.६ वास्तविक सङ्ख्या र बीजगणितका नियमहरू (Real numbers and Rules of algebra)

माथि हामीले विजीय अभिव्यञ्जकको मान निकाल्ने बारेमा छलफल गऱ्यौ । बीजगणितमा यी कुराहरूको प्रयोगले मात्र यसको उपयोगिता देखिदैन । सबैभन्दा महत्वपूर्ण सीप त अभिव्यञ्जकहरूलाई बराबरी बनाउने र समीकरण हल गर्ने कार्य हुन् । यी कार्यका लागि केही स्वयम्सिद्ध तथ्यहरू आवश्यक पर्दछन् । वास्तविक सङ्ख्याहरूका लागि केही स्वयम्सिद्ध तथ्यहरू यहाँ उल्लेख गरिन्छ । यिनै तथ्यका आधारमा "बीजगणितका खेलहरू" चल्छन् ।

आधारभूत (क्षेत्र) गुणहरू :

यी गुणहरू जोड र गुणन क्रियाका लागि लागू हुन्छन् र यी गुणहरू वास्तविक सङ्ख्या प्रणालीमा जोड र गुणन क्रियामा संरक्षित हुनाले वास्तविक सङ्ख्यालाई क्षेत्र (Field) भनिन्छ । यी क्षेत्र गुणहरू (Field property) अङ्कगणितमा शुरुका कक्षाहरूदेखि नै प्रयोगमा आएका हुन्छन् । अङ्कगणित आफैमा क्षेत्र गुणहरू (Field property) का आधारमा सञ्चालित हुने गणितीय विद्या हो ।

वास्तविक सङ्ख्याका आधारभूत गुणहरू :

तीन वास्तविक सङ्ख्याहरू a, b, र c छन् भने

जोडका गुणहरू :

वन्धनी गुण (Closure property)

a+b ले एक अद्वितीय वास्तविक सङ्ख्या दिन्छ ।

क्रमविनियम गुण (Commutative property)

$a+b = b+a$ हुन्छ ।

सङ्घीय गुण (Associative Property)

$(a + b) + c = a + (b + c)$ हुन्छ ।

एकात्मक गुण (Identity property)

$0 + a = a + 0 = a$ हुन्छ । यहाँ 0 जोडको एकात्मक वास्तविक सङ्ख्या हो ।

विपरीत गुण (Inverse property)

कुनै वास्तविक सङ्ख्या a का लागि अर्को एउटा वास्तविक सङ्ख्या -a हुन्छ, जहाँ $a + (-a) = 0$ हुन्छ । अर्थात् $a + (-a) = 0$ हुन्छ भने a र -a एका अर्काका लागि विपरीत (Inverse) सङ्ख्या हुन् ।

गुणन क्रियाका गुणहरू :

वन्धनी गुण (Closure property)

ab ले एक अद्वितीय वास्तविक सङ्ख्या दिन्छ ।

क्रमविनिमय गुण (Commutative property)

ab = ba हुन्छ ।

सङ्घीय गुण (Associative property)

(ab)c = b(ca) हुन्छ ।

एकात्मक गुण (Identity property)

$a\times1=1\times a=a$, यहाँ 1 लाई गुणक Identity सङ्ख्या भनिन्छ ।

विपरीत गुण (Inverse property)

कुनै वास्तविक सङ्ख्या a का लागि अर्को एक सङ्ख्या $\frac{1}{a}$ हुन्छ, जहाँ $a\times\frac{1}{a}=1$ हुन्छ । यो अवस्थामा a र 1/a एकअर्काका लागि गुणक Identity सङ्ख्या हुन्छन् ।

पद विच्छेदक / वितरण गुण (Distributive property)

जोड र गुणन क्रियालाई सङ्युक्त रूपमा प्रयोग भएर बनेको गुण वास्तविक सङ्ख्या पद्धतिमा हुन्छ । यो गुणअनुसार गुणन क्रियालाई दुई वास्तविक सङ्ख्याहरूको जोडमा वितरण गरिएको हुन्छ ।

यहाँ, a,b,c तीनओटा वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् भने

a (b+c) = ab + ca हुन्छ ।

अथवा, (b+c) a = ab + ca हुन्छ ।

अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण क्रिया गर्दा र दुईओटा अभिव्यञ्जकहरूबीचको गुणन क्रियामा यो गुण प्रयोग गरिन्छ । साथै समीकरण वा असमानताको हल गर्ने, वा अभिव्यञ्जकका सरलीकरण क्रियामा पनि यी माथि उल्लेख गरिएका गुणहरू प्रयोग गरिन्छ । यी माथिका सबै गुणहरू (जोड र गुणन क्रिया) मान्य हुने सङ्ख्या समूहमा वास्तविक सङ्ख्या पर्छ र वास्तविक सङ्ख्यालाई क्षेत्र (Field) भन्ने गरिन्छ ।

अन्य कुनकुन सङ्ख्या समूहहरूमा यी गुणहरू मान्य हुन्छन् ? के घटाउ र भाग क्रियाका लागि पनि यी गुणहरू मान्य हुन्छन् ?

क्षेत्र गुणहरूको प्रयोग

तपाईंको विद्यार्थीले सोधे, $-3\times-9 = -27$ किन भएन ? यसको जवाफ कसरी दिनुहुन्छ ? के माथि छलफल गरिएका क्षेत्र गुणहरू यो प्रश्नको समाधान दिन उपयुक्त हुन्छन् ?

यस्ता प्रश्नहरूको समाधान गर्न धनात्मक र ऋणात्मक सङ्ख्याहरूको क्रियामा ध्यान दिनुपर्छ ।

+5 + (+3) = +8	किन ? कसरी ?
-5 + (-3) = -8	किन ? कसरी ?
+5 + (-3) = +2	किन ? कसरी ?
-5+ (+3) = -2	किन ? कसरी ?

$+5 \times (+3) = +15$ किन ? कसरी ?

$+5 \times (-3) = -15$ किन ? कसरी ?

$-5 \times (-3) = +15$ किन ? कसरी ?

तलको सङ्ख्याहरूबिचको क्रियाको ढाँचा हेर्नुहोस् र खाली ठाउँ पूरा गर्नुहोस् ।

(क)

$5 \times 3 = 15$

$5 \times 2 = 10$

$5 \times 1 = 5$

$5 \times 0 = ?$

$5 \times -1 = ?$

$5 \times -2 = ?$

> तपाईंसँग अग्रिम भएको धारणा + ले - लाई गुन्दा - हुन्छ भन्ने कुरालाई विर्सेर, नतिजामा आएको सङ्ख्याको ढाँचालाई विचार गरी "?" चिन्ह भएको ठाउँमा लेख्नुहोस् ।

(ख)

$-5 \times 3 = ?$

$-5 \times 2 = ?$

$-5 \times 1 = ?$

$-5 \times 0 = ?$

$-5 \times -1 = ?$

$(+2).(-7)=?$

> ढाँचाबाट नै नतिजा लेख्नुहोस् । यी ढाँचाहरूमा सङ्ख्या भर्नुभएमा - × - = + किन हुन्छ भन्ने जवाफ वा - × - = - किन हुन्न भन्ने जवाफ विद्यार्थीका लागि चित्त बुझ्ने रुपमा दिन सकिन्छ

माथिको दुईओटा सङ्ख्याहरूको गुणनफलमा कुन सङ्ख्या राख्ने भन्ने समस्या समाधान गर्न क्षेत्र गुणलाई प्रयोगमा ल्याउनु पर्छ । यसका लागि सर्वप्रथम $a.0 = 0$ लाई मान्नु पर्छ ।

$(+7) + (-7) = 0$ जोड क्रियामा विपरीत गुण

$+2\{(+7)+(-7)\} = 0$ बराबरी तथ्य

$(+2) \times (+7) + (+2) \times (-7) = 0$ पद विच्छेदक गुण

$14 + (+2).(-7) = 0$ प्रतिस्थापन गुण $\{(+2) \times (+7) = 14\}$

$-14 + 14 + (+2).(-7) = -14 + 0$ बराबरी तथ्य

$(+2).(-7) = -14$ किन ?

यसरी नै अरु क्रियाहरूमा पनि विचार गर्नुहोस् ।

विचार गर्नुहोस् ।

$i) \frac{0}{a} = 0$

$ii) \frac{a}{0} = ?$

$iii) \frac{0}{0} = ?$

(दुई सङ्ख्या a र b मा a|b (a ले b लाई भाग जान्छ), यदि त्यहाँ अर्को सङ्ख्या c हुन्छ र b = a.c हुन्छ) ।

वास्तविक सङ्ख्या a ले सङ्ख्या b लाई ठ्याक्कै भाग जानुको अर्थ अर्को एउटा अद्वितीय वास्तविक सङ्ख्या c को लागि b = a.c हुन्छ । यही परिभाषाअनुसार,

$\frac{0}{a}$ को अर्थ a|0 हो र यहाँ कुनै अद्वितीय वास्तविक सङ्ख्या c खोज्नुपर्छ जहाँ 0 =a.c मान्य हुनुपर्छ । तर c को मान 0 बाहेक अन्य अवस्थामा a.c को गुणनफल 0 हुन सक्दैन । तसर्थ,

$\frac{0}{a} = 0$ हुन्छ ।

तर

$\frac{a}{0} = ?$

0|a, यदि a = 0.c हुन्छ । तर a.0 = 0 हुने हुँदा माथिको समानता मान्य हुँदैन । त्यसैले 0|a अनिश्चित हुन्छ ।

२.७ बहुपदीय (Polynomials) :

बीजगणितमा बहुपदीयको कुरा गर्नुअघि घाताङ्कसम्बन्धी नियमहरू र अभिव्यञ्जक बारे जान्नु जरुरी हुन्छ । बहुपदीय पनि विजीय अभिव्यञ्जकहरू नै हुन् । तलका उदाहरण हेरौं :

i. x,

ii. $3x^2$

iii. 2x-1

iv. $3x^2+2x-5$

v. $\frac{2x-7}{3x+y}$

vi. $x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$

(i) देखि (iv) सम्मका उदाहरण बहुपदीय (Polynomial) हुन् तर (v) र (vi) होइनन् । सरसर्ती हेर्दा (v) र (vi) मा पनि पदहरू छन् । यसका लागि यी दुई समूहका अभिव्यञ्जकहरूले लिएका गुणहरूलाई केलाउनु पर्छ ।

(i) देखि (iv) सम्मका अभिव्यञ्जकहरूको जोड, घटाउ र गुणन क्रियाहरूले चलहरू र अचलबीचमा सम्बन्ध स्थापित गरेर बनेका छन् तर (v) र (vi) मा यीभन्दा बाहेक क्रियाहरू पनि छन् ।

यी गुणहरूका आधारमा विद्यार्थीहरूलाई बहुपदीयको परिभाषा र तिनीहरूको प्रकार छुट्याउन लगाउन सकिन्छ ।

२.८ घाताङ्क

म विद्यालयबाट घर फर्कंदै थिएँ । दुईजना विद्यार्थीहरूले मलाई भेटेर $2x$ र x^2 को बारेमा छलफल गर्न चाहे । गणित पढाउने सरले $2x$ र x^2 भनेको एउटै होइन फरक हो भन्नुभयो । यी दुई कसरी फरक भए होला ? विद्यार्थीहरूको जिज्ञासा थियो । मैले ती विद्यार्थीहरूको जिज्ञासा शान्त गर्न यसरी उदाहरण दिन थालेँ :

तिमीहरूलाई जोड र गुणन त राम्ररी आउँछ नि ?

$2+2$ कति हुन्छ ? 4

2×2 कति हुन्छ ? 4

यदि $2=x$ भए माथिको समस्यालाई यसरी लेख्नु पऱ्यो :

$x+x$ कति हुन्छ ?

$x\times x$ कति हुन्छ ?

यसको उत्तर भन्न सक्छौ ?

उनीहरूले भने हाम्रो सरले $x+x=2x$ हुन्छ र $x\times x=x^2$ हुन्छ भनेर सिकाउनु त भयो तर कसरी भयो त्योचाहि हामीले बुझेनौं ।

ल हेर त ?

$3+3$ कति हुन्छ ? 6

3×3 कति हुन्छ ? 9

यदि $3 = x$ भए माथिको समस्यालाई यसरी लेख्नु पऱ्यो :

$x+x = 2x = 2\times(3) = 6$ हुन्छ ?

$x\times x = x^2 = (3)^2 = 9$ हुन्छ ?

त्यस्तै,

$4+4 = 8 = 2\times(4)$

$4\times4 = 16 = (4)^2$

केही फरक थाहा पायौ ? अलिअलि त थाहा भयो तर अझ राम्ररी बुझ्न सकिएन सर । मैले नजिकैको एउटा झाड्बाट केही मसिना हाँगा भाँचेर त्यसबाट एकै नापका ससाना सिन्काहरूको एक मुठो बनाएँ । ती सिन्काहरूको प्रयोग गरेर देखाउँदै भने - “अब फेरि हेर त” !

$x \quad + \quad x \quad$ = दुईओटा x भयो ।

$x \quad + \quad x \quad + \quad x \quad$ = तीनओटा x भयो ।

यो त राम्ररी नै बुझियो । अब $x \times x = x^2$;DaGwL उदाहरण हेरौं न त ।

$x \quad + \quad x \quad = 2 \times x$

$x \quad + \quad x \quad + \quad x \quad = 3 \times x$

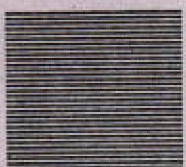
....

....

....

$x \quad + \quad x \quad + \quad .... \quad + \quad x \quad = x \times x$

x

x  x

x

$= x^2$

ओहो ! अब भने हामीले बुझयौं । 2x भनेको 2 ओटा x हुँदोरहेछ तर x^2 भनेको चाहि x ओटा नै x राखेमा x^2 हुँदोरहेछ ।

एकाएक मेरो मनमा घाताङ्क (Indices) का नियमहरू सम्झनामा आए । आफूले अध्ययन गर्दा “a बराबरका m ओटा खण्डहरूको गुणन गर्दा a^m हुन्छ” भन्ने पढेको आफूलाई थाहा छ । अब घाताङ्कसम्बन्धी नियम र तथ्यहरू जस्तै : $a^m \times a^n = a^{m+n}$ हुन्छ भन्ने कुराको धारणा विद्यार्थीहरूलाई कसरी अर्थपूर्ण रूपमा दिने, यसै विषयमा म मेरा केही उदाहरण यहाँ सम्झदैछु । जस्तै :

$a^2=a.a$

$a^3=a.a.a$

....

....

$a^m=a.a$.......................m ओटा a हरू ।

$a^n=a.a$.......................n ओटा a हरू ।

त्यसैले, $a^m \times a^n$ = (a.a........m ओटा a हरू)× (a.a........n ओटा a हरू)

=(a.a........(m+n) ओटा a हरू)

$=a^{m+n}$

त्यसैगरी,

$a^m \times a^n \times a^b = a^{m+n} \times a^b = a^{m+n+b}$

यस्तै प्रकारका विभिन्न उदाहरणहरूको प्रयोग गरेर देखाउँदा के विद्यार्थीहरूले बुझदछन् त ? थप अभ्यास गराउने सन्दर्भमा प्रयोग भएका केही उदाहरणहरू निम्नअनुसार थिए :

क) $(a^m)^n = a^m.a^m.\ a^m$........ n ओटा

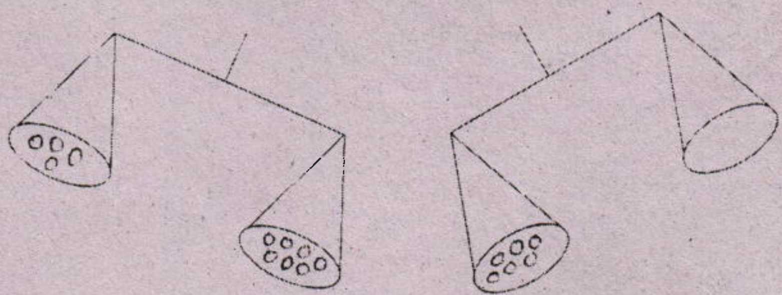
$=a^{m+m+m+\ldots\ldots\ n\ \text{ओटा}}$

$=a^{mn}$

ख) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, किनकि $a^{m-n} \times a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$

२.९ समीकरण

शिक्षक मदनले समीकरण शिक्षण गर्नुअघि बराबरी चिन्हको प्रयोग बारे छलफल गराउनुभयो । उहाँले तराजुको प्रयोगबाट निम्नलिखित उदाहरणहरू दिनुभयो ।



4 + □ = 7 4 +2 = □

पहिलो तराजुको दायाँतिर ७ ओटा गुच्चाहरूसँग बराबर हुनलाई बाँयातिर कति ओटा गुच्चा थप्नुपर्ला ? दोस्रो तराजुमा पहिलो पटक ४ ओटा र फेरि २ ओटा गुच्चा बाँयातिर राख्दा

दायाँतिर कति ओटा गुच्चा राख्नुपर्ला ? यस्तै विभिन्न उदाहरणहरू लिई तराजुको प्रयोगबाट बराबर चिन्हको प्रयोगसम्बन्धी धारणा स्पष्ट पार्नुभयो ।

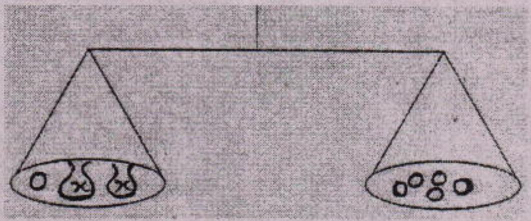
त्यसपछि उहाँले तराजुको प्रयोगबाट समीकरण हल गर्ने तरिकाबारे छलफल गर्नुभयो ।

जस्तै :

$2x + 1 = 5$

तराजुको एकातिर ५ ओटा गुच्चाहरू र अर्कोतिर

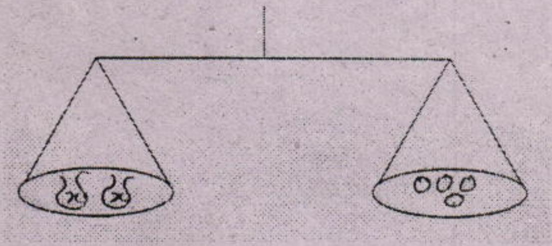
एउटा गुच्चा / गुच्चाका दुईओटा थैली राखेर तराजुलाई सन्तुलनमा ल्याउनुभयो ।



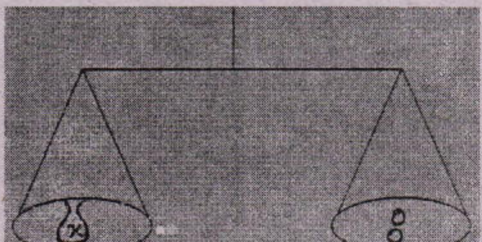
प्रत्येक थैलीभित्र कतिकतिओटा गुच्चा छन् भनी प्रश्न गर्नुभयो । तराजुको दुवैतिरबाट बराबर सङ्ख्यामा गुच्चाहरू विद्यार्थीलाई बोलाएर झिक्न लगाउनुभयो । त्यसलाई बोर्डमा लेख्नुभयो ।

$2x + 1 - 1 - 5 - 1$

$2x = 4$



बाँकी रहेका गुच्चाका पोका र गुच्चाहरूलाई दुई बराबर समूहमा बाँडेर दुवैतिरबाट एक एक समूह झिक्न लगाउनुभयो । त्यसलाई बोर्डमा लेख्नुभयो ।



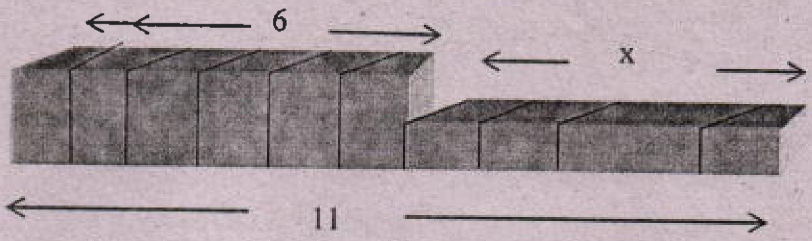
$$\frac{2x}{4} = \frac{4}{2}$$

$x = 2$

यस प्रकारका अन्य विभिन्न उदाहरणहरू प्रस्तुत गरी तराजुको माध्यमबाट समीकरण हल गर्ने तरिकाका बारेमा स्पष्ट पार्नुभयो ।

त्यसैगरी कुइजनाएर रड प्रयोग गरेर पनि समीकरणको हल गर्ने तरिका सम्बन्ध छलफ़ल गर्नुभयो ।

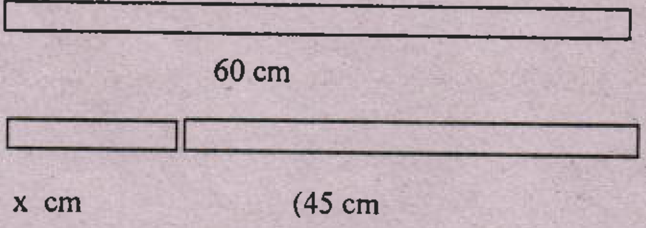
$x + 6 = 11$



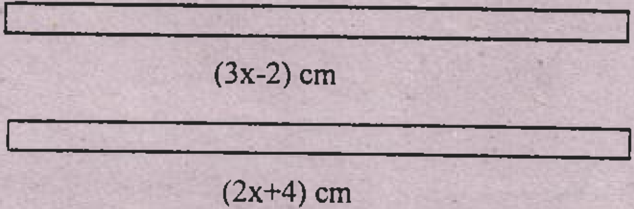
यी रडहरूको प्रयोगबाट विद्यार्थीहरूले सजिलैसँग समीकरणका धारणा सम्बन्धमा परिचित हुन्छन् ।

उहाँले लट्ठीहरू प्रयोग गरेर पनि समीकरणको धारणा दिनुभयो । यी लट्ठीहरूमध्ये पहिलो लट्ठीको लम्बाइ दोस्रो र

तेस्रोको जोडसँग बराबर छ । पहिलो लट्ठीको लम्बाइ 60 cm , दोस्रोको 45 cm र तेस्रोको x cm भए x को मान कति होला ? यसको उत्तरक. लागि उहाँले विद्यार्थीहरूलाई लट्ठीहरू चलाउन दिनुभयो । यसबाट समीकरण बनाएर x को पत्तालगाउन दिनुभयो ।



उहाँले लट्ठीको प्रयोगसम्बन्धी अन्य उदाहरणहरू पनि प्रस्तुत गरी विद्यार्थीहरूलाई समीकरणको धारणा दिनुभयो । जस्तै बराबर नापका दुईओटा लट्ठीहरूको लम्बाइलाई क्रमश: 3x-2 र 2x+4 को रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ भने x को मान कति होला ?



उहाँले निम्न कथालाई गणितीय भाषामा लेखेर उत्तर निकाल्न लगाउनुभयो । "मैले पसलमा गएर तीनपोका विस्कुट किनेको थिएँ । बाटोमा फर्कदा एकपोका खोली ५ ओटा विस्कुट खाएँ । घर पुगेपछि बाँकी सबै विस्कुट प्लेटमा खन्याउँदा जम्मा २२ ओटा विस्कुट रहेछन् भने एकपोकामा कतिओटा विस्कुट रहेछन् ?"

विद्यार्थीहरूले निम्नानुसार लेख्दै गए :

एकपोकामा कति विस्कुट छ थाहा नभएको यसलाई x मानौं ।

तीनपोका विस्कुट किनेकाले 3x

५ ओटा विस्कुट खाएकाले 3x-5

बाँकी विस्कुट गन्दा २२ ओटा भएकोले 3x-5 =22

यसबाट एकपोकामा भएको विस्कुट x =9

उहाँले यसप्रकारका विभिन्न कथाहरू बनाएर समीकरणको रूपमा प्रस्तुत गरी समीकरणको धारणा प्रष्ट पार्नुभयो ।

त्यसपछि विभिन्न शाब्दिक समस्याहरू दिएर विद्यार्थीहरूलाई समीकरण बनाई हल गर्न लगाउनुभयो ।

२.१० समीकरणका शाब्दिक समस्या र तिनको समाधान

माथिको शीर्षकमा शिक्षण गर्ने क्रममा मैले निम्न केही उदाहरणहरू बनाएँ र सोको समाधानका लागि कक्षामा विद्यार्थीहरूसँग अन्तरक्रिया गरें ।

उदाहरण १

चार वर्षअघि मेरो छिमेकी कृष्णको नातिको उमेर उनको उमेरको $\frac{1}{13}$ गुणा थियो । चार वर्षपछि नातिको उमेर कृष्णको उमेरको $\frac{1}{6}$ गुणा हुन्छ भने अहिले कृष्ण र उनको नातीको उमेर कतिकति होला ?

उदाहरण २

दुई सङ्ख्याले बनेको एउटा सङ्ख्या छ जसमा अङ्कहरूको योगफल त्यो सङ्ख्याको $\frac{1}{7}$ गुणा हुन्छ । यदि त्यो सङ्ख्याका अङ्कहरूको स्थान उल्ट्याउने हो भने त्यो नयाँ सङ्ख्या पहिलेको भन्दा 18 अङ्कले कम हुन्छ भने त्यो सङ्ख्या कुन हो ?

उदाहरण ३

मसँग भएको केही रूपैयाँमध्ये $\frac{1}{2}$ भाग छोरीलाई दिएँ । बाँकी रकममा फेरि रु ३०० थपेर त्यसको $\frac{1}{5}$ भाग छोरालाई दिएँ । बाँकीको $\frac{1}{2}$ खर्च गर्दा अन्तमा मसँग रु ६५० बाँकी रह्यो भने सुरुमा मसँग कति रूपैया थियो ?

यी माथिका समस्याहरूको समाधान गर्न कुन गणितीय क्षेत्रको सहायता लिँदा बढी उपयुक्त हुन्छ, भन्ने प्रश्न गर्दै बीजगणित क्षेत्रका आधारमा शाब्दिक समस्यालाई गणितीय वाक्यमा लेख्न विद्यार्थीहरूलाई प्रेरित गर्दै मैले पनि साथ साथै गर्दै देखाएँ -

माथिको उदाहरणबाट :

यहाँ,

कृष्णको अहिलेको उमेर = x वर्ष र

उनको नातिको अहिलेको उमेर = y वर्ष भए, प्रश्नअनुसार,

$y-4=\frac{1}{13}(x-4)$....................(i)

$y+4=\frac{1}{6}(x+4)$....................(ii)

दोस्रो उदाहरण (२) बाट-

यहाँ,

आवश्यक सङ्ख्या $=10x+y$, भए प्रश्नअनुसार,

$x+y=\frac{1}{7}(10x+y)$........................(i)

$10y+x=(10x+y)-18$...................(ii)

यस्तै प्रकारका विभिन्न उदाहरणहरू बनाई त्यसलाई गणितीय भाषामा व्यक्त गर्ने अभ्यास गराएँ र उनीहरू स्वयम्लाई पनि यस्ता शाब्दिक समस्याहरू बनाउन र त्यसलाई गणितीय वाक्यमा लेख्न प्रोत्साहित गर्दै अभ्यास गराएँ ।

२.११ असमानताहरू (Inequations)

रेखीय असमानता :

सङ्ख्या वा वस्तुहरू सधैं बराबर पाईंदैनन् । ठूला वा साना पनि हुन्छन् । उदाहरणका लागि सङ्ख्या रेखामा दायाँतिरको (वा माथितिरको) सङ्ख्या बायाँतिरको (वा तलतिरको) सङ्ख्या भन्दा जहिले पनि ठूलो हुन्छ । दाजुको उमेर भाइको भन्दा जहिले पनि बढी हुन्छ । यस प्रकारका उदाहरणहरू थुप्रै पाइन्छन् । गणितीय सङ्केतहरू $\geq$, $\leq$, $<$ वा $>$ प्रयोग भएको घटी

वा बढी (ठूलो वा सानो) जनाउने गणितीय वाक्यलाई नै असमानता भनिन्छ । यदि घाताङ्क एक मात्र भएको चल वा चलहरू प्रयोग भएको असमानता छ भने त्यो रेखीय असमानता हुन्छ ।

एउटा विज्ञापन यसरी दिइएको छ ।

उमेर २० देखि ४० वर्षको, B.Ed. उत्तीर्ण र कम्तीमा ५ वर्षको शिक्षण अनुभव भएको एक गणित शिक्षक चाहिएको छ ।

यदि उमेरलाई x ले र अनुभवलाई y ले जनाउने हो भने गणितीय भाषा यसरी लेख्न सकिन्छ :

$20 \leq x \leq 40$, $y \geq 5$

बिना SLC परीक्षामा गणित विषयमा पास भइन् । उनले गणितमा z अङ्क प्राप्त गरेकी छिन् । यहाँ बिनाले प्राप्त गरेको अङ्कलाई यसरी व्यक्त गर्न सकिन्छ :

$z \leq 32$

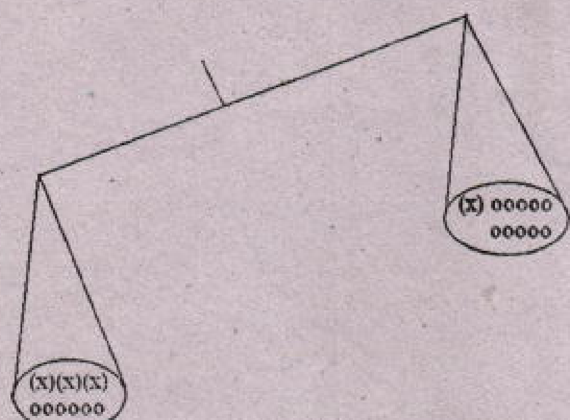
असमनाता सधै परिस्थितिमा भर पर्छ । जस्तै : मसँग रु. ७० छ । यदि एउटा कापीको मूल्य रु. १५ पर्छ भने म कापीहरू कतिओटासम्म किन्न सक्छु ? यसलाई असमानतामा यसरी व्यक्त गरिन्छ :

$0 \leq n \leq 4$, जहाँ, n ले कापीको सङ्ख्या जनाउँछ ।

माथि दिइएका असमानताहरू सबै रेखीय असमानताहरू हुन् ।

एक चलयुक्त रेखीय असमानताको हल

तराजुबाट पनि असमानतालाई जनाउन सकिन्छ ।



माथि दिइएको तराजुबाट जनाइएको असमानता 3x+6>x+10 हो । अब दुवैतिरबाट 6/6 ओटा गुच्चा झिक्दा पनि तराजुको ढल्काइ उही हुन्छ । फेरि दुवैतिरबाट x ओटा गुच्चा पएको झोला झिक्दा पनि उत्ति नै ढल्काइ

रहन्छ । त्यसैले x को मान २ ओटा गुच्चाभन्दा बढी हुनुपर्छ । यही नै यस असमानताको हल हो ।

अर्थात्

अथवा, $3x+6>x+10$

अथवा, $3x-x>10-6$

अथवा, $2x>4$

अथवा, $x>2$

माथिको उदाहरणबाट स्पष्ट हुन्छ कि हामी असमानतामा पनि समीकरणमा जस्तै दुवैतर्फ उही सङ्ख्या जोड्न वा घटाउन वा धनात्मक सङ्ख्याले दुवैतिर गुणन वा भाग गर्न सक्छौं । तर ऋणात्मक सङ्ख्याले दुवैतिर गुणन वा भाग गर्दा असमानताको चिन्ह बदलिन्छ ।

माथिको छलफलका आधारमा असमानताका गुणहरूलाई गणितीय भाषामा यसरी व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

वास्तविक सङ्ख्या a,b र c का लागि

क) यदि $a>b$, छ भने $a+c>b+c$ हुन्छ ।

ख) यदि $a>b$, छ र $c>0$ छ भने $ac>bc$ हुन्छ ।

ग) यदि $a>b$, छ र $c<0$ छ भने $ac<bc$ हुन्छ । किन ?

घ) यदि $a>b$, छ र $c>0$ छ भने $a/c>b/c$ हुन्छ ।

ङ) यदि $a>b$, छ र $c<0$ छ भने $a/c<b/c$ हुन्छ । किन ?

दुई चलयुक्त रेखीय असमानताको ग्राफ

मानौं x र y दुई परिभाणहरू छन् । अंब x र y को तुलना गर्दा तल दिइएका मध्ये कुनै पनि सत्य हुनसक्छ :

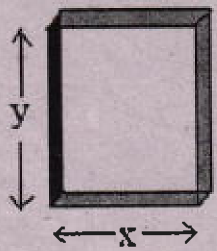
$y=x$,

$y>x$,

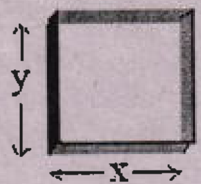
$y<x$

यस प्रकारको सम्बन्धलाई Trichotomy नियम भनिन्छ ।

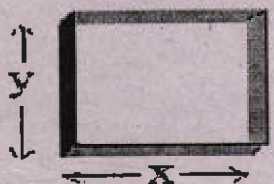
उदाहरणका लागि पुस्तकालयका किताबहरूको आकारलाई वर्गीकरण लम्बाइ र चौडाइको सम्बन्धको आधारमा गर्ने गरिन्छ । मानौं उचाइ y से.मी. र चौडाइ x से.मी. छ भने तलका तीनओटा सम्बन्धले किताबको आकारको वर्गीकरण गरिन्छ ।



x भन्दा y बढी भएको अर्थात $y>x$ भएको किताबलाई potrait आकारको किताब भनिन्छ ।



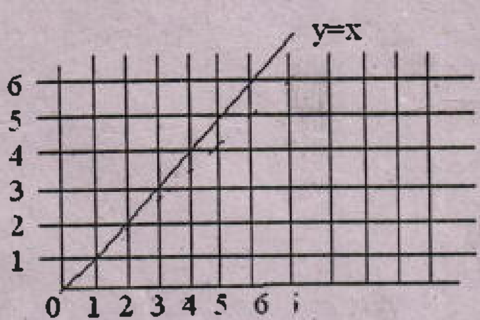
x र y बराबर भएको अर्थात $y=x$ भएको किताबलाई square आकारको किताब भनिन्छ ।



x भन्दा y घटी भएको अर्थात $y<x$ भएको किताबलाई Landscape आकारको किताब भनिन्छ ।

यी तिनओटै अवस्थाहरू $y=x$, $y>x$ र $y<x$ को ग्राफ खिच्दा बेग्ला बेग्लै ग्राफहरू प्राप्त हुन्छन् ।

यहाँ $y=x$ एउटा दुई चलयुक्त रेखीय समीकरण हो भने $y>x$ र $y<x$ असमानता हुन् । x र y लाई वास्तविक सङ्ख्या (Real number) मानेर $y=x$ समीकरणको ग्राफ खिच्दा उद्गम बिन्दुबाट जाने रेखा प्राप्त हुन्छ भने $y>x$ र $y<x$ का ग्राफहरू कस्ता होलान् ?



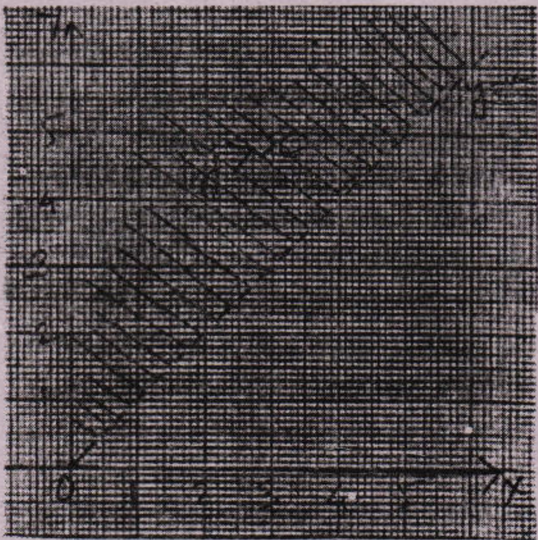
अब y=x समीकरणको ग्राफका आधारमा भन्न सकिन्छ, xy समतलमा पर्ने सम्पूर्ण बिन्दुहरूलाई अवस्थिति (Location) का आधारमा तीन भागमा वर्गीकरण गर्न सकिन्छ ।

क) y=x सीधा रेखामा पर्ने,

ख) y=x सीधा रेखाभन्दा तल पर्ने,

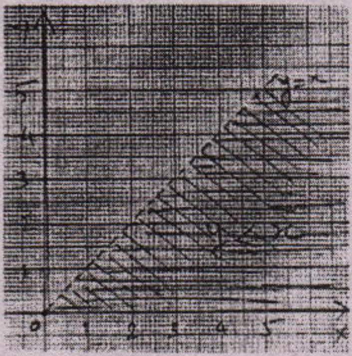
ग) y=x सीधा रेखाभन्दा माथि पर्ने ।

x-निर्देशाङ्क र y-निर्देशाङ्क बराबर हुने सबै बिन्दुहरू y=x सीधा रेखामा पर्दछन् भने सो भन्दा माथि पर्ने सबै बिन्दुहरूको y निर्देशाङ्क ठूलो हुन्छ । यो क्षेत्रलाई y>x ले जनाइन्छ । यहाँ y>x एउटा दुई चलयुक्त रेखीय असमानता हो । यसको ग्राफ खिच्दा एउटा सङ्ख्या अर्धसमतल (Half plane) प्राप्त हुन्छ ।



त्यसैगरी y=x सीधा रेखाभन्दा तल पर्ने सबै बिन्दुहरूको x निर्देशाङ्कभन्दा y निर्देशाङ्क सानो हुन्छ । यो क्षेत्रलाई y<x ले जनाइन्छ । y<x ले जनाउने समतल तल्लो अर्धसमतल हो । यूक्लिडियन ज्यामितिमा एउटा समतलमा खिचिएको सरल रेखाले समतललाई ३ भागमा बाँड्छ । सरलरेखा, सरलरेखाभन्दा माथिको अर्धसमतल, सरलरेखाभन्दा तलको अर्धसमतल । यसरी दुई चलयुक्त सरल रेखीय असमानता (Two variable linear inequality) ले समतललाई नै विभाजन गरी देखाउँछ ।

माथिका सम्बन्धहरू y=x, y>x र y<x लाई x,y प्राकृतिक सङ्ख्या, इन्टिजर सङ्ख्या लिएर ग्राफ खिच्नुहोस् र माथि खिचिएको ग्राफसँग तुलना गर्नुहोस् । के फरक पाउनु हुन्छ, नोट गर्नुहोस् ।



$y=mx+c$ जस्ता समीकरणले सीधारेखा जनाउँछ तर $y \leq mx+c$ र $y \geq mx+c$ ले समतल जनाउँछ । माथिको उदाहरणमा x,y वास्तविक सङ्ख्या भएमा $y<x$ वा $y>x$ जस्ता दुई चलयुक्त असमानताले क्षेत्र जनाउँछ भन्ने कुराको छलफल भयो । $y<x$ वा $y>x$ ले जनाउने क्षेत्र पत्ता लगाउन सर्वप्रथम $y=x$ को ग्राफ खिच्नु पर्दछ । अब भन्नुहोस् $y>x$ ले जनाउने क्षेत्र र $y \leq x$ ले जनाउने क्षेत्रबीच के भिन्नता होला ?

$y=x$ रेखामा पर्ने कुनै पनि बिन्दु $y<x$ वा $y>x$ ले जनाउने क्षेत्रमा पर्दैनन् तर $y \geq x$ वा $y \leq x$ ले जनाउने क्षेत्रलाई बन्द अर्धसमतल (Closed half plane) भनिन्छ भने $y<x$ वा $y>x$ ले जनाउने क्षेत्रलाई खुला अर्धसम्तल (Open half plane) भनिन्छ । यसलाई जनाउन विच्छेदित रेखा (Broken line) प्रयोग गर्ने चलन छ ।

असमानताले जनाउने क्षेत्र अर्थात् असमानतालाई मान्य हुने बिन्दुहरूको समूह नै उक्त असमानताको हल (Solution) समूह हो ।

दुई चलयुक्त रेखीय असमानताहरूलाई सामान्य रूपमा यस प्रकारले लेख्ने गरिन्छ ।

i) $ax+by<c$,

ii) $by>c$,

iii) $ax+by \leq c$,

iv) $ax+by \geq c$.

असमानता ग्राफ जहाँ a,b,x र y वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन्, a र b दुवै एकैचोटी शुन्य हुन सक्दैन ।

ग्राफको लागि सर्वप्रथम $3x+5y=15$ को ग्राफ खिच्नका लागि दुईओटा बिन्दुका निर्देशाङ्कहरू थाहा भए पुग्छ । सजिलै पत्ता लगाउन सकिने दुई बिन्दुहरू भनेका $3x+5y=15$ ले x अक्ष र y अक्षलाई काट्ने बिन्दुहरू हुन् ।

अर्थात्,

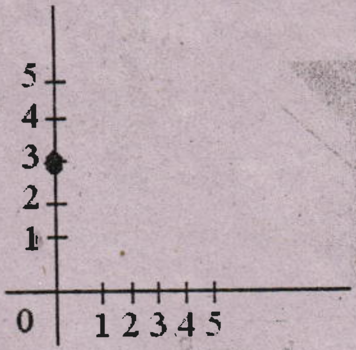
a) $x+0$

$3\times0+5\times y=15$

$5y=15$

$y=3$

अर्थात्, $3x+5y=15$ ले y अक्षलाई (0,3) मा काट्छ ।



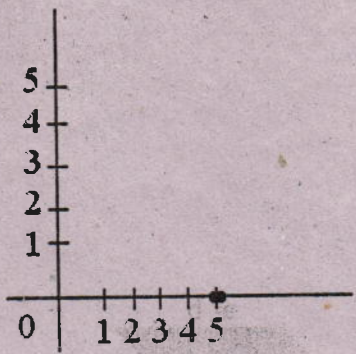
b) $y=0$

$3x+5\times0=15$

$3x=15$

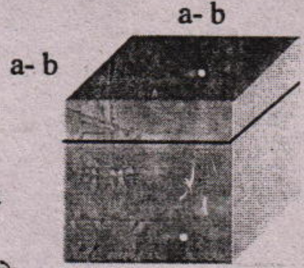
$x=5$

अर्थात्, $3x+5y=15$ ले x अक्षलाई (5,0) मा काट्छ ।

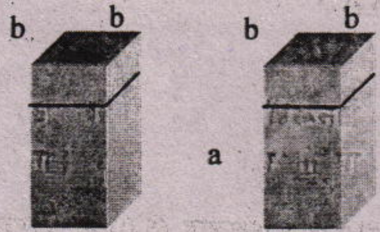


c) अब बिन्दु (0,3) र बिन्दु (5,0) लाई जोड्ने र त्यसको नाम $3x+5y=15$ दिने । उक्त हिसाब मनमनै पनि गर्न सकिन्छ । $3x+5y=15$ मा $3x$ लाई हातले छोप्ने र $5y=15$ बाट y को मान निकाल्ने जुन $y=3$ हुन्छ । यसबाट (0,3) बिन्दु पत्ता लाग्छ । त्यसैगरी $3x+5y=15$ मा $5y$ लाई छोपेर अर्को बिन्दु (5,0) पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

- फेरि a^2b हटाउने

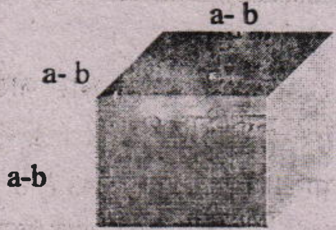


- फेरि दुइओटा ab^2 थप्ने .



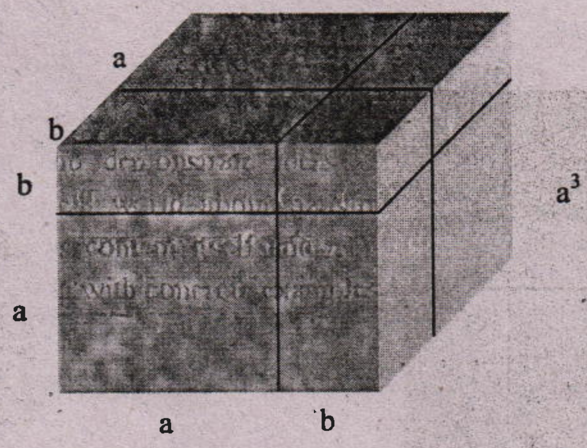
- अनि a^2b हटाउने
- b^3 हटाउने

- अब $(a-b)^3$ मात्र बाँकी रहन्छ

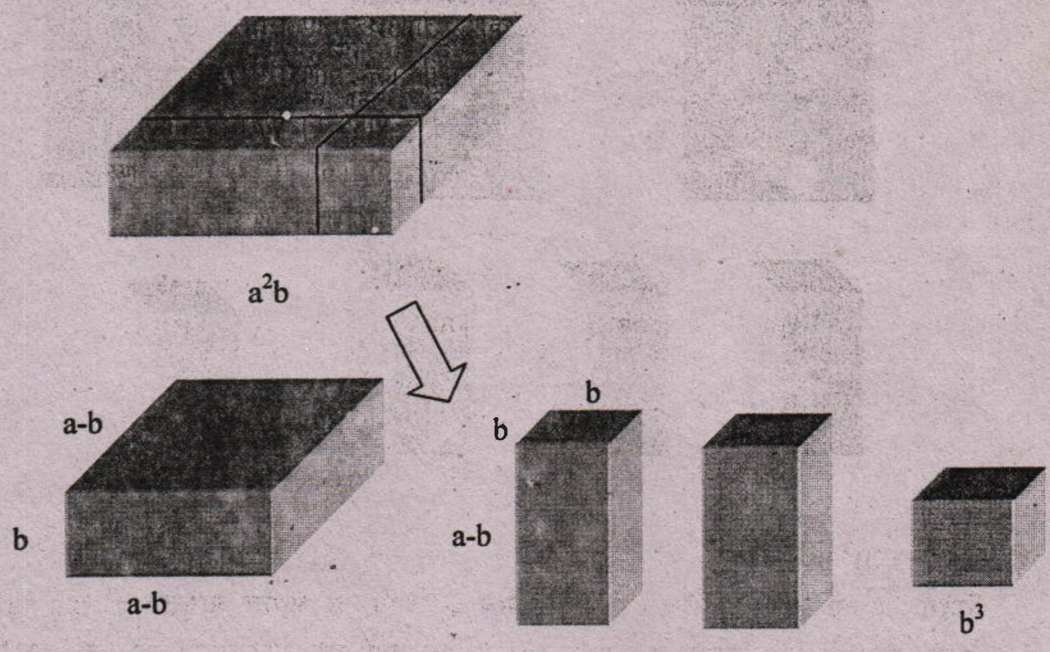


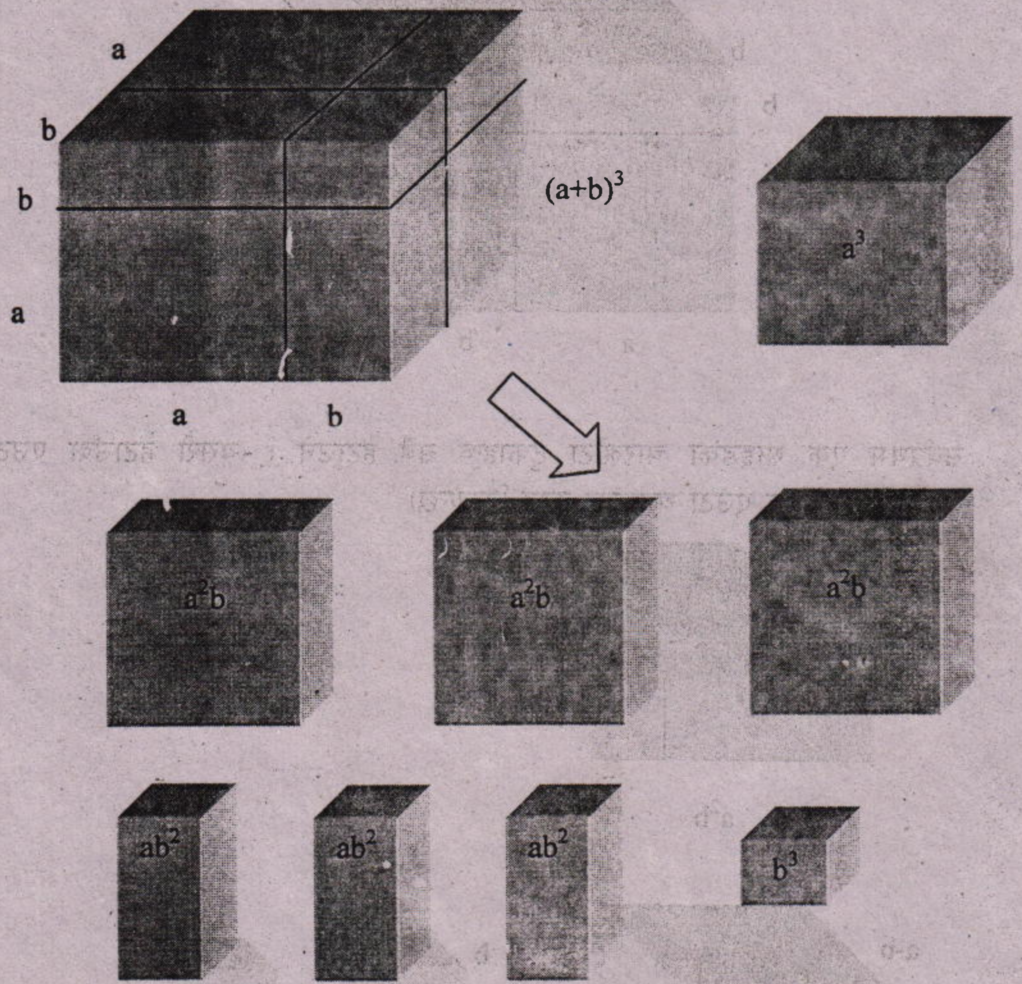
३. $a^3 + b^3$ को खण्डीकरण

घनको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ सबै a से.मी. छ अर्थात् आयतन a^3 छ । b से.मी. चिन्ह लगाइ चित्रमा देखाइएअनुसार काट्दा यहाँ पनि आठ टुक्रा बन्दछन् । यसमा ठूलो घन a^3 मा एउटा सानो घन b^3 थपेर टुक्राहरू मिलाउँदै जाँदा अन्तमा उचाइ $(a+b)$ भएको र आधारको क्षेत्रफल $a^2 - ab + b^2$ भएको घनाकार वस्तु तयार हुन्छ ।



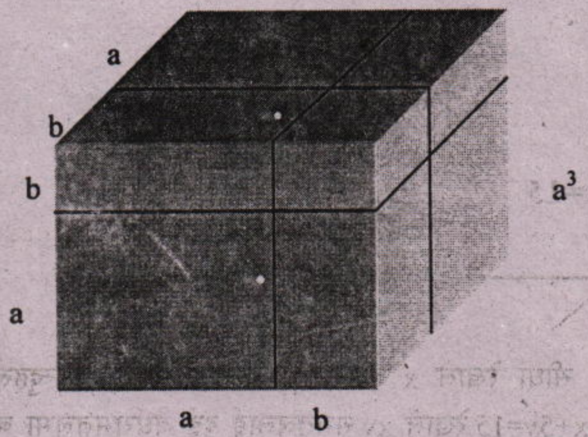
सर्वप्रथम एक साइडका चारओटा टुक्राहरू सबै हटाउने । (यसरी हटाउँदा एउटा चेप्टो, दुइओटा लाम्चो र एउटा घनाकार टुक्रा निस्कन्छ)



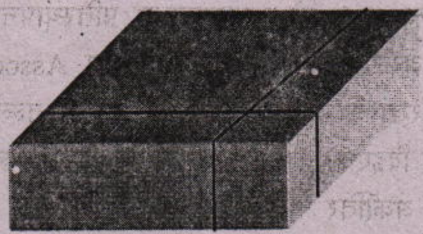


२. $(a - b)^3$ को विस्तार

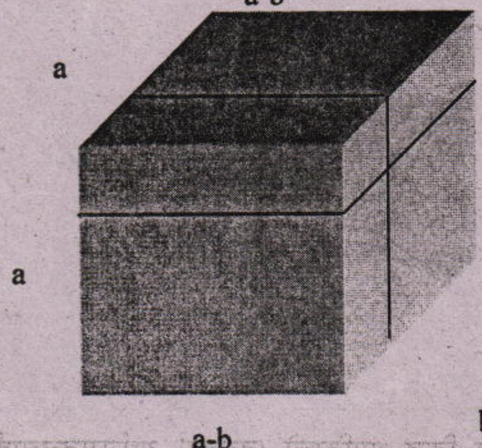
सिङ्गो घनको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ सबै a से.मी. छ अर्थात् आयतन a^3 छ । a बाट b से.मी. चिन्ह लगाई चित्रमा देखाइएअनुसार काट्दा यहाँ पनि आठ टुक्रा बन्दछन् । यसमा ठूलो घन a^3 बाट टुक्राहरू हटाउँदै जाँदा अन्तमा एउटा टुक्रा $(a-b)^3$ बाँकी रहन्छ ।



- सर्वप्रथम a^2b हटाउने

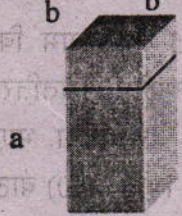


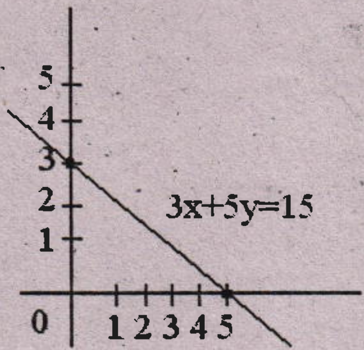
a^2b



a^2b हटाउँदा बाँकी रहेको भाग

- अनि ab^2 थप्ने .



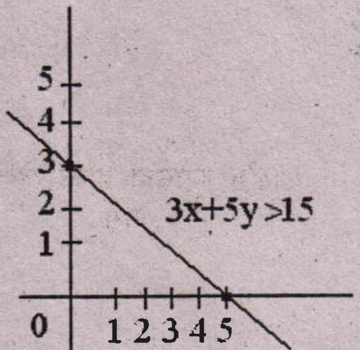


यसरी मौखिक रूपमा सीधा रेखाले x अक्ष र y अक्षलाई काट्ने बिन्दुहरू भन्न सकिन्छ । माथिको उदाहरणमा 3x+5y=15 रेखाले xy समतललाई दुई अर्धसमतलमा बाँडेको छ ।

अब 3x+5y>15 ले कुन अर्धसमतललाई जनाउँछ भन्ने कुरा पत्ता लगाउनका लागि सबभन्दा सजिलो तरिका उद्गम बिन्दु (0,0) सो असमानतामा प्रतिस्थापन गर्नु हो । यसको कारण के होला ? यदि 3x+5y>15 असमानताका लागि लिइएन र Associated रेखा उद्गम बिन्दुमा पर्दैन भने यो बिन्दु कि त रेखाको माथिल्लो समतल कि त तल्लो समतलमा पर्नुपर्छ । यसर्थ उद्गम बिन्दुको निर्देशाङ्क दिइएको असमानतालाई मान्य भए त्यसको समाधान क्षेत्र उद्गम बिन्दु भएतिर पर्छ, नभएमा अर्कोतिर पर्छ ।

जस्तै : यहाँ, x=0, y=0 राख्दा 3×0+5×0>15

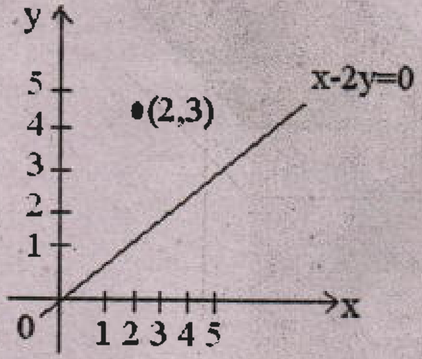
अर्थात् 0>15 जुन असत्य छ ।



त्यसैले 3x+5y>15 ले उदगम बिन्दु भएतिरको (तलको) अर्धसमतललाई जनाउँन सक्दैन । अर्थात् उद्गम बिन्दुको विपरीततिरको (माथिको) क्षेत्रलाई जनाउँछ ।

यदि c=0 भएको असमानता भएमा उद्गम बिन्दु राखेर परीक्षण गर्न सकिदैन (किन कि ax+by=0 उदगम बिन्दु (0,0) बाट जान्छ) । यस्तो अवस्थामा अरु कुनै थाहा भएको बिन्दुको मान असमानतामा प्रतिस्थापन गरी असमानताले जनाउने क्षेत्र पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

उदाहरणका लागि x-2y≤0 लिन सकिन्छ । अब यसका लागि x-2y=0 को चित्र खिचौ ।



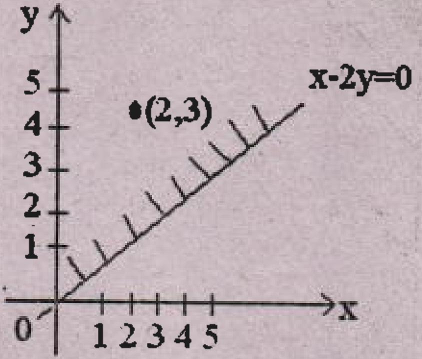
यहाँ x-2y=0 सीधा रेखा उद्‌गम बिन्दु (0,0) बाट जान्छ ।

$x-2y \leq 0$ ले जनाउने क्षेत्र पत्ता लगाउनका लागि कुनै थाहा भएको बिन्दु मानौं (2,3) लिऔं । (परीक्षणका लागि लिँदा $\leq$ भए पनि $<$ मात्र लिइन्छ)।

$x-2y<0$ मा राख्दा

$2-2\times3<0$

$-4<0$ जुन सत्य छ ।



त्यसैले बिन्दु (2,3) तिर पर्ने क्षेत्र नै असमानता $x-2y \leq 0$ ले जनाउने क्षेत्र हो ।

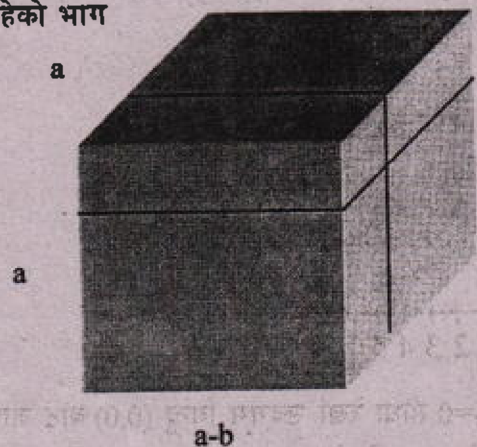
२.१२ बीजगणितीय ब्लकहरूको प्रयोगबाट बीजगणित शिक्षण

कुनै घनाकार वस्तु (काठ वा साबुन वा अन्य कुनै सजिलै काट्न सकिने वस्तु) लाई काटेर बीजगणितीय ब्लकहरू निर्माण गर्न सकिन्छ । यी बीजगणितीय ब्लकहरू प्रयोग गरी $(a+b)^3$, $(a-b)^3$ को विस्तार, a^3-b^3, a^3+b^3 को खण्डीकरण शिक्षण गर्न सकिन्छ ।

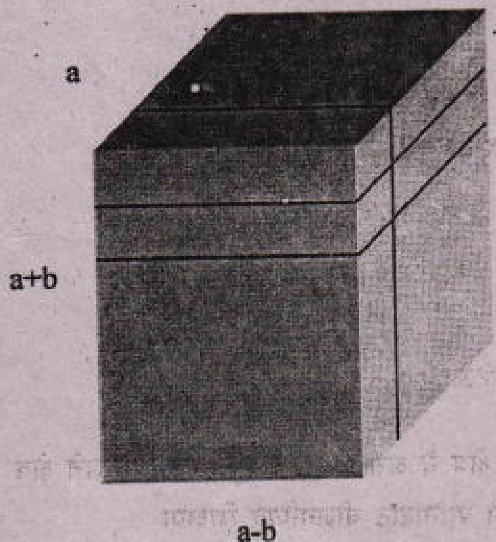
१. $(a+b)^3$ को विस्तार

लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ सबै a+b से.मी. भएको घनलाई चित्रमा देखाइएअनुसार काट्दा आठओटा टुक्राहरू प्राप्त हुन्छन् । यहाँ यी आठ टुक्राहरूको आयतनको योगफल $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ नै सिङ्गो घनको आयतन $(a+b)^3$ हो ।

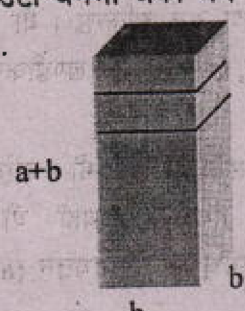
यी टुक्राहरू निकालिएपछि बाँकी रहेको भाग



- अब निकालिएको एउटा चेप्टो र एउटा लाम्चोलाई निकालेर बाँकी रहेको भाग माथि नै थप्ने । (यसो गर्दा सोको उचाइ a + b बन्न पुग्छ ।)



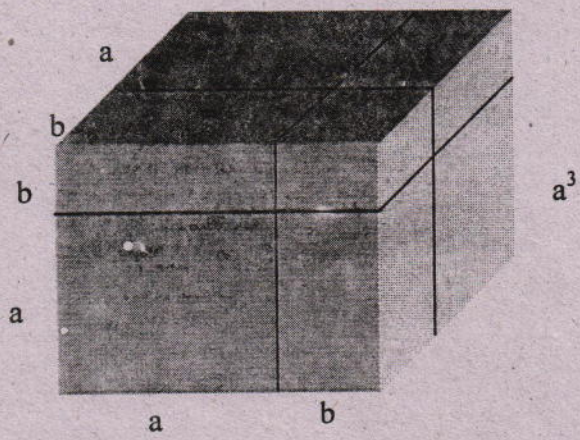
- बाँकी रहेको एउटा लाम्चो र एउटा घनमा अर्को घन b^3 थपेर माथिको नजिक उचाइ a + b नै हुने गरी ठड्याएर राख्ने .



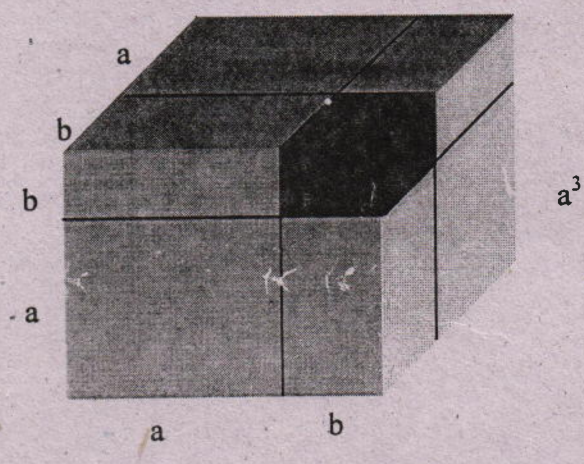
- अब सो घनाकार वस्तुको उचाइ $a + b$ र आधारको क्षेत्रफल $a^2 - ab + b^2$ भएकोले आयतन $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ भयो ।

४. $a^3 - b^3$ को खण्डीकरण

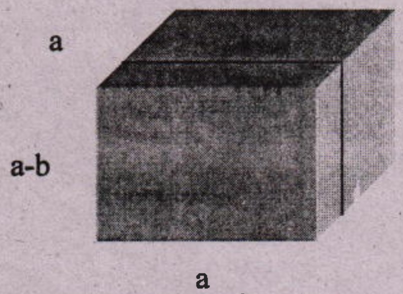
घनको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ सबै a से.मी. छ अर्थात् आयतन a^3 छ । घन बाट b से.मी. चिन्ह लगाई चित्रमा देखाइएअनुसार काट्दा यहाँ पनि आठ टुक्रा बन्दछन् । यसमा ठूलो घन a^3 बाट एउटा सानो घन b^3 झिकेर टुक्राहरू मिलाउँदै जाँदा अन्तमा उचाइ (a-b) भएको र आधारको क्षेत्रफल $a^2 + ab$ र b^2 भएको घनाकार वस्तु तयार हुन्छ ।



सर्वप्रथम सिङ्गो घन a^3 बाट सानो घन b^3 हटाउने । (यसरी हटाउदा $a^3 - b^3$ बाँकी रहन्छ)



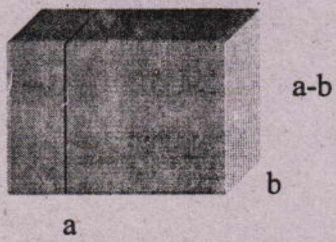
- अब बाँकीरहेको $a^3 - b^3$ को माथिपट्टिका टुक्राहरू (दुईओटा लाम्चा र एउटा चेप्टो) लाई निकालेर साइडमा मिलाएर राख्ने । (यसो गर्दा सो को उचाइ a - b बन्न पुग्छ ।)



चित्र १

उचाइ = a-b

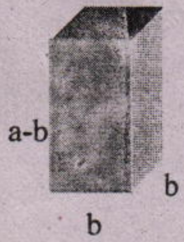
आधारको क्षेत्रफल = a2



चित्र २

उचाइ = a-b

आधारको क्षेत्रफल = ab



चित्र ३

उचाइ = a-b

आधारको क्षेत्रफल = b2

- अब सो घनाकार वस्तुको उचाइ a - b र आधारको क्षेत्रफल a2 + ab + b2 भएकोले आयतन $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ भयो ।

३. परियोजना कार्य :

बीजगणित शिक्षणका लागि उपयोगी सिकाइ मोडुलहरू तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्रीहरू :

- डा. हीराबहादुर महर्जन, हरिनारायण उपाध्याय, लेखनाथ पौडेल, माध्यमिक गणित शिक्षण
- The Soundess Series, An Introduction to the History of Mathematics,
- James S. language. (An interactive approach), Teaching Mathematics in Secondary and Middle School,
- Indira Gandhi National Open University, School of Education, Teaching Algebra and Computing,
- Maskey, S.M. Introduction to Modern mathematics, vol-2, Ratna Pustak Bhandar, Bhotahity, Kathmandu-1997.
- Mathematics Education Forum, Vol-I, Issue 6, Council for Mathematics Education, Kathmandu.

एकाइ चार

ज्यामिति

Competency 4 : Explain the basic foundation of geometry as a system and apply geometrical ideas in everyday problem solving and the discipline of sciences

पाठ १ : ज्यामितिका आधारभूत धारणाहरू

१. परिचय :

मिश्रमा ६००० वर्षपहिले नाइल नदीले बगाएर बाँकी रहेको भूभागलाई नाप्ने कार्यमा ज्यामितिको प्रयोग भएको पाइन्छ । समतल ज्यामिति र ठोस ज्यामिति दुवै नाइल उपत्यका र युफ्रेटस उपत्याकामा ४००० वर्षपहिले नै विकास भएको मानिन्छ । उनीहरूको ज्यामिति नाप, अवलोकन तथा अनुभवमा आधारित थियो । उनीहरूको ज्यामिति प्रयोगात्मक रूपमा मात्र थियो ।पछि गएर ग्रीकहरूले पनि ज्यामितिको प्रयोग प्रशस्त मात्रामा गरे । शुरुमा उनीहरूको ज्यामितिको प्रयोगको प्रकृति पनि प्रयोगात्मक नै थियो । Geometry शब्द पनि ग्रीक भाषाबाट नै आएको हो जसको अर्थ हुन्छ पृथ्वी (जमीन) को नाप । ग्रीकहरूको ज्ञानको खोजी गर्ने बानीको कारणले गर्दा ज्यामितिको रूप प्रयोगात्मकबाट क्रमशः सैध्दान्तिक हुन पुग्यो । प्रमाणको खोजी गर्न लागियो । इशापूर्व ६०० वर्षदेखि ३०० वर्षको बीचमा ग्रीकहरूले निगमनात्मक तर्क (Deductive Reasoning) को माध्यमबाट ज्यामितिलाई शुध्द गणितको रूपमा विकास गरे । ज्यामितिको विकासमा Thales, Pythagorus, Euclid को योगदान निकै महत्वपूर्ण मानिन्छ । ज्यामितिको विकासका क्रममा हिन्दुहरूको योगदान पनि महत्वपूर्ण मानिन्छ । उनीहरूको ज्यामिति विशेष गरी प्रयोग र नापमा आधारित थियो । प्राचीन शास्त्र Sulvasutra काअनुसार वेदी तथा मण्डपहरू निर्माण गर्दा ज्यामितिको प्रयोग गर्दथे (विशेष गरी पाइथागोरस साध्य तथा वृत्तसम्बन्धी साध्यहरू)। ब्रह्मगुप्त र माहावीरले त्रिभुजको क्षेत्रफल र चक्रीय चतुर्भुजको क्षेत्रफल निकाल्ने विधि पत्तालगाएका थिए । त्यसैगरी आर्यभट्टले पिरामीडको आयतन निकाल्ने तरिका पत्तालगाएका थिए । भाष्करले पाइथागोरस साध्य प्रमाणित गर्ने नयाँ तरिका निकालेका थिए । यसरी ज्यामितिको विकास क्रमलाई हेर्दा ज्यामितीय धारणाहरू आगमनबाट विकास भई क्रमश निगमनतिर गएको पाइन्छ । त्यसैले विद्यालय तहको ज्यामिति शिक्षणमा पनि निगमन विधि मात्र प्रयोग नगरी आगमन विधिलाई पनि सँगसँगै लैजानु पर्ने हुन्छ । विद्यार्थीहरूका अनुभवहरूलाई ज्यामिति शिक्षणमा प्रयोग गर्नुपर्दछ । ज्यामिति शिक्षणमा वास्तविक वस्तुहरूको प्रयोगलाई बढी जोड दिनुपर्दछ । यस एकाइमा ज्यामितिका आधारभूत धारणाहरू, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्तसम्बन्धी सैध्दान्तिक, प्रयोगात्मक तथा व्यवहारिक समस्याहरू समावेश गरिएका छन् ।

२. विषयवस्तु

२.१ युक्लिडीयन ज्यामिति

अलेक्जान्ड्रीया विश्वविद्यालयका प्राध्यापक युक्लिडले इशापूर्व ३०० वर्षतिर Element नामक पुस्तकमार्फत् युक्लिडीयन ज्यामितिको आधार तयार पारे । उनले त्यसभन्दा अगाडि विकास भएका ज्यामितीय धारणाहरू सबैलाई आफ्नो पुस्तकमा समेटेका थिए । उक्त पुस्तकमा समेटिएका ज्यामिति उन्नाइसौं शताब्दीसम्म पनि अकाट्य ज्यामितीय प्रणालीका रूपमा रह्यो । उनका पुस्तकमा जम्मा १३ भागहरू थिए जसमध्ये पहिलोदेखि छैठौं भागसम्म समतलीय ज्यामिति (Plane geometry) सँग सम्बन्धित विषयवस्तुहरू थिए भने नवौंदेखि तेह्रौं भाग ठोस ज्यामिति (Solid geometry) सँग सम्बन्धित विषयवस्तुहरू थिए । युक्लिडले निगमनात्मक तार्किक प्रणाली (Deductive logical system) को विकास गरे । उनले सबै साध्यहरूलाई परिभाषा तथा स्वयम्सिध्द तथ्यहरू (Postulates) प्रयोग गरी प्रमाणित गरे । युक्लिडको समतलीय ज्यामिति र ठोस ज्यामिति अझै पनि विश्वका कैयन मुलुकका विद्यालय पाठ्यक्रममा युक्लिडीयन ज्यामितिका रूपमा रहेको पाइन्छ ।

वास्तवमा ज्यामिति भनेको हाम्रो सामान्य Space अनुभवहरूको Idealization र Systematization हो । Space Science को रूपमा ज्यामितिका दुई पक्षहरू छन्, तार्किक (Logical) पक्ष (जुन युक्लिडको Element मा पाइन्छ) र भौतिक पक्ष (जुन हाम्रो वास्तविक space अनुभवहरूको उपयोगितासँग सम्बन्धित छ । युक्लिडीएन ज्यामितिका आधारभूत धारणाहरू, विन्दु, रेखा, समतल, ज्यामितीय आकृति हाम्रो Space intution सँग आवध्द छन् । यी धारणाहरू अमूर्त भए तापनि Visualize गर्न सकिन्छ र हाम्रो भौतिक Space सँग सम्बन्धित नभएका परिस्थितिको सोचाइका लागि शक्तिशाली उपाय भएको छ । केटाकटीहरूको ज्यामितीय कल्पना विकास एउटा महत्वपूर्ण पक्ष भएकाले शिक्षाविद्हरू विद्यालय पाठ्यक्रममा युक्लिडीयन ज्यामिति समावेश गर्नमा जोड दिएका छन् ।

निगमनात्मक प्रणालीमा कुनै पनि Statement अघिल्लो Statement को प्रयोगबाट निकालिंन्छ (derived) भने सो Statement बाट अर्को नयाँ Statement निकालिन्छ । कुनै तह (Stage) मा पुगेपछि वृत्तीय तर्क (Circular reasoning) को अवस्था पनि आउँछ । जस्तै p बाट q निकालिन्छ भने q बाट p निकालिन्छ । यही नै युक्लिडीएन ज्यामितिको विशेषता हो । युक्लिडले निगमनात्मक प्रमाणका लागि Definition, Postulates, Axiom (Common notion) र Theorem को प्रयोग गरेका थिए । उनले आफ्नो पुस्तक Element को भाग १ मा २३ ओटा Definitions, ५ ओटा Postulates, ५ ओटा Axioms र ४८ ओटा propositions प्रस्तुत गरेका छन् (अध्ययनका लागि थप सामग्री हेर्नुहोस्) । युक्लिडको ज्यामितिमा केही कमजोरीहरू रहेको कुरा उनीपछिका गणितज्ञहरूले कैयन वर्षपछि मात्र पत्ता लगाए । युक्लिडले साध्य प्रमाणित गर्नको लागि प्रयोग गरेका केही Postulate र Axiom हरू

उनको पुस्तक Element मा उल्लेख गरिएको थिएन । पछि Pasch, Peano र Hilbert ले Euclidean Geometry का Logical defects हरूलाई हटाए । David Hilbert (1862-1943) ले The Foundation of Geometry नामक पुस्तक मार्फत समतल र ठोस युक्लिडीएन ज्यामितिसँग सम्बन्धित २१ ओटा Axiom अर्थात् Postulste (युक्लिडले Axiom र postulste बीच फरक देखाएका थिए भने उनीपछिका गणितज्ञहरूले यी दुवै उही हुन् भन्ने कुरा स्वीकारेका छन्) र ६ ओटा अपरिभाषित पदावली (Undefined terms) अर्थात् primitives प्रस्तुत गरे । Hilbert का समतलीय ज्यामितिसँग सम्बन्धित primitives अन्तरगत विन्दु, रेखा, Incidence र Congruence पर्दछन् । युक्लिडको पाँचौं Postulate लाई प्रमाणित गर्ने २००० वर्षको व्यर्थको अथक प्रयाशको फलस्वरूप Non-Eucledean Geometry को विकास भयो । Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Bolyai, Lobachevsky जस्ता गणितज्ञहरूले युक्लिडको पाँचौं postulate प्रमाणित गर्न सकिदैन बरु उक्त postulate को प्रयोगविना अर्को नयाँ ज्यामितीय प्रणाली (Non-Euclidean Geometry) को विकास गर्न सकिने निष्कर्षमा पुगे ।

२.२ विन्दु, किरण र रेखाखण्ड

विन्दु

विन्दु, रेखा, समतल जस्ता आधारभूत शब्दावलीहरू युक्लिडीएन ज्यामितिमा निकै प्रचलित छन् तर यी शब्दहरूको परिभाषा विवादस्पद पनि मानिन्छन् । आजभन्दा २५०० वर्ष पहिले पाइथागोरिएनहरूले विन्दुलाई स्थानमा एकात्मकता (Unity in position) को रूपमा परिभाषित गरेका थिए । अहिले पनि विन्दुलाई स्थानसहीतको तर परिमाणविनाको वस्तु (An object having position but no magnitude) को रूपमा परिभाषित गरेको पाइन्छ । अर्थात् A point is location in space . यी परिभाषाहरू अपूर्ण छन् किन कि गणितीय नमूना (mathematical model) निर्माणमा सूर्य, चन्द्रमा, पृथ्वीलाई पनि विन्दुका रूपमा लिइन्छ । विन्दुलाई अपरिभाषित (Undefined) शब्दका रूपमा पनि लिइन्छ । विद्यार्थीहरूलाई विन्दुको धारणा दिनका लागि विभिन्न क्रियाकलापहरू गराउन सकिन्छ । तिखो सिसाकलमले कागजमा लगाएको चिन्ह, सियोको टुप्पोले कागजमा लगाएको चिन्ह विन्दु हो । यसरी सिसाकलम र सियोको टुप्पोले लगाएको चिन्हमा आयाम हुन्छ तर विन्दुको कुनै आयाम हुँदैन । विन्दुलाई हेर्न वा छुन सकिदैन । यसलाई बुझ्न वा बुझाउनका लागि भौतिक सङ्केतको आवश्यकता पर्दछ तसर्थ सिसाकलम वा सियोको टुप्पोले दिएको आकार प्रयोग गर्दछौं । सङ्ख्या र सङ्ख्यासङ्केत जस्तै विन्दु र थोप्लाको सम्बन्ध रहेको हुन्छ । सामान्यत दुईओटा रेखाहरू काटिने ठाउँलाई विन्दु भनिन्छ । विन्दुहरूलाई जनाउनका लागि अँग्रेजी वर्णमालाका ठूला अक्षरहरू प्रयोग गरिन्छ ।

रेखाखण्ड

रेखाखण्डलाई परिभाषित गर्न पनि निकै गाह्रो छ । दुईजना विद्यार्थीहरूलाई एउटा डोरी वा धागो तन्काउन लगाएर रेखाखण्डको धारणा दिन सकिन्छ । रेखाखण्डलाई पनि देख्न वा लेख्न सकिदैन तर सजिलोसँग बुझाउनका लागि भौतिक सङ्केतका रूपमा सिसाकलमले कागजमा कोरेको धर्कोलाई प्रयोग गर्छौं ।

रेखाखण्डको एउटामात्र आयाम हुन्छ । दुईओटा विन्दुहरूलाई रुलरले जोडेर आएको धर्कोलाई रेखाखण्ड भनिन्छ ।

रेखा

रेखाखण्डलाई कतिसम्म बढाउन सकिएला भन्ने छलफलबाट रेखाको धारणा दिन सकिन्छ । यसरी रेखाको केही भाग रेखाखण्ड हो । रेखालाई दुवैतिर जति पनि बढाउन सकिन्छ भने रेखाखण्डको निश्चित नाप हुन्छ । कुनै निश्चित विन्दुहरू जोड्ने विन्दुहरूको विन्दुपथको रूपमा पनि रेखालाई परिभाषित गरिएको पाइन्छ ।

रेखालाई बक्ररेखा, सीधारेखा, टुटेको रेखा (Broken line) गरी विभिन्न किसिमले वर्गीकरण गर्न सकिन्छ । कुनै दुई निश्चित विन्दुहरू जोड्ने सबैभन्दा छोटो विन्दुपथ नै सीधा रेखा हो भने कुनै दुईओटा निश्चित विन्दुहरू जोड्ने लामो विन्दुपथ नै बक्र रेखा हो । बक्र रेखा कुनै निश्चित दिशामा जाँदैन ।

किरण

रेखाको आधा भाग किरण (ray) हो । आँखाको हेराइ, सूर्यको प्रकाश, बत्तीको प्रकाश सबै किरणका उदाहरण हुन् । $\overrightarrow{AB}$ किरण भन्नाले उद्‌गम विन्दु A भएको र B तिर लम्बिएको किरणलाई बुझिन्छ ।

यसबाट स्पस्ट हुन्छ कि विन्दु, रेखा र समतल जटिल अर्थात् अमूर्त धारणाहरू हुन् त्यसैले यी शब्दहरूको अर्थ बुझाउनको लागि काल्पनिक ज्यामितीय आकार/चित्रहरूको प्रयोग गर्दछौं ।

२.३ साधारण मान्यताहरू (General assumptions)

ज्यामिति शिक्षणका क्रममा विद्यार्थीहरूलाई साधारण मान्यताहरूका बारेमा परिचित गराउनु आवश्यक पर्दछ। साधारण मान्यताहरू दुई प्रकारका छन्।

- स्वयम् सिध्द तथ्यहरू (Axioms)
- स्वीकृतिहरू (Postulates)

स्वयम्सिध्द तथ्यहरू

प्रमाणविना नै साधारण सोचाइले सिध्द हुने गणितीय तथ्यलाई स्वयम्सिध्द तथ्य भनिन्छ। स्वयम्सिध्द तथ्यका केही उदाहरणहरू यस प्रकार छन्।

१. योग तथ्य (Addition axiom)

बराबर परिमाणमा अर्को कुनै बराबर परिमाण जोड्दा योग पनि बराबर हुन्छ। जस्तै, $a = b$ भए $a + c = b + c$ हुन्छ। तराजुको प्रयोगबाट विद्यार्थीहरूलाई योग तथ्यका बारेमा स्पष्ट पार्न सकिन्छ।

२. शेषतथ्य (Subtraction axiom)

बराबर परिमाणबाट बराबर परिमाण घटाउँदा शेष परिमाणहरू पनि बराबर नै हुन्छन्। जस्तै, $a = b$ भए $a - c = b - c$ हुन्छ। तराजुको प्रयोगबाट विद्यार्थीहरूलाई योग तथ्यका बारेमा स्पष्ट पार्न सकिन्छ।

३. गुणन तथ्य (Multiplication axiom)

बराबर परिमाणलाई बराबरले गुणन गर्दा गुणनफल पनि बराबर हुन्छन्। जस्तै, $a = b$ भए $ac = bc$ हुन्छ।

४. भाग तथ्य (Division axiom)

बराबर परिमाणलाई बराबर परिमाणले भाग गर्दा भागफल पनि बराबर हुन्छन्। जस्तै, $a = b$ भए $a / c = b / c$ हुन्छ।

५. विषम शेष तथ्य (Unequal Subtraction axiom)

बराबर परिमाणबाट उस्तै किसिमका विषम परिमाणहरू घटाउँदा विपरीत क्रममा विषम शेषहरू रहन्छन्। जस्तै $a = b$ र $c > d$ भए $a - c < b - d$ हुन्छ।

६. सङ्क्रमण तथ्य (Transitive axiom)

तीन परिमाणहरू मध्ये पहिलोभन्दा दोस्रो बढी र दोस्रोभन्दा तेस्रो बढी भए पहिलोभन्दा तेस्रो झन्‌बढी हुन्छ। जस्तै $a < b$ र $b < c$ भए $a < c$ हुन्छ।

७. तुलना तथ्य (Comparison axiom)

एउटा परिमाण अर्को परिमाणसँग बराबर या त्योभन्दा बढी वा घटी हुन्छ।

८. घातमूल तथ्य (Power root axiom)

बराबर परिमाणका घात अथवा मूल बराबर हुन्छन् ।

९. सिङ्गोटुक्रे तथ्य (Whole part axiom)

जुनसुकै सिङ्गो परिमाण त्यसका टुक्राहरूको योगसँग बराबर हुन्छ र हरेक टुक्राभन्दा ठूलो हुन्छ ।

१०. प्रतिस्थापन तथ्य (Substitution axiom)

कुनै परिमाणको सट्टामा त्यससँग बराबर भएको अरु कुनै परिमाणले प्रतिस्थापन गर्न सकिन्छ ।

११. बराबरी तथ्य (Equal axiom)

उही परिमाणसँग बराबर भएका परिमाणहरू बराबर हुन्छन् । जस्तै $a = b$ र $b = c$ भए $a = c$ हुन्छ ।

स्वीकृतिहरू (Postulates)

प्रमाणविना नै मानिआएको ज्यामितीय मान्यतालाई स्वीकृति भनिन्छ । स्वीकृतिका केही उदाहरणहरू यस प्रकार छन् ।

१. दुई विन्दुहरूलाई एउटै मात्र सीधा रेखाले जोड्न सकिन्छ ।

२. कुनै पनि रेखाखण्डको एउटै मात्र मध्य विन्दु हुन्छ ।

३. एउटा विन्दुबाट अनगिन्ती रेखाहरू खिच्न सकिन्छ ।

४. कुनै पनि सीधा रेखालाई एकातिर वा दुवैतिर जति परसम्म पनि लम्व्याउन सकिन्छ ।

५. एउटा विन्दुबाट कुनै पनि रेखामा एउटै मात्र लम्ब हुन्छ ।

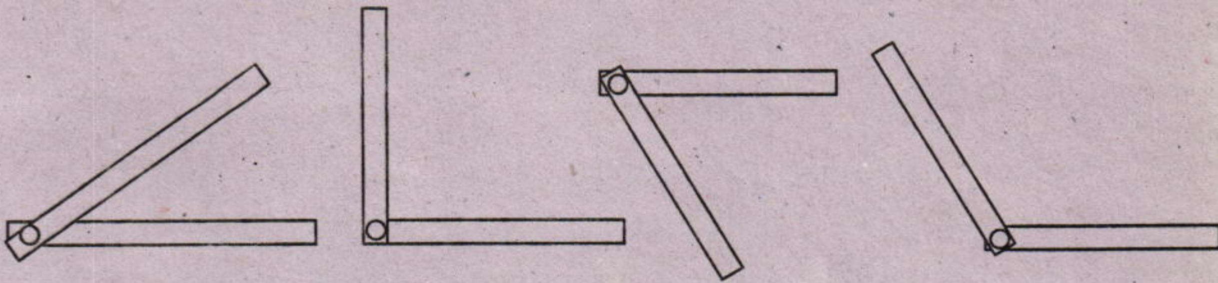
६. कुनै कोणको अर्धक एउटा सीधारेखा मात्र हुन्छ ।

२.४ कोण

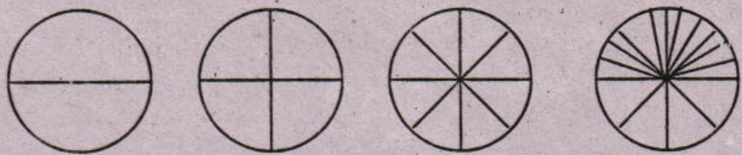
शिक्षक रामबहादुरको शिक्षण शैली निकै राम्रो छ । उनी आज विद्यार्थीहरूलाई कोण शीर्षक शिक्षण गर्दैछन् । कक्षामा कोणको सम्बन्धमा छलफल भए । कुनै दुई सरल रेखाहरू एउटा शीर्षविन्दुमा भेटिदा बन्न जाने फटाइ नै कोण हो भन्ने निष्कर्ष निकालियो ।

एउटा वृत्तको केन्द्र वरिपरि किन 360^0 हुन्छ र किन 300^0 वा 400^0 हुँदैन भन्ने बारेमा पनि छलफल भए । इशापूर्व 500 वर्षतिर वेविलोनियनहरूले सूर्यले वृत्ताकार बाटोमा पृथ्वीको परिक्रमा गर्ने कुरामा विश्वास गर्दथे । सूर्यले पृथ्वीलाई परिक्रमा गर्न 360 दिन लगाउने कुरा उनीहरूको निष्कर्ष थियो । त्यसैले एक दिनमा सूर्यले पृथ्वीलाई परिक्रमा गर्ने कोणीय नापलाई 1^0 मानी एक वृत्तमा 360^0 हुने नापको विकास गरिएको हो । हाल आएर पृथ्वीले सूर्यको परिक्रमा गर्न 365 दिन लाग्ने कुरा पत्तालागे पनि पहिले देखिको प्रचलनलाई मानेर 360^0 को कोणीय नाप कायम हुँदैआएको पाइन्छ । अर्को कारण 365 कोभन्दा 360 का बढी गुणन खण्डहरू हुनेहुँदा 360 लाई लिनु बढी सुविधाजनक रहेको पाइन्छ ।

कोणका अङगहरू भुजा, शीर्ष विन्दु तथा कोणका वर्गीकरणका बारेमा छलफल भए । कोणका भौतिक उदाहरणहरूका बारेमा पनि छलफल भए । विद्यार्थी सबैलाई उठाएर पाखुराले बनाउने विभिन्न कोणहरू प्रदर्शन गर्न लगाइयो । अनि डोरी, सिन्का, लट्ठी इत्यादिबाट बनाउन सकिने कोणहरूका बारेमा पनि चर्चा भए । त्यसैगरी घडीमा १ बज्दा, २ बज्दा, ...१२ बज्दा कुन कुन प्रकारका कोणहरू बन्दछन् भन्ने बारेमा प्रयोगात्मक रूपमा छलफल भए । कोणका निम्नानुसारका घुम्ने नमूनाहरू प्रदर्शन गरिए ।



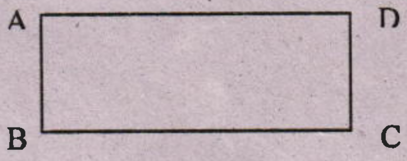
विद्यार्थीहरूलाई एक एक ओटा वृत्ताकार काग़जका टुक्राहरू वितरण गरी त्यसलाई पट्याएर 15^0 को फरकमा कोणहरू निर्माण गर्न (प्रोट्याक्टर बनाउन) लगाइयो ।



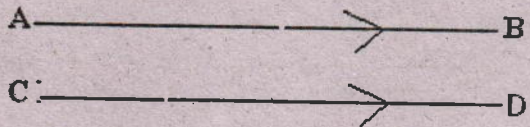
विद्यार्थीहरूलाई कोण खिच्न तथा दिइएको कोण नाप्न पनि सिकाइयो । अन्तमा कोणको अनुमान गर्ने एउटा रमाइलो खेल विद्यार्थीहरूलाई खेलाइयो (एउटा सीधा रेखा दिएर कुनै निश्चित कोण निर्माणका लागि विन्दुहरू चिन्ह लगाउने, कोण दिएर कति डिग्रीको हो अनुमान गर्ने) ।

२.५ समानान्तर रेखाहरू

शिक्षक वासुले समानान्तर रेखासम्बन्धी पाठ शिक्षण गर्दैछन् । उनले विद्यार्थीहरूलाई डस्टर, बेञ्च, किताव, कापी, कालोपाटी, कोठाका किनाराहरू अवलोकन गर्न लगाए । विपरीत किनाराहरू कस्ता छन् हेर्न लगाए । डस्टरको विपरीत किनाराहरूको चित्र कापीमा कोर्न लगाए ।

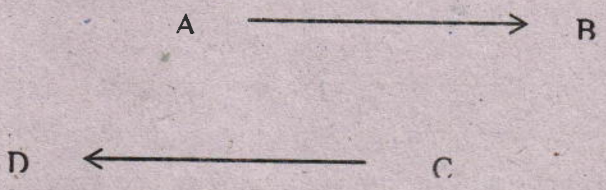


अनि विपरीत किनाराहरू जनाउने सरल रेखालाई लम्व्याउन लगाए । अनन्तसम्म लम्व्याउँदा ती सरल रेखाहरू काटिएलान् वा नकाटिएलान् भन्ने प्रश्नको सम्बन्धमा छलफल गराए । यस प्रकार समानान्तर रेखाको परिभाषा सम्बन्धमा छलफललाई अघि बढाए । दुवैतिर जति परसम्म लम्व्याए पनि एक आपसमा नभेटिने एउटै समतलमा परेका सीधा रेखाहरू नै समानान्तर रेखाहरू हुन भन्ने निश्कर्ष निकालियो । बेग्लाबेग्लै समतलमा रहेका रेखाहरू समानान्तर हुन सक्दैनन् ।



यसरी एउटै समतलमा परेर दुवैतिर जति लम्व्याए पनि नकाटिने ती रेखाहरूले कतैतिर पनि कुनै कोण बनाउँदैनन् । यस दृष्टिकोणले समानान्तर रेखाहरूको परिभाषा यसप्रकार पनि दिन सकिन्छ । एउटै समतलमा परिकन कुनै कोण नबनाएका सीधारेखाहरू नै समानान्तर रेखाहरू हुन् । यस्ता रेखाहरू जतासुकै पनि समान दुरीमा हुन्छन् । यसबाट स्पष्ट हुन्छ कि समानान्तर रेखालाई अर्को प्रकारले पनि परिभाषित गर्न सकिन्छ । समान दुरीमा रहेका दुईओटा रेखाहरू समानान्तर रेखाहरू हुन् । समानान्तर रेखाहरूलाई || सङ्केतबाट जनाइन्छ ।

तलको चित्रमा देखाइएका रेखाहरू समानान्तर छन् कि छैनन् भन्ने सम्बन्धमा छलफल भए ।



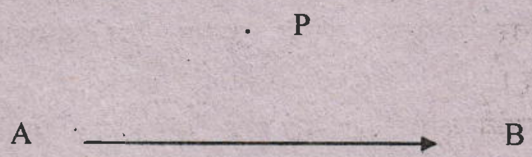
माथि चित्रमा देखाइएका रेखाहरू विपरीत दिशामा छन् । यी रेखाहरू पनि समानान्तर नै छन् । समानान्तर रेखाहरू उही दिशामा वा विपरीत दिशामा पनि हुन सक्छन् ।

छेदकका सम्बन्धमा छलफल भए । एकै समतलमा रहेका दुईओटा रेखाहरूलाई काट्ने रेखा नै छेदक हो । छेदकले समानान्तर रेखाहरूलाई काट्दा बन्ने एकान्तर कोण, संगत कोण तथा क्रमागत भित्रीकोणहरूको ज्यामितिको अध्ययनमा ठूलो महत्व रहेको पाइन्छ । एउटै समतलमा रहेका दुई सीधारेखाहरूलाई छेदकले काट्दा बन्ने यी कोणको प्रकृतिमा ती दुई रेखाहरू समानान्तर हुनसक्छन् वा सक्दैनन् भन्ने कुरा भरपर्दछ । अनि एकान्तर कोण, संगतकोण तथा क्रमागत भित्रीकोणका परिभाषा सम्बन्धमा पनि छलफल भए ।

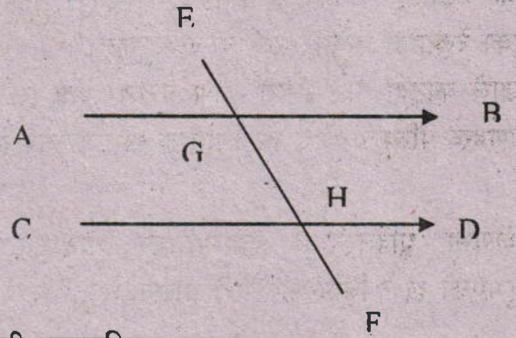
समानान्तर रेखाहरूसम्बन्धी स्वयंसिध्द तथ्यहरू

शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई प्रश्न राख्नुभयो, कुनै एउटा निश्चित विन्दुबाट सो विन्दुमा नपर्ने कुनै एउटा सीधारेखासँग समानान्तर हुने गरी कतिओटा सीधारेखाहरू खिच्न सकिएला ?

सबै विद्यार्थीहरूबाट एउटा मात्र भन्ने जवाफ आयो । यो एउटा स्वयम्सिध्द तथ्य हो । यसलाई पहिलो समानान्तर स्वयम्सिध्द तथ्य (First parallel postulate) भनिन्छ ।



यदि एउटा छेदकले दुई समानान्तर रेखाहरूलाई काट्दा बन्ने संगतकोणहरू बराबर हुन्छन् । एउटा छेदकले दुई सीधारेखाहरूलाई काट्दा बनेका संगतकोणहरू यदि बराबर छन् भने ती सीधारेखाहरू समानान्तर हुन्छन् । यो दोस्रो समानान्तर स्वयम्सिध्द तथ्य हो ।



अन्य केही स्वयम्सिध्द तथ्यहरू

१. समानान्तर दुईओटा रेखाहरूमध्ये एउटालाई जति परसम्म लम्ब्याए पनि अर्कोसँग त्यो लम्ब्याइएको भाग पनि समानान्तर नै हुन्छ ।

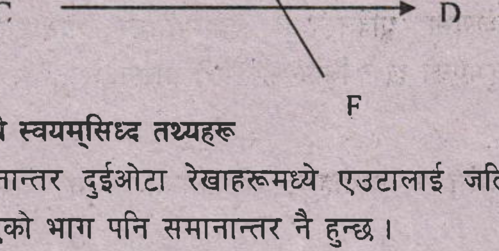
२. समानान्तर दुईओटा रेखाहरूमध्ये एउटाको कुनै खण्ड अर्कोको कुनै खण्डसँग समानान्तर नै हुन्छन् ।

३. एक आपसमा काटिएका दुईओटा रेखा कुनै तेस्रो रेखासँग एकैपल्ट दुवै समानान्तर हुँदैनन् ।

४. समानान्तर रेखाहरूलाई कुनै सीधा रेखाले काट्दा बन्ने संगत कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

५. संगतकोणहरू बराबर हुने गरी कुनै सीधा रेखाले काटिएका रेखाहरू समानान्तर हुन्छन् ।

६. समानान्तर दुईओटा रेखाहरू समान दूरीमा हुन्छन् ।



समानान्तर रेखाका गुणहरू

१. दुईओटा रेखाहरू समानान्तर छन् भने ती रेखाहरूलाई छेदकले काट्दा (क) संगतकोणहरू बराबर हुन्छन् (ख) एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्छन् (ग) अन्तराभिमुख (क्रमागत भित्रीकोण)हरू परिपूरक हुन्छन् ।

२. समानान्तर सीधा रेखाहरूमध्ये कुनै एउटा रेखा अर्कै भिन्नै एउटा सीधा रेखामा लम्ब छ भने बाँकी रेखाहरू पनि त्यो रेखामा लम्ब हुन्छन् ।

३. समानान्तर सीधारेखाहरूमध्ये कुनै एउटा रेखा अर्को भिन्नै एउटा सीधारेखासँग समानान्तर छ भने बाँकी रेखाहरू पनि त्यो रेखासँग समानान्तर हुन्छन् ।

समानान्तर रेखासम्बन्धी केही सिध्दान्तहरू

१. एउटा सीधा रेखामा लम्ब भएका रेखाहरू परस्पर समानान्तर हुन्छन् ।

२. एउटै रेखासँग समानान्तर भएका रेखाहरू परस्पर समानान्तर हुन्छन् ।

३. दुईओटा रेखालाई कुनै सीधारेखाले काट्दा (क) संगत कोण बराबर भए (ख) एकान्तर कोण बराबर भए (ग) क्रमागत भित्रीकोणहरू परिपूरक भए ती रेखाहरू समानान्तर हुन्छन् ।

३. परियोजना कार्य

विद्यालय तहको ज्यामिति शिक्षणमा युक्लिडीयन ज्यामितिका आधारभूत धारणाहरूको उपयोगिता के कस्तो रहेको पाउनुभएको छ ? विश्लेषण गरी प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्रीहरू

- डा. हीराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण, भूँडी पुराण प्रकाशन ।
- S.M. Maskey, Modern Mathmatics, Ratna Pustak Bhandar.
- R.K. Bansal, Concise Mathematics, Selina Publishers.
- माध्यमिक शिक्षा विकास केन्द्र , गणित प्रशिक्षक निर्देशिकाहरू (मा.वि, नि.मा.वि),
- SEDP, Four Week Inservice Teacher Training Package (Lower Secondary and Secondary)
- शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र, गणित शिक्षण प्रशिक्षक निर्देशिका
- Wally 'wallypop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philippines, NISMED.
- IGNOU, Teaching of Mathematics,
- Morgan Ward et.al, Modern Elementary Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- Paw J. Kelly et. al, Geometry, Eurasia Publishing House (P) Ltd.

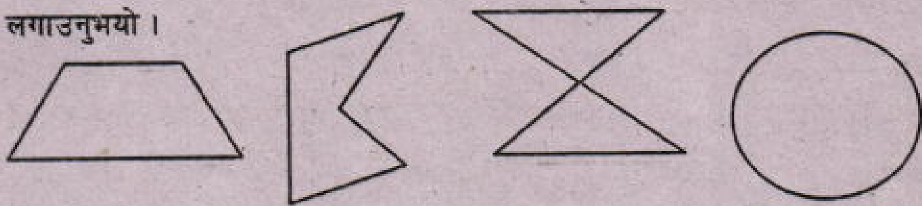
१. परिचय

ज्यामितीय आकृतिहरूको शिक्षणमा बहुभुजहरूको धारणा महत्वपूर्ण मानिन्छ । त्रिभुज, चतुर्भुज, तथा अन्य बहुभुजहरूको धारणा दिनका लागि दैनिक जीवनमा प्रयोगमा ल्याइने विभिन्न ठोस वस्तुहरूका सतहहरू पनि प्रयोगमा ल्याउन सकिन्छ । यस पाठमा कागज पट्याएर केही नियमित बहुभुजहरूको निर्माण, बाहिरी तथा भित्रीकोणहरूको नापका बारेमा चर्चा गर्ने प्रयाश गरिएको छ ।

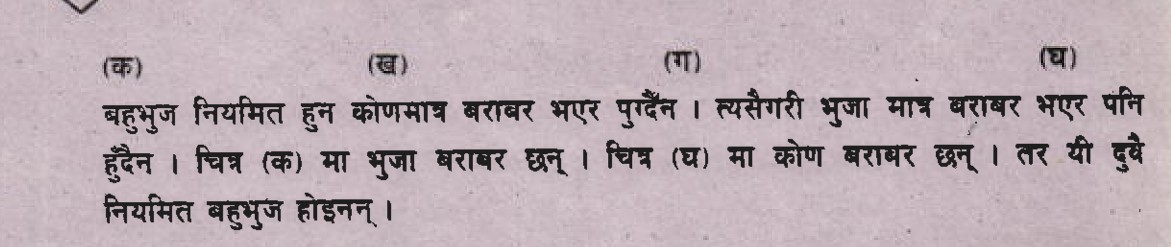
२. विषयवस्तु

बहुभुजहरूको धारणा

शिक्षक बासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई केही चित्रहरू दिई बहुभुज हो कि होइन छुट्टयाउन लगाउनुभयो ।



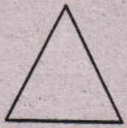
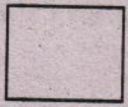
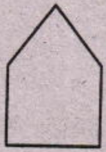
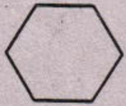
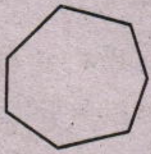
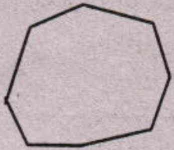
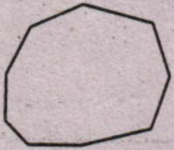
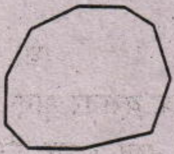
उहाँले विद्यार्थीहरूसँग बहुभुजको परिभाषा सम्बन्धमा छलफल गर्नुभयो । तीन वा तीनभन्दा बढी भुजाले बनेको सरल ज्यामितीय बन्द आकृति नै बहुभुज हो । बहुभुजमा भुजाको लम्बाइ र कोणहरू सबै बराबर छन् भने त्यस्तो बहुभुज नियमित बहुभुज (Regular polygon) हो । तलका चित्रहरू दिएर कुनै नियमित बहुभुज हुन भनी छुट्टयाउन दिनुभयो।

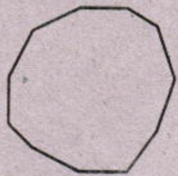


(क) (ख) (ग) (घ)

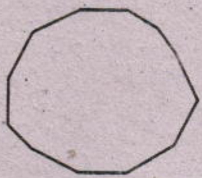
बहुभुज नियमित हुन कोणमात्र बराबर भएर पुग्दैन । त्यसैगरी भुजा मात्र बराबर भएर पनि हुँदैन । चित्र (क) मा भुजा बराबर छन् । चित्र (घ) मा कोण बराबर छन् । तर यी दुवै नियमित बहुभुज होइनन् ।

शिक्षक बासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई विभिन्न बहुभुजहरू खिच्न लगाउनुभयो ।

बहुभुज	**भुजाको सङ्ख्या**	**बहुभुजको नाम**
	३	त्रिभुज
	४	चतुर्भुज
	५	पञ्चभुज
	६	षष्टभुज
	७	सप्तभुज
	८	अष्टभुज
	९	नवभुज
	१०	दशभुज



११ एकादशभुज

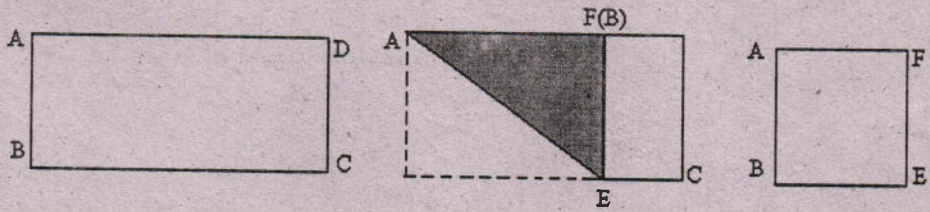


१२ द्वादशभुज

शिक्षक बासुदेवले कागज पट्ट्याएर त्रिभुज, वर्ग, पञ्चभुज, षष्टभुज, अष्टभुज, निर्माण गर्न सिकाउनुभयो ।

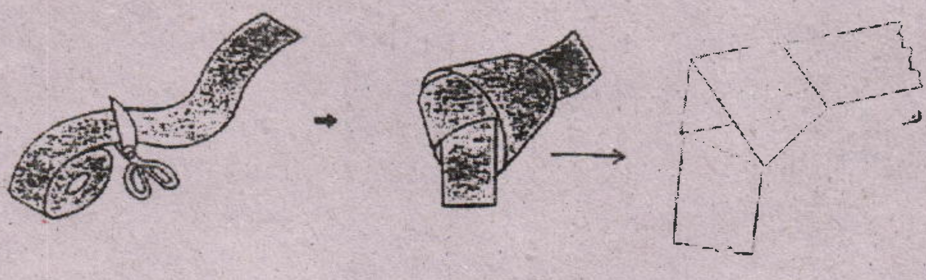
वर्गको निर्माण :

एउटा आयताकार कागजको टुक्रालाई चित्रमा देखाएजस्तै गरी पट्याउने ।



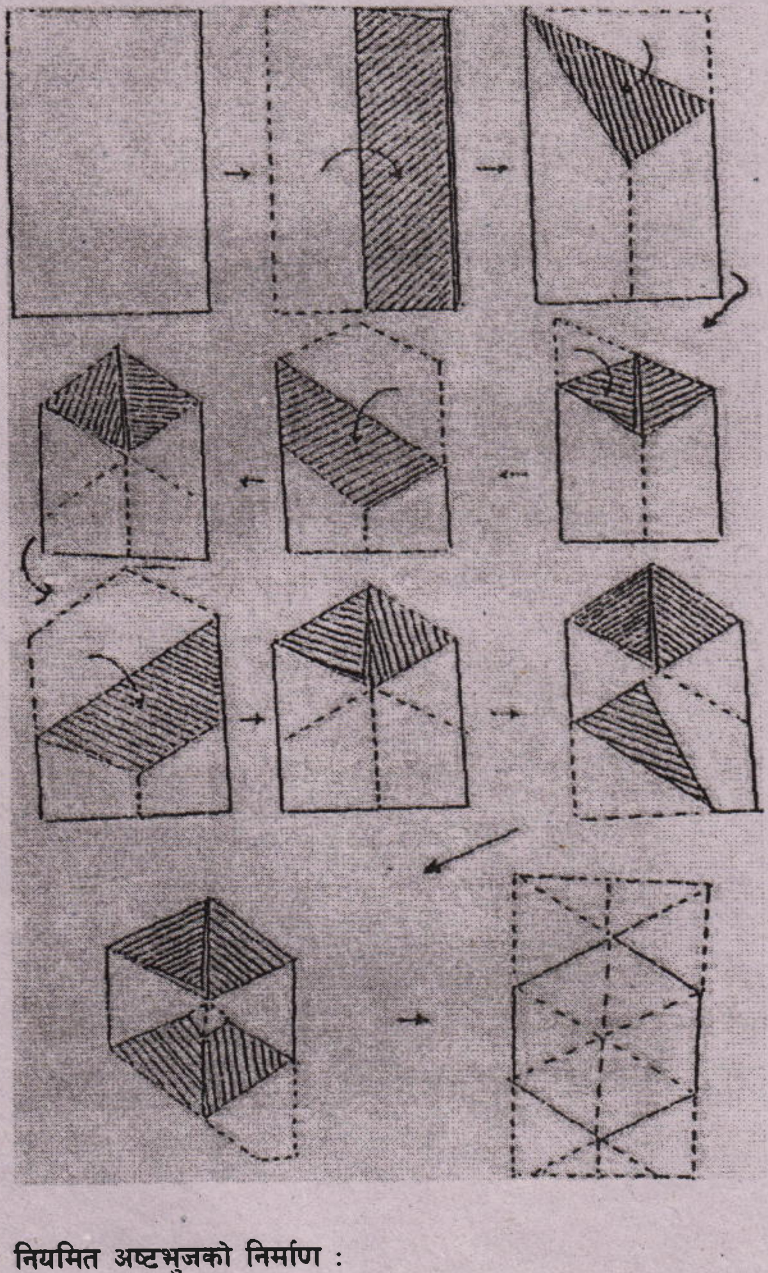
नियमित पञ्चभुजको निर्माण :

एउटा लामो आयताकार कागजको टुक्रा लिने चित्रमा देखाइएअनुसार गाँठो पार्ने । गाँठोलाई कसेर बढी भएको कागजको टुक्रालाई काटेर फालेपछि पञ्चभुज आकृति बन्दछ ।



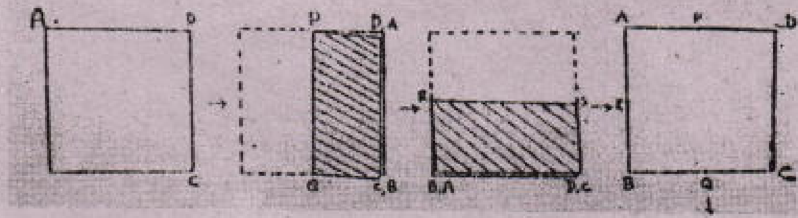
नियमित षष्टभुजको निर्माण :

एउटा आयताकार कागजको टुक्रा लिएर चित्रमा देखाइएअनुसार पट्याउँदै जाने । यसलाई खोलेर हेर्दा बीचमा नियमित षष्टभुज बन्दछ ।

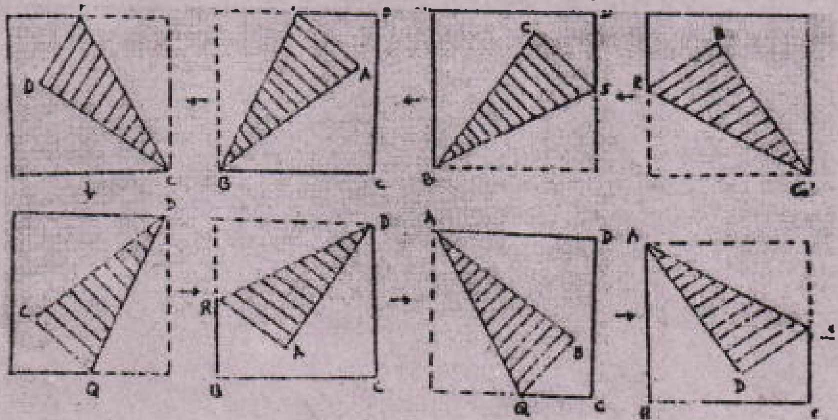


नियमित अष्टभुजको निर्माण :

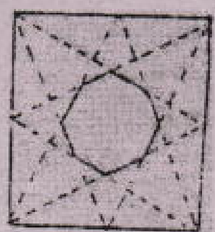
एउटा वर्गाकार कागजको टुक्रा लिने । कागज पट्याएर भुजाहरूका मध्यबिन्दु पत्ता लगाउने ।



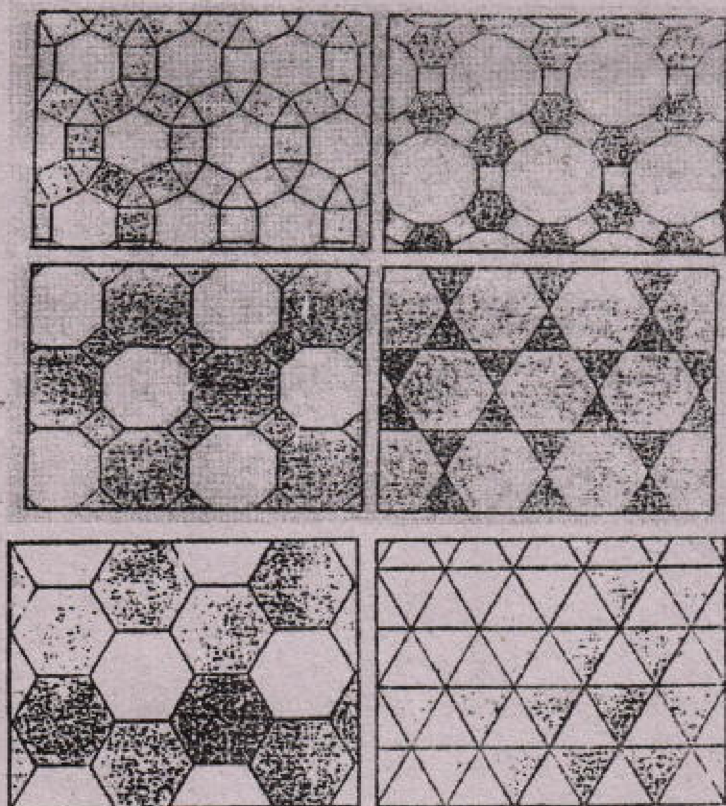
अब, PB, PC, AQ, DQ, DR, CR, BS, AS मा पट्याउँदै जाने ।



यसरी पट्याइसकेपछि पट्याएको भागले कागजमा बनाएको रेखाहरूले तल चित्रमा देखाइए जस्तै अष्टभुज बन्दछ ।



बहुभुजहरूको प्रयोगबाट विभिन्न ढाँचाहरू (Patterns) निर्माण गरी सजाउन पनि सकिन्छ ।



नियमित बहुभुजका भित्री तथा बाहिरीकोणहरूको नाप

शिक्षक बासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई बहुभुजका भित्रीकोण नापेर योगफल निकाल्न लगाउनुभयो ।

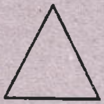
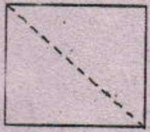
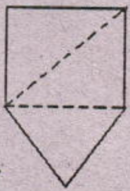
बहुभुज	भित्रीकोणको योगफल
त्रिभुज	180°
चतुर्भुज	360°
पञ्चभुज	540°
....	....
....	....
द्वादशभुज	1800°

तालिकाबाट प्राप्त नतिजा विद्यार्थीहरूलाई विश्लेषण गर्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीहरूले एउटा ढाँचा पत्ता लगाएर बहुभुजका भित्रीकोणको योगफल सबै 180° का अपवर्त्य (Multiple)छन् ।

बहुभुज	भित्रीकोणको योगफल
त्रिभुज	$1 \times 180^\circ$
चतुर्भुज	$2 \times 360^\circ$
पञ्चभुज	$3 \times 540^\circ$

....	....
....	....
द्वादशभुज	10×1800^o

बासुदेव सरले बहुभुजहरूमा विकर्ण त्रिभुजहरूको सङ्ख्या र विकर्ण सङ्ख्या पत्ता लगाउन दिनुभयो ।

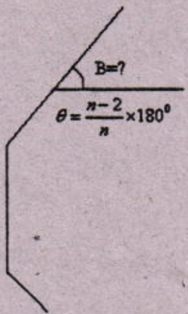
बहुभुज		विकर्णको सङ्ख्या	त्रिभुज सङ्ख्या	भित्रीकोणको योगफल
त्रिभुज		0	1	180^o
चतुर्भुज		1	2	$2\times180^o=360^o$
पञ्चभुज		2	3	$3\times180^o=540^o$
षष्टभुज		3	4	$4\times180^o=720^o$
....				
....				
द्वादशभुज		9	10	$10\times180^o=1800^o$
n भुज		n-3	n-2	$(n-2)180^o$

यसरी विद्यार्थीहरूले n भुजको भित्रीकोणहरूको योगफल निकाल्ने सूत्र पत्ता लगाए ।

n भुजको भित्रीकोणको योगफल $=(n-2)180^o$

यदि n भुज नियमित बहुभुज हो भने सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् । त्यसैले नियमित बहुभुजको भित्रीकोण $\theta = \frac{n-2}{n} \times 180^0$ हुन्छ ।

शिक्षक बासुदेवले एउटा नियमित बहुभुजको कुनै एउटा भुजाबाहिर लम्ब्याउन लगाउनुभयो । यसरी लम्ब्याउँदा बनेको बाहिरीकोणको नाप कति हुन्छ ? सोध्नुभयो ।



यहाँ,

$\theta + B = 180^0$

$B = 180^0 - \theta$

$= 180^0 - \theta$

$= 180^0 - \frac{n-2}{n} \times 180^0$

$= \frac{360^0}{n}$

त्यसेले नियमित बहुभुजको बाहिरीकोण $\frac{360^0}{n}$ हुन्छ ।

उदाहरण १

यदि एउटा बहुभुजको भित्रीकोणहरूको योगफल 1620^0 छ भने त्यो बहुभुजका भुजाहरूको सङ्ख्या कति हुन्छ ?

यहाँ,

मानौं बहुभुजको भुजाहरूको सङ्ख्या n छ ।

$(n - 2)\, 180^0 = 1620^0$

$\therefore\ n = 11$

उदाहरण २

यदि एउटा नियमित बहुभुजको भित्रीकोण 135^0 छ भने त्यो वहुभुजको भुजाहरूको सङ्ख्या कति हुन्छ ?

यहाँ,

बहुभुजको भित्रीकोण = 135^0

बहुभुजको बाहिरीकोण = $180^0 - 135^0 = 45^0$

बहुभुजको भुजको सङ्ख्या = $\frac{360^0}{45^0} = 8$

३. परियोजना कार्य

बहुभुज शिक्षणका लागि एउटा सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्रीहरू

- डा. हिराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण, भूँडी पुराण प्रकाशन ।
- S.M. Maskey, Modern Mathmatics, Ratna Pustak Bhandar.
- R.K. Bansal, Concise Mathematics, Selina Publishers.
- माध्यमिक शिक्षा विकास केन्द्र , गणित प्रशिक्षक निर्देशिकाहरू (मा.वि, नि.मा.वि),
- SEDP, Four Week Inservice Teacher Training Package (Lower Secondary and Secondary)
- शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र, गणित शिक्षण प्रशिक्षक निर्देशिका
- Wally 'wallypop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philippines, NISMED.
- IGNOU, Teaching of Mathematics,
- Morgan Ward et.al, Modern Elementary Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- Paw J. Kelly et. al, Geometry, Eurasia Publishing House (P) Ltd.

पाठ ३ : त्रिभुजहरू

१. परिचय

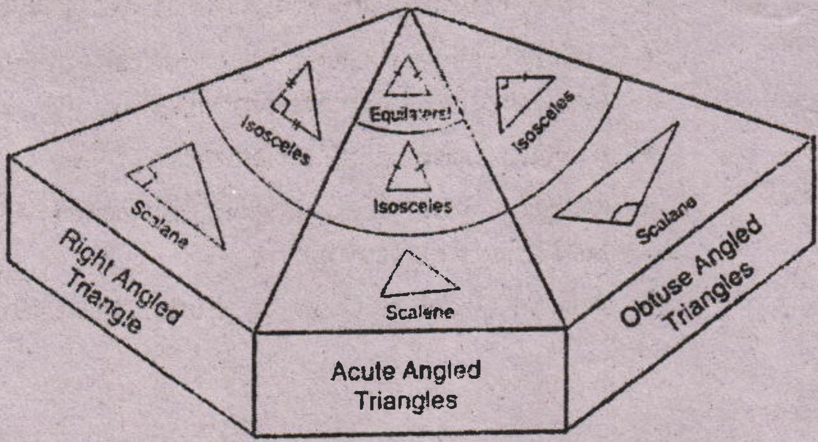
ज्यामिति शिक्षणमा त्रिभुजहरूको धारणा निकै महत्वपूर्ण मानिन्छ । दैनिक जीवनका समस्या समाधान लगायत गणितका विभिन्न क्षेत्रमा त्रिभुज र त्रिभुजका गुणहरूको प्रयोग प्राचीन समय देखि हुँदैआएको पाइन्छ । माध्यमिक तथा निम्नमाध्यमिक तहको गणित पाठ्यक्रममा पनि त्रिभुज समावेश गरिएको छ । यस पाठमा त्रिभुजको वर्गीकरण, त्रिभुजका गुणहरू र तिनको परीक्षण, त्रिभुजको परिमिति र क्षेत्रफल सम्बन्धमा चर्चा गरिएको छ ।

२. विषयवस्तु

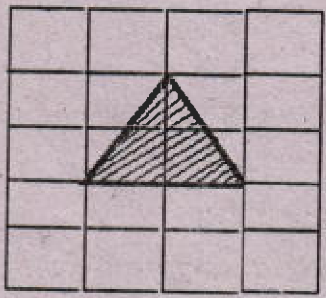
२.१ त्रिभुजको वर्गीकरण

शिक्षक बासुदेवले त्रिभुजसम्बन्धी पाठ शिक्षण गर्दैहुनुहुन्छ । त्रिभुजको परिभाषा, भुजा, कोण, शीर्षविन्दु, बाह्यकोणको बारेमा छलफल भए । उहाँले विद्यार्थीहरूलाई समूह विभाजन गर्नुभयो । भुजा तथा कोणको नाप फरक फरक भएका त्रिभुजाकार कागजका टुक्राहरू निर्माण गर्न लगानुभयो । भुजा तथा कोणका आधारमा त्रिभुजको नामाकरण गरी वर्गीकरण गर्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीहरूले निम्नअनुसार वर्गीकरण गरे ।

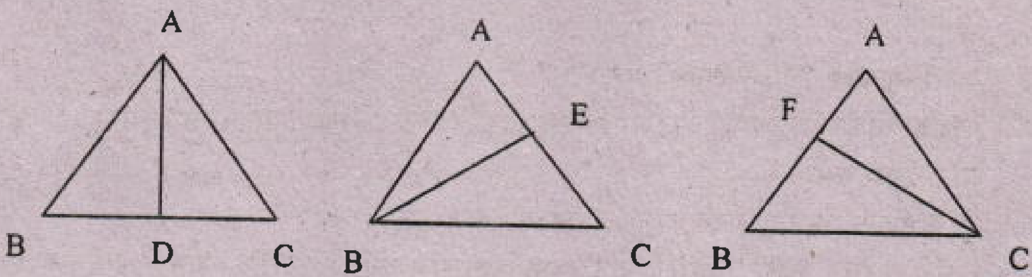
भुजाका आधारमा
समबाहु त्रिभुज
समद्विबाहु त्रिभुज
विषमबाहु त्रिभुज
कोणका आधारमा
समकोणी त्रिभुज
न्युनकोणी त्रिभुज
अधिककोणी त्रिभुज



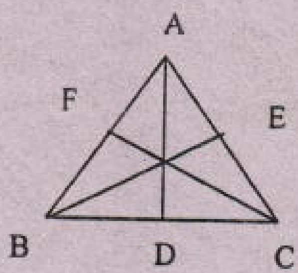
विद्यार्थीहरूले जियोवोर्ड प्रयोग गरी विभिन्न किसिमका त्रिभुजहरू प्रदर्शन गरे ।



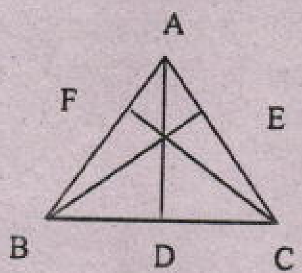
मध्यिका (Median) र उचाइ (Altitude) का बारेमा छलफल भए । कुनै भुजाको मध्यविन्दु र सो भुजाको विपरीत शीर्षविन्दु जोड्ने रेखा नै मध्यिका हो ।



जुनसुकै त्रिभुजमा तिनओटा मध्यिकाहरू हुन्छन् र ती सबै समविन्दुगामी हुन्छन् । कुनै पनि त्रिभुजका मध्यिकाहरू प्रतिच्छेदन हुने विन्दुलाई Centroid भनिन्छ । Centroid ले मध्यिकाहरूलाई सधै 2:1 को अनुपातमा विभाजन गर्दछ ।



त्रिभुजमा कुनै शीर्षविन्दुबाट त्यसको विपरीत भुजामा खिचिएको लम्बको दूरी नै उचाइ हो । जुनसुकै त्रिभुजमा तिनओटा उचाइहरू हुन्छन् र ती सबै समविन्दुगामी हुन्छन् । कुनै पनि त्रिभुजका उचाइहरू प्रतिच्छेदन हुने विन्दुलाई Orthocentre भनिन्छ ।



२.२ त्रिभुजका गुणहरू

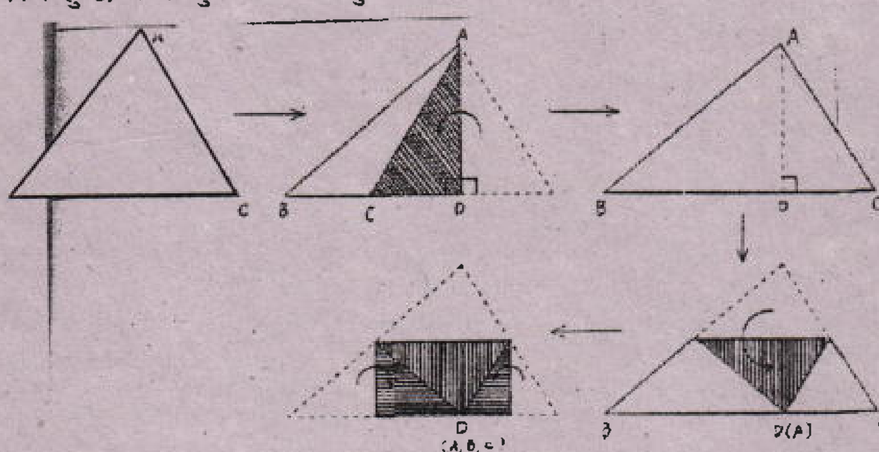
- त्रिभुजका भित्रीकोणहरूको योग दुईसमकोण हुन्छ ।
- त्रिभुजको एउटा भुजा लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरीकोण त्यससँग अनासन्न दुईओटा भित्रीकोणहरूको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।
- त्रिभुजको कुनै दुईओटा भुजाको योगफल तेस्रो भुजाभन्दा बढी हुन्छ ।
- त्रिभुजको ठूलो कोणको सम्मुख भुजा सानो कोणको सम्मुख भुजाभन्दा लामो हुन्छ ।
- समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
- समबाहु त्रिभुजका सबै कोणहरू 60° हुन्छन् ।

२.३ त्रिभुजका केही गुणहरूको परीक्षण

शिक्षक बासुदेवले कागज पट्याएर त्रिभुजका गुणहरू परीक्षण गर्न लगाउनुभयो । आफूले पनि गरेर देखाउनुभयो ।

१. त्रिभुजका भित्रीकोणहरूको जोड दुई समकोण हुन्छ ।

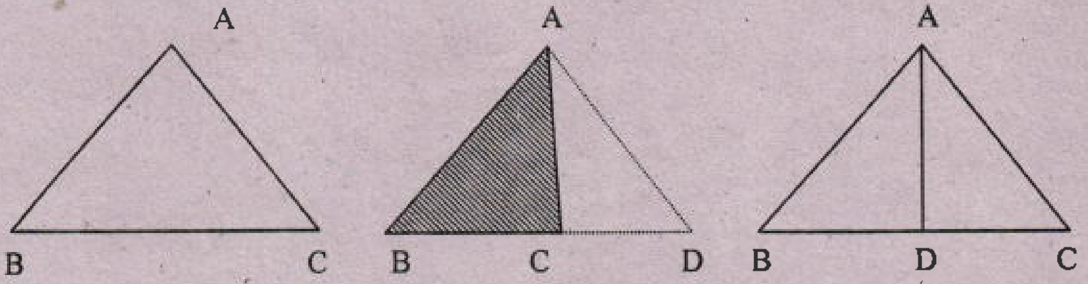
त्रिभुज ABC काटेर निकाल्ने र चित्रमा देखाइएअनुसार पट्याउँदै जाने । अन्त्यमा त्रिभुजका तिन ओटै कोणहरू एउटै सीधा रेखामा मिल्दछन् । यसबाट त्रिभुजका भित्रीकोणहरूको जोड दुई समकोण हुन्छ भन्ने कुरा प्रमाणित हुन्छ ।



त्रिभुजका कोणहरू काटेर निकालेर पनि भित्रीकोणहरूको जोड दुई समकोण हुन्छ भन्ने कुरा देखाउन सकिन्छ । यसका लागि त्रिभुजका तिनओटै कोणहरू काटेर निकाल्ने र एउटा सीधारेखामा मिलाउने ।

२. समद्विबाहु त्रिभुजका गुणहरूको परीक्षण

दुईओटा भुजाहरू बराबर भएका त्रिभुजाकार कागजका टुक्रा लिएर चित्रमा देखाइएअनुसार पट्याउदै जाने ।



अवलोकन

भुजा AB = AC भएको समद्विबाहु त्रिभुजलाई विन्दु B र C एकै ठाउँमा पर्ने गरी पट्याउदा $AD \perp BC$ हुन्छ ।

$A \rightarrow A$, $C \rightarrow B$ बाट $AC \rightarrow AB$

$A \rightarrow A$, $D \rightarrow D$ बाट $AD \rightarrow AD$

त्यसैले, $\angle BAD = \angle CAD$

फेरि $B \rightarrow AC$, $AB \rightarrow AC$ र $BD \rightarrow DC$

त्यसैले, $\angle ABD = \angle ACD$

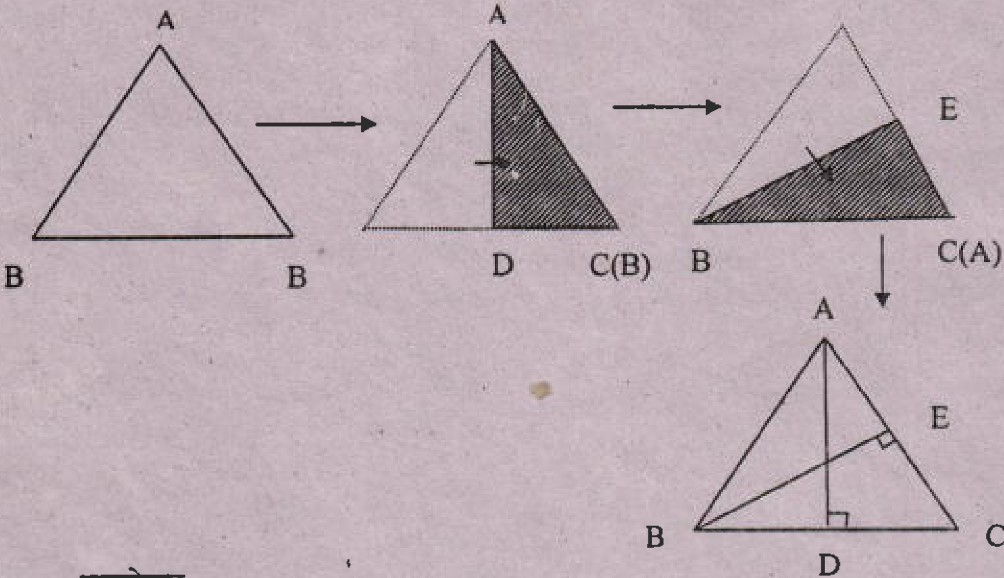
$\angle ABC = \angle ACD$

निश्कर्ष

- समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षविन्दुबाट आधारमा खिचेको लम्वले शीर्षकोणलाई आधा गर्छ ।
- समद्विबाहु त्रिभुजकों बराबर भुजाले आधार रेखासँग बनाएका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

३. समबाहु त्रिभुजका गुणहरूको परीक्षण

एउटा समबाहु त्रिभुजकार कागजको टुक्रा लिने र चित्रमा देखाइएअनुसार पट्याउँदै जाने ।



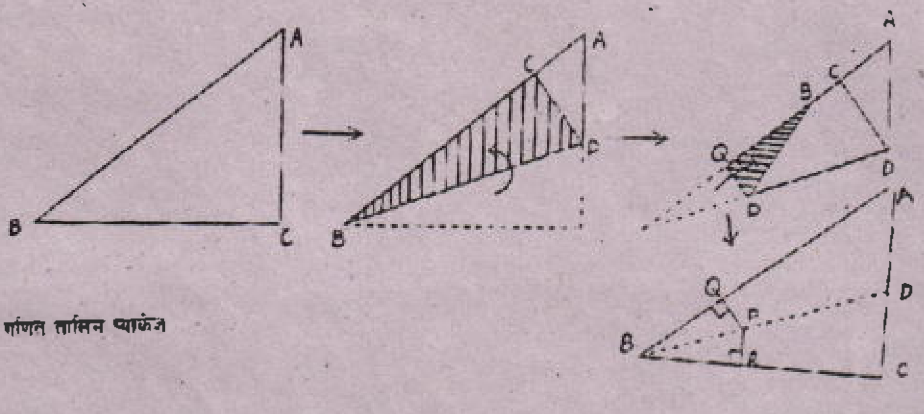
अवलोकन

भुजाहरू AB = BC= CA भएको त्रिभुजको शीर्षविन्दु B लाई C मा पर्ने गरी पट्याउँदा AD $\perp$ BC र A लाई C मा पर्ने गरी पट्याउदा BE $\perp$ AC हुन्छ । Δ ABC लाई AD मा पट्याउदा A $\rightarrow$A , B $\rightarrow$C AC $\rightarrow$AB , $\angle$ABC = $\angle$ ACB हुन्छ । त्यसैगरी Δ ABC लाई BE मा पट्याउदा A $\rightarrow$C , AB $\rightarrow$BC $\angle$BAC = $\angle$ BCA हुन्छ । A लाई B मा पर्ने गरी पट्याएर $\angle$ABC = $\angle$ BACA देखाउन सकिन्छ ।

निष्कर्ष

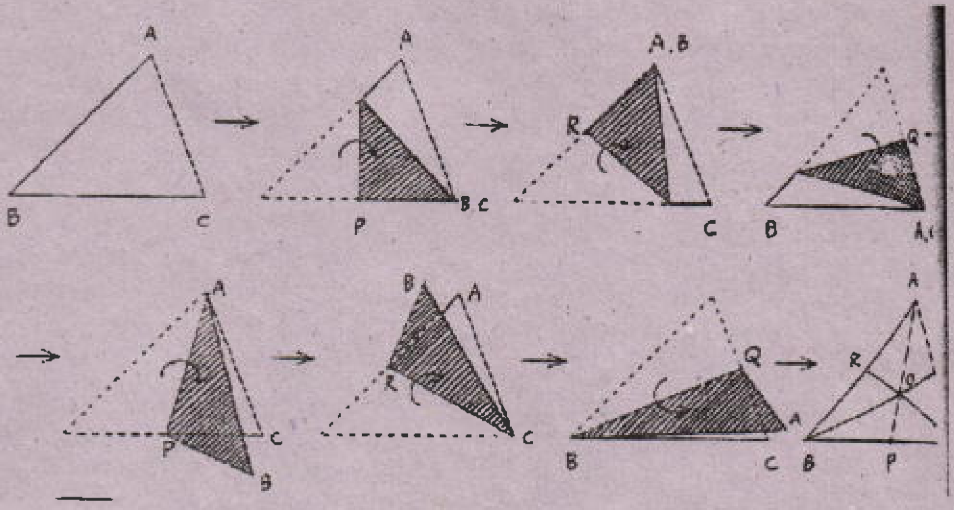
समबाहु त्रिभुजका सबैकोणहरू बराबर हुन्छन् ।

४. त्रिभुजका कोणका अर्धकमा परेका प्रत्येक विन्दु कोणका भुजाबाट समदूरीमा पर्दछन् ।

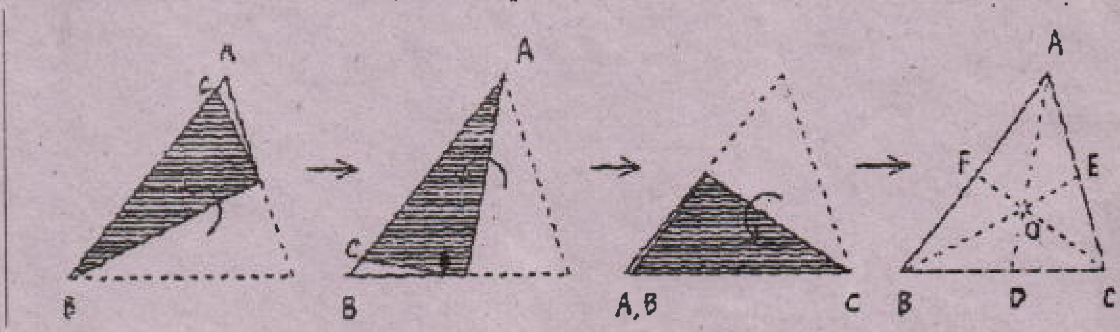


गणित तालिम प्याकेज

५. त्रिभुजका मध्यिकाहरू समविन्दुगामी हुन्छन् ।



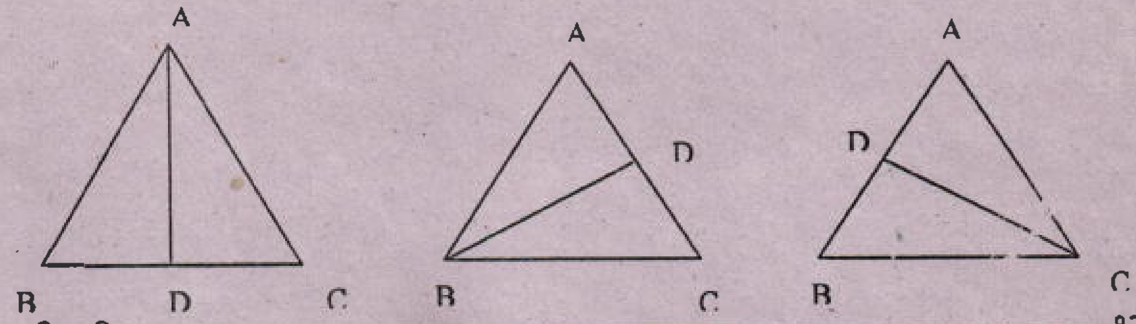
६.कोणका अर्धकहरू समविन्दुगामी हुन्छन् ।



२.५ त्रिभुजको परिमिति र क्षेत्रफल

त्रिभुजको परिमिति र क्षेत्रफल सम्बन्धमा पनि छलफल भए ।

त्रिभुजको क्षेत्रफल = 1/2 आधार × उचाइ हुन्छ । यहाँ उचाइ भन्नाले विपरीत शीर्षविन्दुबाट आधार सम्मको लम्बको दुरी भन्ने बुझिन्छ । त्रिभुजमा जुनसुकै भुजालाई पनि आधार मानेर क्षेत्रफल निकाल्न सकिन्छ ।



यदि एउटा त्रिभुजका भुजाहरू a, b, c छन् भने सो त्रिभुजको

परिमिति $= a + b + c$

क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ हुन्छ ।

यदि त्रिभुज समबाहु त्रिभुज छ र एउटा भुजा a छ भने

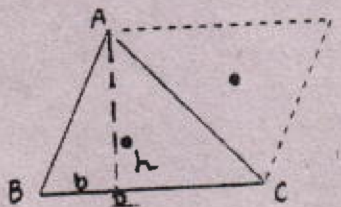
परिमिति $= 3a$ र

क्षेत्रफल $= (\sqrt{3}/4)\, a^2$ हुन्छ

शिक्षक वासुदेवले कागज काटेर/पट्याएर त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सुत्र प्रमाणित गराउनु भयो ।

त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र दुई तरिकाबाट प्रमाणित गर्न सकिन्छ । दायाँको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुजलाई विकर्णमा काटेर बराबर त्रिभुज बनाइएको छ ।

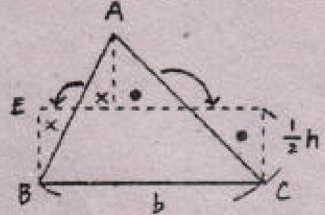
ΔABC को क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}\, b \times h$



त्रिभुजाकार कागजको

टुक्रालाई चित्रमा देखाइएअनुसार काटेर आयातमा परिणत गरी त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र प्रमाणित गर्न सकिन्छ । यसबाट पनि

ΔABC को क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}\, b \times h$ हुन्छ भन्ने कुरा प्रमाणित हुन्छ ।



शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई त्रिभुजका क्षेत्रफलसम्बन्धी विभिन्न खालका समस्याहरू हल गर्न लगाउनुभयो ।

१. भुजाहरू 17 cm, 8cm र 15 cm भएको त्रिभुजको सबभन्दा लामो भुजामा खिचिएको उचाइ पत्तालगाउनुहोस् । (7.06 cm)

२.परिमिति 15 cm भएको समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? (10.825 sq cm)

३.उचाइ 20 cm भएको समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? (230.9 sq cm)

४.भुजा 5 cm र आधार 6 cm भएको समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्तालगाउनुहोस् । (12 sq cm)

५.एउटा समकोण त्रिभुजका समकोण बनाउने भुजाहरू 5x cm र 3x (1 cm छन् । सो त्रिभुजको क्षेत्रफल 60 cm^2 छ भने ती भुजाहरूको लम्बाइ पत्तालगाउनुहोस् । (15 cm र 8 cm)

३. परियोजन कार्य :

क) त्रिभुज पाठ शिक्षणका लागि एउटा शिक्षण मोडुल तयार पारी आफ्नो विद्यालयमा परीक्षण गर्नुहोस् ख) विद्यार्थीहरूलाई कागज पट्याएर त्रिभुजका गुणहरू परीक्षण गर्न लगाउनुहोस् । यसबाट विद्यार्थीहरूको सिकाइमा परेको प्रभाव बारेमा उल्लेखगरी प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- डा. हिराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण, भूँडी पुराण प्रकाशन ।
- S.M. Maskey, Modern Mathmatics, Ratna Pustak Bhandar.
- R.K. Bansal, Concise Mathematics, Selina Publishers.
- माध्यमिक शिक्षा विकास केन्द्र , गणित प्रशिक्षक निर्देशिकाहरू (मा.वि, नि.मा.वि),
- SEDP, Four Week Inservice Teacher Training Package (Lower Secondary and Secondary)
- शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र, गणित शिक्षण प्रशिक्षक निर्देशिका
- Wally 'wallypop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philippines, NISMED.

पाठ ४ : त्रिभुजको समरूपता (Similarity) र अनुरूपता (Congruency)

१. परिचय

साधारणतया हामी घरको छानोमा झिङ्गटीले छाएको देख्छौं । ती झिङ्गटीको आकार उत्रै र उस्तै देखेका छौं । ती आकारहरू अनुरूप आकारहरू हुन् । टेसिलेसन, घरको झ्यालका बुट्टाहरू हुन्छ भने स्टुडियोमा राखिएको एकै जना मानिसको उही र फरकफरक साइजका फोटोहरूचाहिँ अनुरूपता र समरूपताका व्यवहारिक उदाहरणहरू हुन् । ज्यामिति शिक्षणमा समरूपता र अनुरूपताको प्रयोग प्रशस्त मात्रामा भएको पाइन्छ । यस पाठमा त्रिभुजको अनुरूपता, समरूपता र पाइथागोरस साध्यका सम्बन्धमा चर्चा गरिन्छ ।

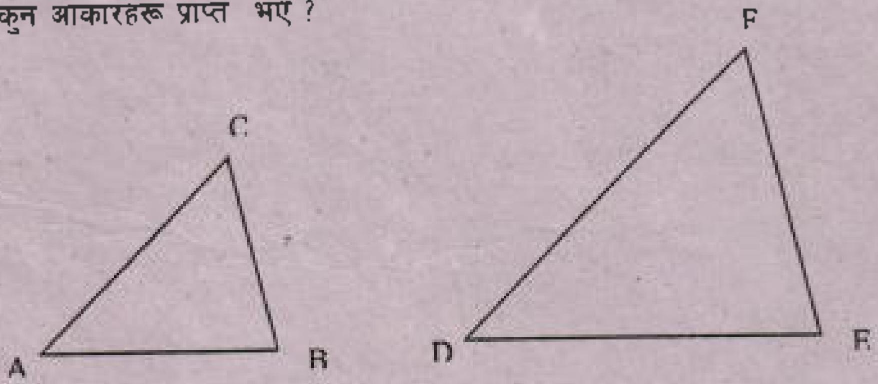
२. विषयवस्तु

२.१ त्रिभुजको समरूपता

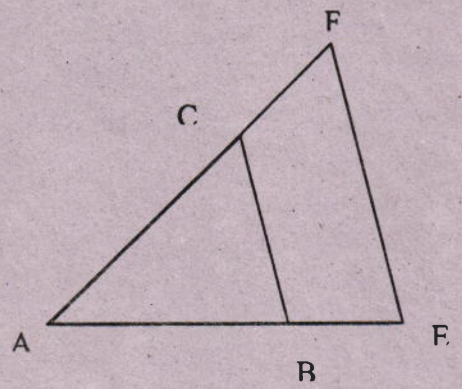
शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई निम्नलिखित क्रियाकलापहरू गराउनुभयो ।

6cm र 9cm नाप भएका दुईओटा रेखाखण्डहरू खिच । क्रमशः AB र DE नामाकरण गर । AB र DE सित क्रमशः A र D मा 60° को कोण खिच । त्यस्तै गरी B र E मा 75° को कोण खिच । ती कोणहरूका बाहुहरू क्रमश : C र F मा काटिनेछन् ।

कुनकुन आकारहरू प्राप्त भए ?



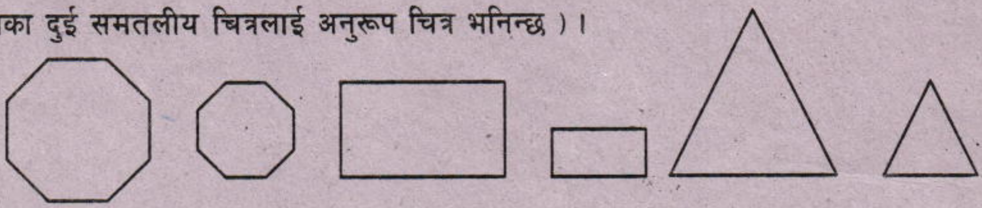
कोण A लाई D मा र AB लाई DE मा र B लाई E मा राख । के ती दुबै त्रिभुजहरू उही आकारका छन् ? के ती बराबर नापका छन् ?



यदि AB र DE तथा AC र DF का लम्बाइहरू बराबर भएको भए के हुने थियो ?

शिक्षक वासुदेवले जियोवोर्ड प्रयोगबाट विभिन्न प्रकारका त्रिभुजहरू देखाउँदै समरूप त्रिभुजको धारणा दिनुभयो ।

उही आकारका दुई समतलीय चित्रहरूलाई समरूप चित्र भनिन्छ । (उही आकार र उही नापका दुई समतलीय चित्रलाई अनुरूप चित्र भनिन्छ) ।



यदि दुई त्रिभुजहरूका सङ्गति कोणहरू बराबर छन् र सङ्गति भुजाहरू समानुपातमा छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । कोणहरू बराबर भएर मात्र ज्यामितीय चित्रहरू समरूप हुन सक्दैन । वर्ग र आयातमा सबै कोणहरू बराबर हुन्छन तर ती चित्रहरू समरूप हुदैनन् ।

माथिका दुई त्रिभुजहरू ABC र DEF मा

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ र $\angle C = \angle F$ छन् । त्यसैगरी

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ छन् । अर्थात् AB:BC:AC = DE:EF:DF छन् ।

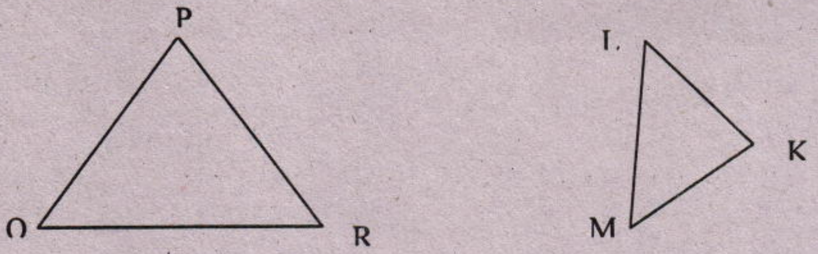
त्यसैले $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ छन् ।

सङ्गति भुजा सङ्गति कोण

समरूप त्रिभुजमा बराबर कोणका सम्मुख भुजाहरूलाई सङ्गति भुजा भनिन्छ ।

जस्तै तलका दुई समरूप त्रिभुजहरूमा ($\Delta ABC \sim \Delta DEF$)

$\angle O = \angle L$ छन् भने ती कोणका सम्मुख भुजाहरू PR र KM सङ्गति भुजाहरू हुन् ।



त्यसैगरी समरूप त्रिभुजका समानुपातमा भएका भुजाहरूका सम्मुख कोणहरूलाई सङ्गति कोण भनिन्छ । जस्तै $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ मा $\frac{OR}{LM} = \frac{PR}{KM}$ भएमा $\angle R$ र $\angle M$ सङ्गति कोणहरू हुन् ।

शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई विभिन्न खालका अनुरूप त्रिभुजहरू दिएर सङ्गति भुजा र सँगति कोणहरू पत्तालगाउने अभ्यास गराउनुभयो ।

उहाँले विद्यार्थीहरूलाई

- दुई समानकोणका त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । (AAA Postulate)
- दुई त्रिभुजमा एक एक कोणहरू बराबर छन् र ती कोणहरू बनाउने भुजाहरू समानुपातमा छन् भने ती त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । (SAS Postulate)
- तीनओटै सँगति भुजाहरू समानुपातमा भएका त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । (SSS Postulate)

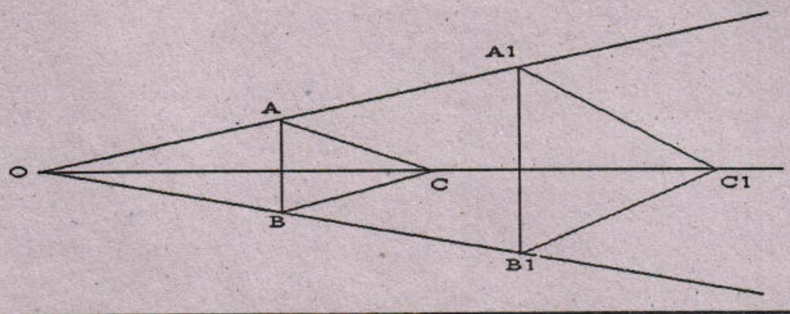
भन्ने कुरा प्रयोगात्मक परीक्षण गराउनु भयो ।

शिक्षक वासुदेवले समरूप बहुभुजहरूका बारेमा पनि छलफल गराउनुभयो ।

साइज स्थानान्तरणको रूपमा समरूपता

समरूपतालाई साइज स्थानान्तरका रूपमा पनि परिभाषित गर्ने गरेको पाइन्छ । उदाहरणका लागि तलको चित्रमा Δ ABC लाई केन्द्रविन्दु O बाट दुई गुना विस्तार गर्दा $\Delta A_1B_1C_1$ बनेको छ । (विस्तारको नापो २ छ)

त्यसैले $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ छ ।

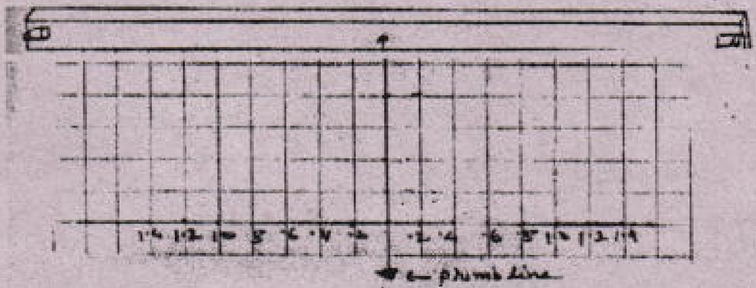


कुनै चित्रलाई कुनै निश्चित नापो लिएर विस्तार वा सङ्कुचन गर्दा प्राप्त हुने चित्र पहिलेको चित्रसँग समरूप हुन्छ ।

त्रिभुजको समरूपताको प्रयोग

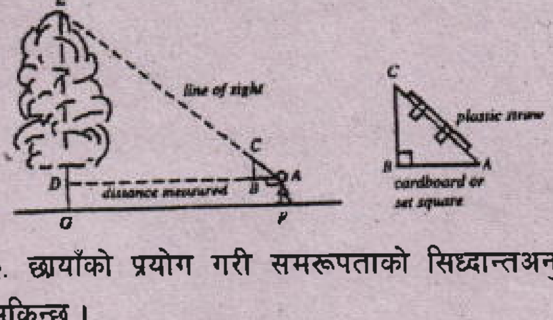
त्रिभुजको समरूपता विभिन्न क्षेत्रमा प्रयोग हुन्छ । उदाहरणका लागि दुरी र उचाइसम्बन्धी समस्या समाधानका लागि त्रिभुजको समरूपताको प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

१. हिप्सोमिटर प्रयोग गरी दुरी र उचाइसम्बन्धी समस्याहरू समाधान गर्दा त्रिभुजको समरूपताको सिध्दान्तको प्रयोग हुन्छ ।

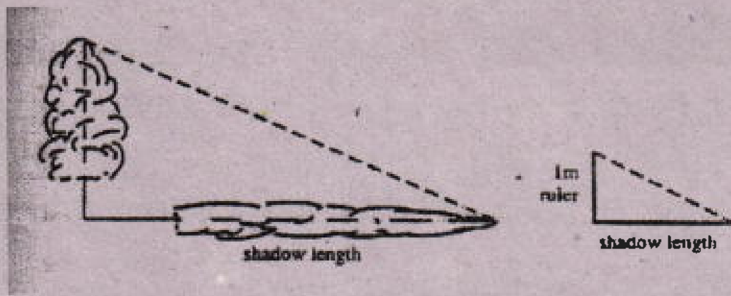


हिप्सोमीटर प्रयोग गरी कुनै रुखको उचाइ पत्तालगाउनु पर्ने छ भने दृष्टिरेखाबाट रुखको टुप्पोलाई हेर्ने र त्यही बेला प्लम्बलाईनले तेर्सो रेखा (स्केल) मा छोएको विन्दुको मान टिपोट गर्ने । अनि दृष्टिविन्दुबाट रुखको फेदसम्मको दुरी पनि नाप्ने । रुखको उचाइ, दुरी र दृष्टिरेखाले बनाएको समकोण त्रिभुज र हिप्सोमीटरमा प्लम्बलाईन, ठाडो र तेर्सो रेखाले बनाएको समकोण त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् । त्यसैले रुखको उचाइ र दृष्टिविन्दुदेखि फेदसम्मको दुरीको अनुपात र हिप्सोमीटरको ठाडो स्केल र तेर्सो स्केलको अनुपात बराबर हुन्छ । यसरी रुख उचाइ थाहा भएमा रुखको फेदसम्मको दुरी निकाल्न सकिन्छ भने रुखको फेदसम्मको दूरी थाहा भएमा रुखको उचाइ पत्तालगाउन सकिन्छ ।

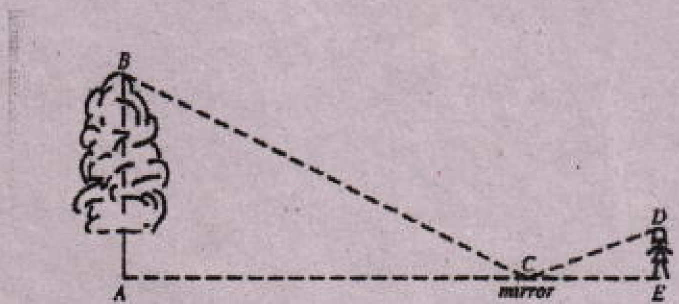
२.साधारण समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजको सहयोगबाट समरूपताको सिध्दान्तको प्रयोग गरी उचाइसम्बन्धी समस्या समाधान गर्न सकिन्छ ।



३. छायाँको प्रयोग गरी समरूपताको सिध्दान्तअनुसार उचाइसम्बन्धी समस्या समाधान गर्न सकिन्छ ।



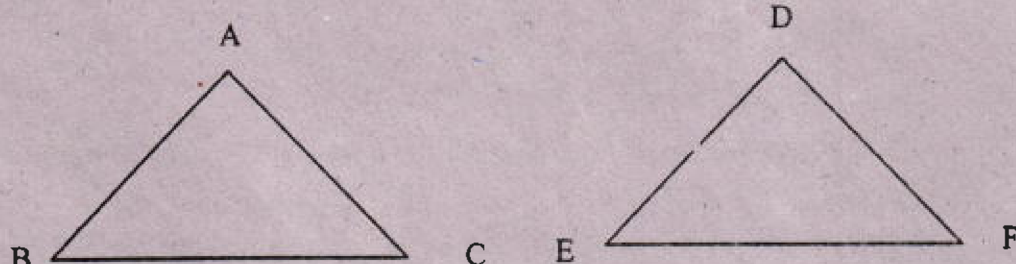
४. ऐनाको प्रयोग गरी समरूपताको सिध्दान्तअनुसार उचाइसम्बन्धी समस्या समाधान गर्न सकिन्छ ।



२.३ त्रिभुजको अनुरूपता

एउटै आकार र नापका दुई ज्यामितीय आकृतिहरूलाई अनुरूप आकृति भनिन्छ । एउटा त्रिभुज अर्को त्रिभुजमाथि खप्ट्याउँदा ठिक्क मिल्दछन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । अनुरूप त्रिभुज सबै समरूप हुन्छन् तर सबै समरूप त्रिभुजहरू अनुरूप हुँदैनन् । समरूप त्रिभुजका सँगति भुजाहरू समानुपातमा हुन्छन् भने अनुरूप त्रिभुजका सँगति भुजाहरू बराबर हुन्छन् । एउटा त्रिभुजका सबै भुजा र सबै कोणहरू अर्को त्रिभुजका सँगति भुजा र कोणहरूसँग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । बराबर नाप र उस्तै आकारका दुई त्रिभुजका टुक्राहरूलाई एउटामाथि अर्को खप्ट्याएर विद्यार्थीहरूलाई अनुरूप त्रिभुजको धारणा दिन सकिन्छ ।

तलका चित्रहरूमा



AB = DE , BC = EF , AC = DE र $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ छन् भने

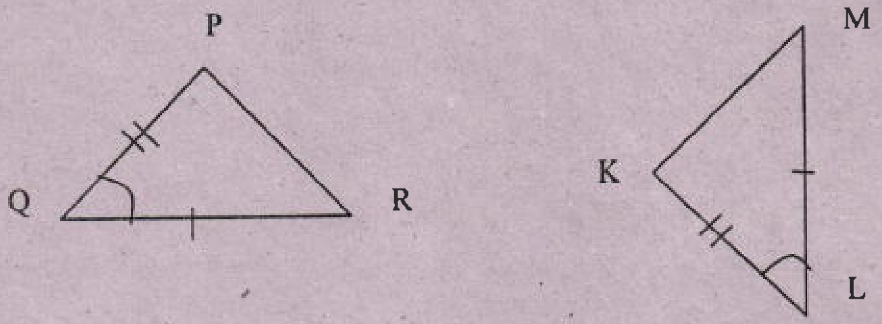
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ हुन्छन् ।

नोट:

१. अनुरूप त्रिभुजहरू एउटामाथि अर्को खप्ट्याउँदा सबै ठिक्क मिल्दछन् (Coincide)।
२. अनुरूप त्रिभुजहरूमा खप्ट्याउँदा ठिक्क मिल्ने भुजाहरूलाई संगति भुजाहरू र ठिक्क मिल्ने कोणहरूलाई संगति कोणहरू भनिन्छ ।
३. बराबर भुजाका सम्मुख कोणहरू सँगति कोणहरू हुन् भने बराबर कोणका सम्मुख भुजाहरू सँगति भुजाहरू हुन् ।.
४. अनुरूप त्रिभुजका सँगति भागहरू पनि अनुरूप नै हुन्छन् ।

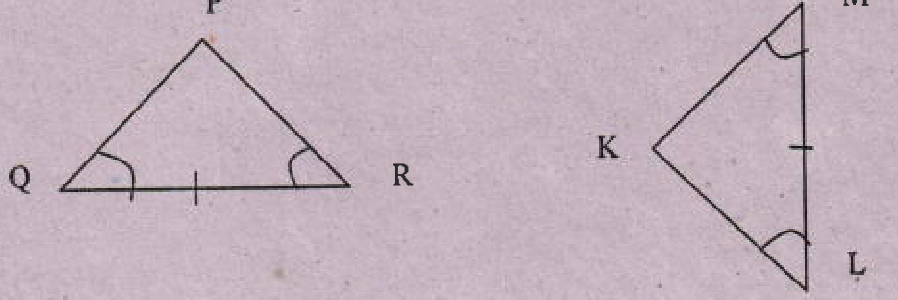
अनुरूप त्रिभुजका शर्तहरू

१. एउटा त्रिभुजका दुईभुजा र त्यसमा परेको कोण अर्को त्रिभुजका दुईभुजा र त्यसमा परेको कोणसँग क्रमश अलग अलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (भु.को.भु अर्थात् SAS स्वयम् सिध्द तथ्य)



सँगैको चित्रमा PQ = KL , $\angle Q = \angle L$ र QR = LM भए $\Delta PQR \cong \Delta KLM$ हुन्छ

२. एउटा त्रिभुजका दुईकोण र त्यसमा परेको भुजा अर्को त्रिभुजका दुईकोण र त्यसमा परेको भुजासँग क्रमश अलग अलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (को.भु.को. अर्थात् ASA स्वयम् सिध्द तथ्य)



सँगैको चित्रमा $\angle Q = \angle L$, $QR = LM$ र $\angle R = \angle M$ भए $\Delta PQR \cong \Delta KLM$ हुन्छ

३. एउटा त्रिभुजका तिनओटा भुजा अर्को त्रिभुजका तिनओटा भुजासँग क्रमश अलग अलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (भु.भु.भु. अर्थात् SSS सिध्दान्त)

४.एउटा समकोण त्रिभुजको कर्ण र एउटा भुजा अर्को समकोण त्रिभुजको कर्ण र भुजासँग क्रमश अलग अलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (स.क.भु.. अर्थात् RHS सिध्दान्त)

५. एउटा त्रिभुजको एउटा भुजा, त्यसमा परेको एउटा कोण र त्यसको सम्मुख कोण अर्को त्रिभुजको एउटा भुजा, त्यसमा परेको एउटा कोण र त्यसको सम्मुख कोणसँग क्रमश: अलग अलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (भु.को.को. अर्थात् SAA सिध्दान्त)

भुजा र कोणहरूका अलग अलग नाप लिएर तालिका भर्न लगाई अनुरूप त्रिभुजसम्बन्धी यी तथ्य वा सिध्दान्तहरूको विद्यार्थीहरूलाई प्रयोगात्मक परीक्षण गराउन सकिन्छ । ज्यामितीय साध्यहरू प्रमाणित गर्दा त्रिभुजको अनुरूपताको प्रयोग प्रशस्त मात्रामा हुन्छ ।

३. परियोजन कार्य :

- 3cm, 4cm, 5cm नापका भुजाहरू भएका त्रिभुज खिच्नुहोस् । 6cm, 8cm, 10cm नापका भुजाहरू भएका अर्को त्रिभुज खिच्नुहोस् । ती त्रिभुजहरूका कोणहरू नाप्नुहोस् र दाँज्नुहोस् । ती त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् भनी तपाईं कसरी देखाउन सक्नुहुन्छ ?
- 4cm, 5cm नापका भुजाहरू र एउटा कोण 45^{o} भएको एउटा त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् । 6cm, 7.5cm र एउटा कोण 45^{o} को अर्को त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् । ती त्रिभुजहरूबीच दाँज्नुहोस् र ती त्रिभुजहरूका कोणहरूको नाप लेख्नुहोस् । पहिलो र दोस्रो त्रिभुजहरूका तेस्रो भुजाहरूका अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् । बाँकी अन्य दुई सङ्गत भुजाहरूका अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् । तपाईं कसरी ती दुई त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् भनी देखाउन सक्नुहुन्छ ?
- ज्यामिति शिक्षणमा त्रिभुजको अनुरूपताको प्रयोग सम्बन्धमा एउटा लेख तयार गर्नुहोस् ।

पाठ पाँच : चतुर्भुज

१. परिचय :

हामीले दैनिक जीवनमा प्रयोग गर्ने थुप्रै वस्तुहरूका सतहका आकार चारपाटे वा चतुर्भुज आकारमा पाउँदछौं । जस्तै हामीले कक्षाकोठामा प्रयोग गर्ने कालोपाटी वा सेतो पाटी, डस्टर, सूचना पाटी, पुस्तक, अभ्यास पुस्तिका इत्यादि वस्तुहरूका आकार चारपाटे छन् । विपरीत किनाराहरू समानान्तर छन् । भौतिक वस्तुहरूको सतहका आकार प्रयोग गरी विभिन्न किसिमका चतुर्भुजहरूको धारणा दिन सकिन्छ । यस पाठमा समलम्ब चतुर्भुज, समानान्तर चर्तुर्भुज, वर्ग, आयात, समबाहु चतुर्भुज, चङ्गाको बारेमा चर्चा गर्ने प्रयास गरिएको छ ।

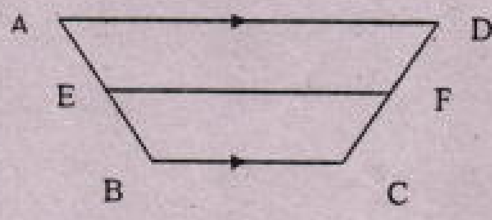
२. विषयवस्तु :

२.१ चतुर्भुजका गुणहरू

शिक्षक वासुदेव चतुर्भुज पाठ शिक्षण गर्दैहुनुहुन्छ । उहाँले जियोवोर्डमा रवर व्याण्ड प्रयोग गरी विभिन्न किसिमका चतुर्भुजहरू बनाएर विद्यार्थीहरूलाई देखाउनुभयो । विद्यार्थीहरूलाई पनि बनाउन दिनुभयो । चतुर्भूजको परिभाषा बारेमा छलफल गर्नुभयो । चारओटा सरल रेखाखण्डहरूबाट घेरिएको बन्द आकृतिलाई चतुर्भुज भनिन्छ । चतुर्भुजका विपरीत शीर्षविन्दुहरू जोड्ने सरल रेखाखण्डहरूलाई विकर्ण भनिन्छ । उहाँले विद्यार्थीहरूलाई समूहमा बाँड्नुभयो र विभिन्न समूहलाई विभिन्न किसिमका चतुर्भुजहरू बनाउन लगाउनुभयो ।

क) समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium)

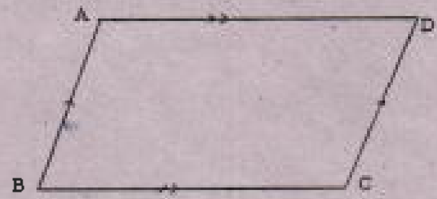
कुनै पनि दुई भुजाहरू समानान्तर भएका र बाँकी दुई भुजाहरू समानान्तर नभएंका चतुर्भुजलाई समलम्ब चतुर्भुज भनिन्छ । समलम्व चतुर्भुजका समानान्तर भएका भुजाहरूलाई आधार भनिन्छ भने समानान्तर नभएका भुजाहरूलाई पाद भनिन्छ । पादहरू बराबर भएको समलम्व चतुर्भूजलाई समानपाद समलम्व चतुर्भुज (Isosceles trapezium) भनिन्छ । पादहरूको मध्यविन्दु जोड्ने रेखालाई मध्य रेखा भनिन्छ । मध्यरेखा आधारसँग समानान्तर हुन्छ । समानान्तर रेखाहरूबीचको दूरीलाई समलम्व चतुर्भुजको उचाइ भनिन्छ । समलम्व चतुर्भुजको क्षेत्रफल आधारको योग र उचाइको गुणनफलको आधा हुन्छ ।



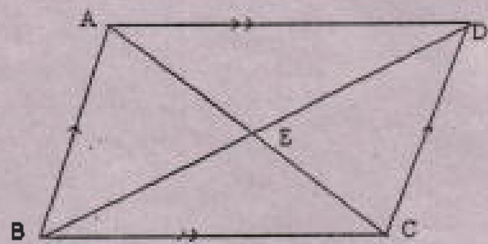
ख) समानान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)

सम्मुख भुजाहरू समानान्तर भएको चतुर्भूजलाई समानान्तर चतुर्भुज भनिन्छ ।

समानान्तर चतुर्भुजमा



- सम्मुख भुजाहरू समानान्तर हुन्छन् ।
- सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
- सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
- सँगैका (Cosecutive) कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।
- विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजित हुन्छन् ।
- प्रत्येक विकर्णले समानान्तर चतुर्भुजलाई दुईअनुरूप त्रिभुजमा विभाजन गर्दछ ।
- दुईओटा विकर्णहरूले समानान्तर चतुर्भुलाई चारओटा बराबर क्षेत्रफल भएका त्रिभुजहरूमा विभाजन गर्दछ ।



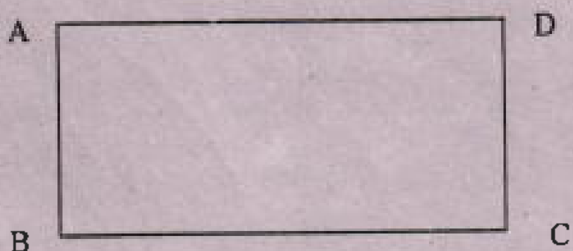
- समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल बराबर आधार र उचाइको गुणनफल हुन्छ ।

ग) आयात (Rectangle)

एउटा कोण समकोण भएको समानान्तर चतुर्भुजलाई आयात भनिन्छ ।

आयात एउटा यस्तो समानान्तर चतुर्भुज हो जसमा

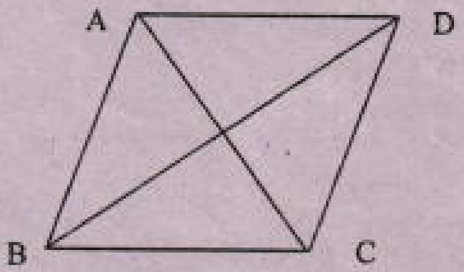
- विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।
- प्रत्येंक कोण समकोण हुन्छन् ।
- विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजित हुन्छन् ।
- क्षेत्रफल बराबर लम्बाइ र चौडाइको गुणनफल हुन्छ ।



घ) समबाहु चतुर्भुज (Rhombus)

आसन्न भुजाहरू बराबर भएको समानान्तर चतुर्भुज नै समबाहु चतुर्भुज हो । समबाहु चतुर्भुज एउटा यस्तो समानान्तर चतुर्भुज हो जसमा

- सबै भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
- विकर्णहरू परस्पर समकोण पारेर समद्विभाजित हुन्छन् ।
- प्रत्येक विकर्णले सम्बन्धित शीर्षकोणलाई समद्विभाजन गर्छ ।
- क्षेत्रफल बराबर विकर्णहरूको गुणनफलको आधा हुन्छ ।



ङ) वर्ग (Square)

वर्ग एउटा यस्तो समानान्तर चतुर्भुज हो जसमा

- सबै भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
- प्रत्येक कोण समकोण हुन्छ ।
- विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।
- विकर्णहरू परस्पर समकोण पारेर समद्विभाजित हुन्छन् ।
- प्रत्येक विकर्णले सम्बन्धित शीर्षकोणलाई समद्विभाजन गर्दछ ।
- क्षेत्रफल विकर्णको वर्गको आधा अथवा भुजाको वर्ग हुन्छ ।

सारांश :

१. विभिन्न किसिमका समानान्तर चतुर्भुजहरूका विकर्णसम्बन्धी गुणहरू

गुणहरू	समानान्तर चतुर्भुज	आयात	समबाहु चतुर्भुज	वर्ग
विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजित हुन्छन् ।	√	√	√	√
विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।	–	√	–	√
विकर्णले शीर्षकोणहरूलाई समद्विभाजन गर्दछन्	–	–	√	√
विकर्णहरू परस्पर लम्बहुने गरी काटिन्छन् ।	–	–	√	√
प्रत्येक विकर्णले दुई अनुरूप त्रिभुजमा बाँड्छन् ।	√	√	√	√
विकर्णले चार बराबर त्रिभुजमा बाँड्छन्	√	√	√	√
विकर्णले चार अनुरूप त्रिभुजमा बाँड्छन्	–	–	√	√

२. विभिन्न किसिमका चतुर्भुजका भुजा, कोण, समानान्तर रेखा र सममिति रेखासम्बन्धी गुणहरू

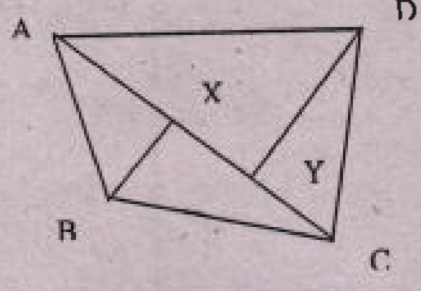
चतुर्भुजहरू	बराबर भुजाहरू	बराबर कोणहरू	समानान्तर भुजाहरू	सममिति रेखाहरू
समानान्तर चतुर्भुज	२ जोडा विपरीत भुजाहरू बराबर	२ जोडा विपरीत कोणहरू बराबर	२ जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर	छैन
समबाहु चतुर्भुज	४ भुजाहरू बराबर	२ जोडा विपरीत कोणहरू बराबर	२ जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर	२ ओटा सममिति रेखाहरू
समलम्ब चतुर्भुज	छैन	छैन	१ जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर	छैन
वर्ग	४ भुजाहरू बराबर	४ ओटा समकोण	२ जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर	४ ओटा सममिति रेखाहरू
आयात	२ जोडा विपरीत भुजाहरू बराबर	४ ओटा समकोण	२ जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर	२ ओटा सममिति रेखाहरू

२.२ चतुर्भुजको परिमिति र क्षेत्रफल

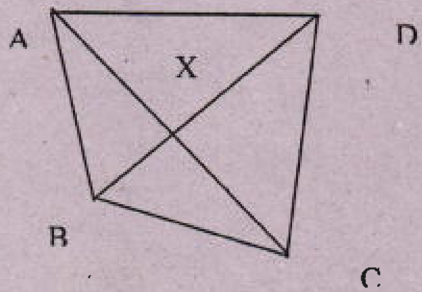
१. चतुर्भुजको क्षेत्रफल

चतुर्भुजको एउटा विकर्ण र सो विकर्णमा विपरीत शीर्षविन्दुहरूबाट खिचिएको लम्ब दिइएको छ भने

चतुर्भुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्ण × विकर्णमा खिचिएका लम्बहरूको योगफल हुन्छ।



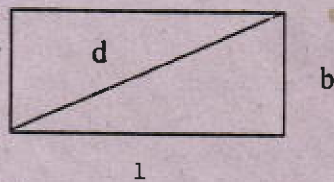
यदि दुई चतुर्भुजका दुई विकर्णहरू परस्पर लम्ब भई समद्विभाजन भएका छन् भने चतुर्भुजको क्षेत्रफल बराबर विकर्णहरूको गुणनफलको आधा हुन्छ ।



२. विशेष प्रकारका चतुर्भुजहरू

क) आयात

यदि आयातको लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः l र b छ भने

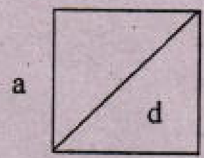


परिमिति $= 2(l + b)$

क्षेत्रफल $= l \times b$

विकर्णको लम्बाइ $= \sqrt{(l^2 + b^2)}$

ख) वर्ग



वर्गको भुजा a छ भने

परिमिति $= 4a$

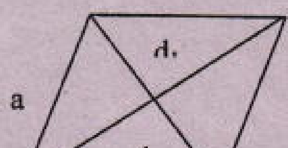
क्षेत्रफल $= a^2$

विकर्णको लम्बाइ $= \sqrt{2}\, a$

ग) समानान्तर चतुर्भुज

क्षेत्रफल = आधार × उचाइ

घ) समबाहु चतुर्भुज



परिमिति $= 4a$

क्षेत्रफल $= 1/2 \times$ विकर्णहरूको गुणनफल

$(\text{भुजा})^2 = (d_1/2)^2 + (d_2/2)^2$ जहाँ d_1 र d_2 विकर्णहरू हुन् ।

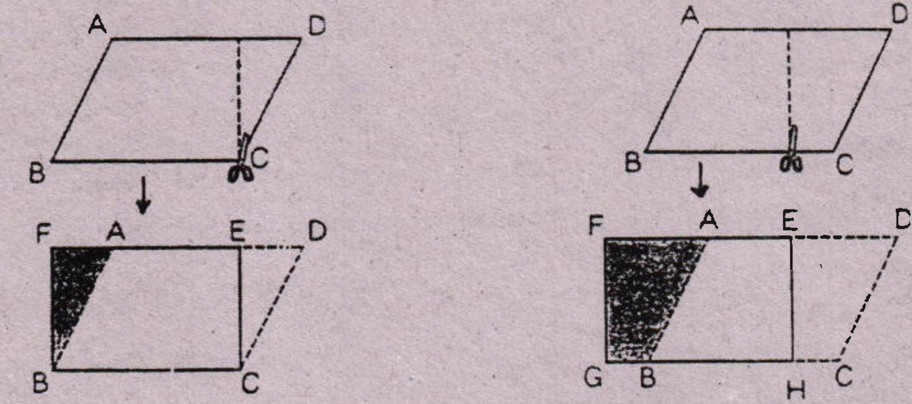
ङ) समलम्ब चतुर्भुज

क्षेत्रफल $= 1/2 \times (a + b)\, h$ जहाँ a र b आधारहरू हुन् भने h उचाइ हो ।

३. कागज पट्याएर र काटेर चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्रको सामान्यीकरण

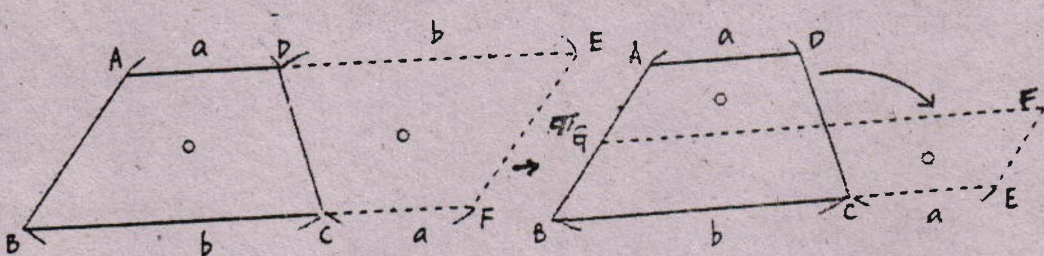
क) समानान्तर चतुर्भुज

कागज काटेर समानान्तर चतुर्भुज निकाल्ने । चित्रमा देखाएअनुसार समानान्तर चतुर्भुजलाई टुक्रा पारी प्राप्त टुक्रालाई आयातमा मिलाउने । यसबाट स.च.को क्षेत्रफल $= b \times h$ हुन्छ भन्ने कुरा सामान्यीकरण गराउन सकिन्छ ।



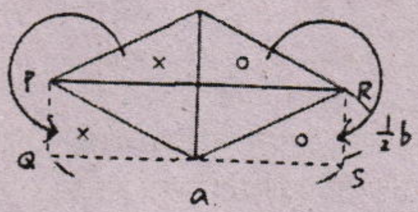
ख) समलम्ब चतुर्भुज

समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफलका लागि दुईओटा अनुरूप समलम्ब चतुर्भुजलाई समानान्तर चतुर्भुजमा मिलाएर वा एउटै समलम्ब चतुर्भुजाकार कागजको टुक्रा काटेर तल चित्रमा देखाएजस्तै गरी समानान्तर चतुर्भुजमा रूपान्तर गरी स.ल.च. को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(a + b)\,h$ हुन्छ भन्ने कुरा सामान्यीकरण गराउन सकिन्छ ।

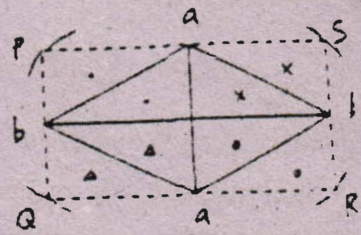


ग) समबाहु चतुर्भुज

समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफलका लागि समबाहु चतुर्भुज आकारका कागज काट्न लगाउने । समबाहु चतुर्भुजको विकर्णमा काटेर चित्रमा देखाएजस्तै गरी मिलाउन लगाउने । यसबाट समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (विकर्णको गुणनफल) हुन्छ भन्ने कुरा सामान्यीकरण गराउन सकिन्छ ।

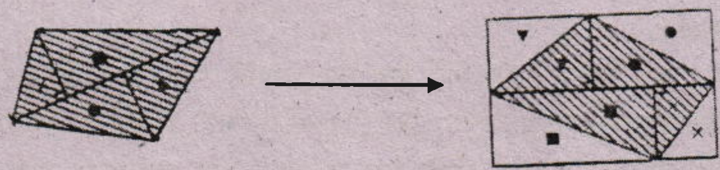


वा



घ) चतुर्भुजको क्षेत्रफल

चतुर्भुजको क्षेत्रफलका लागि चित्रमा देखाए झैँ गरी विकर्ण र लम्बहरूमा काट्न लगाउने । दुई सेट ४/४ ओटा त्रिभुज तयार गरी चित्रमा देखाएजस्तै गरी मिलाएर आयत बनाउन लगाउने । यसबाट चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (लम्बहरूको योग) $\times$ विकर्ण हुन्छ भन्ने कुराको सामान्यीकरण गराउन सकिन्छ ।



३. परियोजना कार्य :

चतुर्भुज पाठ शिक्षणका लागि एउटा सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- R.K. Bansal, Concise Mathematics, Selina Publishers.
- डा. हीराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण, भूँडी पुराण प्रकाशन
- S.M. Maskey, Modern Mathmatics, Ratna Pustak Bhandar.
- माध्यमिक शिक्षा विकास केन्द्र , गणित प्रशिक्षक निर्देशिकाहरू (मा.वि, नि.मा.वि),
- SEDP, Four Week Inservice Teacher Training Package (Lower Secondary and Secondary)
- शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र, गणित शिक्षण प्रशिक्षक निर्देशिका
- Wally 'wallypop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philippines, NISMED.
- IGNOU, Teaching of Mathematics,
- Morgan Ward et.al, Modern Elementary Mathematics, Addison Wesley Publishing Company Inc.
- Paw J. Kelly et. al, Geometry, Eurasia Publishing House (P) Ltd.

पाठ छ : वृत्त र सममिति

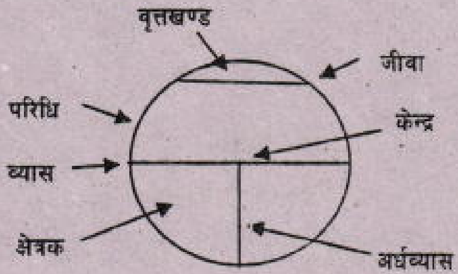
१. परिचय :

दैनिक जीवनमा हामीहरूले वृत्ताकार वस्तुहरूको प्रयोग प्रशस्त मात्रामा गर्दछौं । महिलाहरूले निधारमा प्रयोग गर्ने टीकादेखि लिएर सूर्यको चित्र सबैवृत्ताकार रूपमा हुन्छन् । ज्यामितीय आकारहरूमध्ये वृत्ताकार पनि एउटा महत्वपूर्ण आकार हो । पूजाआजामा प्रयोग गरिने थुप्रै चित्रहरू वृत्ताकार पाइन्छन् । वृत्त जस्तै विन्दुपथ र सममिति पनि ज्यामिति शिक्षणमा प्रयोगमा आउँछन् । यस पाठमा वृत्त र सममितिका सामान्य धारणा कसरी दिन सकिन्छ भन्ने सम्बन्धमा चर्चा गर्ने प्रयाश गरिएको छ ।

२. विषयवस्तु :

२.१ वृत्त (Circle)

शिक्षक वासुदेवले वृत्त पाठ शिक्षण गर्दै हुनुहुन्छ । उहाँले प्लेट, चुरा, सिक्का आदि वस्तुहरू प्रयोग गरी वृत्ताकार वस्तुहरूका बारेमा छलफल गराउनुभयो । बोर्डमा कम्पासले एउटा ठूलो वृत्त खिची वृत्तका विभिन्न भागहरू जस्तै केन्द्र, परिधि, व्यास, अर्धव्यास, जीवा, वृत्तखण्ड, क्षेत्र, चाप इत्यादिका बारेमा छलफलको माध्यमबाट परिचय गराउनुभयो ।



विद्यार्थीहरूलाई एउटा निश्चित अर्धव्यास दिई एउटा वृत्त खिच्न लगाउनुभयो । सो वृत्तलाई कैंचीले काटेर निकाल्न लगाउनुभयो । त्यसलाई आधा बनाई पट्याउन लगाउनुभयो । पट्याएर खोल्दा देखिने रेखालाई के भनिन्छ भन्ने बारेमा छलफल भए । उहाँले फेरि 1/4, 1/8 मा पट्याएर खोल्न लगाउनुभयो । यसरी बनेका वृत्तका भागहरूका बारेमा छलफल गराउनुभयो । शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई कागजको वृत्ताकार टुक्रा लिएर निम्नअनुसार गर्न निर्देशन दिनुभयो।

क) पट्टाएर एउटा जीवा बनाउने,

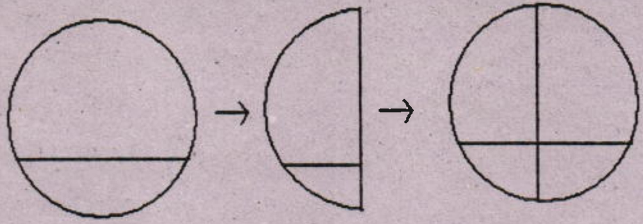
ख) जीवा ठीक आधा हुने गरी जीवामा लम्ब हुने गरी फेरि पट्याउने र खोल्ने,

ग) यो क्रियाकलापको निश्कर्ष लेख्न लगाउनुभयो ।

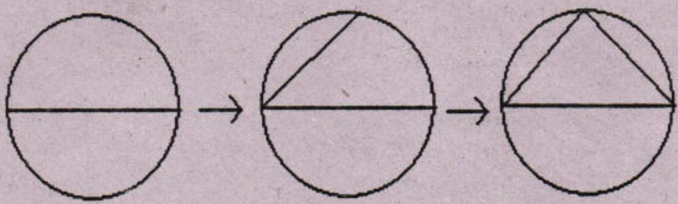
निश्कर्ष :

१. जीवाको लम्बार्धक केन्द्रबिन्दु भएर जान्छ,

२. जीवाको मध्य बिन्दु र वृत्तको केन्द्रबिन्दु जोडने रेखा जीवामा लम्ब हुन्छ ।



उहाँले विद्यार्थीहरूलाई फेरि एउटा वृत्ताकार टुक्रा लिन अह्राउनुभयो । सो टुक्रालाई व्यासमा पट्टयाउन लगाउनुभयो । अनि परिधिको कुनै बिन्दु लिएर सो व्यासका छेउहरू जोडने गरी दुईतिर पट्याउन लगाउनुभयो । यसरी बनेको त्रिभुज कस्तो त्रिभुज हो भन्ने बारेमा छलफल गरी निचोड निकाल्न लगाउनुभयो ।



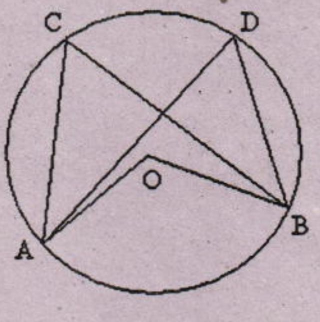
निचोड : वृत्तार्धको कोण समकोण हुन्छ ।

उहाँले विद्यार्थीहरूलाई एउटै चापमा बनेका परिधिकोणहरू खिच्न लगाउनुभयो । ती कोणहरू नाप्न लगाउनुभयो । एउटै चापमा बनेका परिधिकोणहरूको सम्बन्ध तथा परिधिकोण र केन्द्रीयकोणको सम्बन्ध लेख्न लगाउनुभयो ।

निचोड :

१. एउटै चापमा आधारित परिधिकोणहरू बराबर हुन्छन् ।

२. एउटै चापमा आधारित केन्द्रीयकोण परिधिकोणको दोब्बर हुन्छ ।



२.२ सममिति (Symetry):

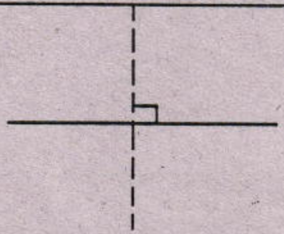
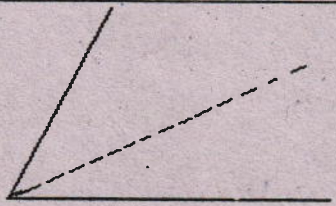
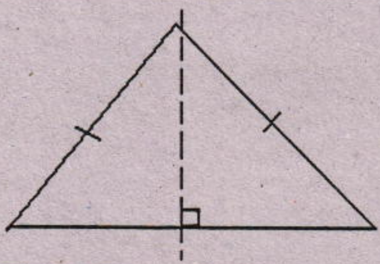
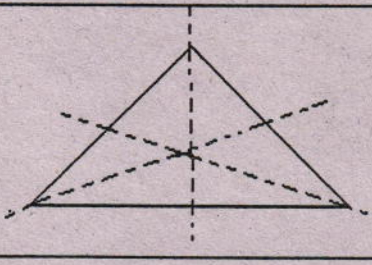
शिक्षक बासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई पुतलीको चित्र बनाउन लगाउनुभयो । पुतलीको बीचमा ऐना राख्न लगाउनुभयो । चित्र कस्तो देखिन्छ छलफल गराउनुभयो ।

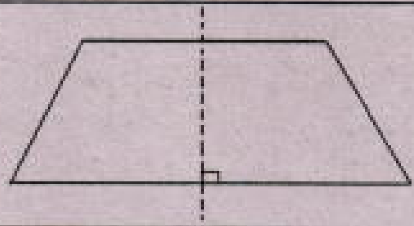
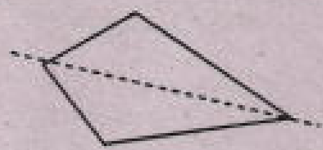
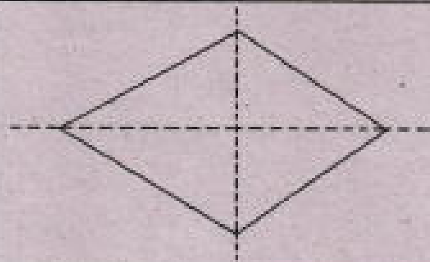
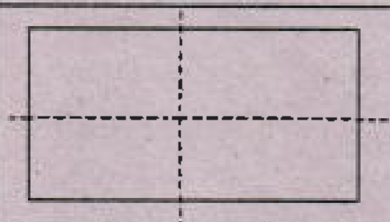
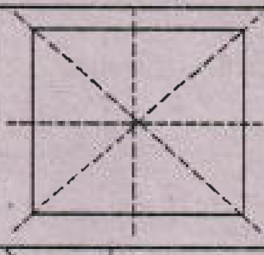
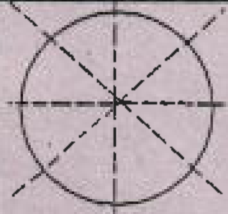
उहाँले एउटा कागज पट्टयाएर पट्याएको भागतिर पर्ने गरी सियोले प्वाल पारी पुतलीको आधा भाग बनाउन लगाउनुभयो । कागज खोल्दा कस्तो चित्र बन्यो छलफल गराउनुभयो । यही क्रियाकलाप कार्बन राखेर पनि गर्न लगाउनुभयो ।

यसरी आधा चित्रमा राख्दा पूरा चित्र देखिने रेखालाई सममिति रेखा (Line of symetry) भनिन्छ ।

उहाँले विद्यार्थीहरूलाई विभिन्न खालका पातहरू बाड्नुभयो । ऐना राखेर सममिति रेखा भए नभएको छुट्याउन लगाउनुभयो ।

उहाँले विभिन्न ज्यामितीय चित्रहरूको सममिति रेखा पत्ता लगाउन दिनुभयो।

१. रेखाखण्ड		एउटा सममिति रेखा
२. कोण		एउटा सममिति रेखा
३. समद्विबाहु त्रिभुज		एउटा सममिति रेखा
४. समबाहु त्रिभुज		३ ओटा सममिति रेखाहरू

५. समानपाद समलम्ब चतुर्भुज		एउटा सममिति रेखा
६. चङ्गा		एउटा सममिति रेखा
७. समबाहुचतुर्भुज		२ ओटा सममिति रेखाहरू
८. आयात		२ ओटा सममिति रेखाहरू
९. वर्ग		४ ओटा सममिति रेखाहरू
१०. वृत्त		अनगिन्ती सममिति रेखाहरू

२. **बिन्दु सममिति** (Point symetry) :

कुनै ज्यामितीय आकृतिलाई कुनै बिन्दुबाट 180^0 परिक्रमण गराउँदा यसका भागहरू अपरिवर्तनीय (invariant) रहन्छ भने सो आकृतिलाई बिन्दु सममिति भएको आकृति भनिन्छ । जुन बिन्दुबाट परिक्रमण गराइन्छ । त्यस बिन्दुलाई सममितिको केन्द्र (Center of symetry) भनिन्छ ।

उदाहरणको लागि POd लाई 180^o घुमाउँदा पूरानै अवस्थामा यथावत रहेजस्तो देखिन्छ । यसमा बिन्दु सममिति छ ।

शिक्षक बासुदेवले अङ्ग्रेजी वर्णमालाका विभिन्न अक्षरहरू र हिन्दु अरेबिक अङ्कहरू दिएर रेखा सममिति र बिन्दु सममिति भएका अक्षरहरू, अङ्कहरू पत्ता लगाउन दिनुभयो ।

३. परियोजना कार्य :

वृत्त, विन्दुपथ र सममिति शिक्षणको लागि प्रत्येकको एक एक ओटा सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- डा. हिराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण, भूँडी पुराण प्रकाशन ।
- S.M. Maskey, Modern Mathmatics, Ratna Pustak Bhandar.
- R.K. Bansal, Concise Mathematics, Selina Publishers.
- माध्यमिक शिक्षा विकास केन्द्र , गणित प्रशिक्षक निर्देशिकाहरू (मा.वि, नि.मा.वि),
- SEDP, Four Week Inservice Teacher Training Package (Lower Secondary and Secondary)
- शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र, गणित शिक्षण प्रशिक्षक निर्देशिका
- Wally 'wallypop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philippines, NISMED.
- IGNOU, Teaching of Mathematics,
- Morgan Ward et.al, Modern Elementary Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- Paw J. Kelly et. al, Geometry, Eurasia Publishing House (P) Ltd.

एकाइ पाँच

स्थानान्तरण, टेसेलेसन, बिएरिङ् तथा स्केल ड्रइङ्

Competency:	Explain and demonstrate ideas and examples from physical world to mathematical world about transformation, use tesselation in classroom teaching as content itself and recreational learning, teach scale drawing and bearing with concrete examples.

पाठ एक : स्थानान्तरण

१. परिचय :

इसापूर्व १५०० वर्षपहिले इजिप्सीएनहरूबाट सुरु भएको ज्यामितिको विकासका क्रममा स्थानान्तरण ज्यामिति (Transformational geometry) सबैभन्दा नयाँ विधा हो । यसमा कुनै पनि ज्यामितीय आकृतिलाई एकबाट अर्कोमा बदल्न (Transform) सकिन्छ । युक्लिडीयन ज्यामिति शिक्षणका लागि पनि स्थानान्तरणको धारणा उपयोगी सावित भएको छ । युक्लिडीयन ज्यामितिका विभिन्न धारणाहरूको शिक्षणका लागि परावर्तन, विस्थापन, परिक्रमण, तथा विस्तारीकरणको प्रयोग गर्न सकिन्छ । माध्यमिक तहको अतिरिक्त गणितको पाठ्यक्रममा स्थानान्तरण समावेश गरिएको छ । यस एकाइमा Isometric स्थानान्तरणअन्तर्गत परावर्तन, विस्थापन र परिक्रमण तथा Non-isometric स्थानान्तरण अर्न्तगत विस्तारीकरणसम्बन्धी विषयवस्तुहरू तथा ती विषयवस्तुहरू शिक्षण गर्ने तरिकाहरू प्रस्तुत गरिएका छन् ।

२. विषयवस्तु

२.१. स्थानान्तरण (Transformation) को अर्थ

विद्यार्थीहरूलाई फलनको धारणा भइसकेको हुँदा स्थानान्तरणलाई फलन (Function) वा मिलान (Mapping) का रूपमा परिभाषित गर्न मलाई सजिलो भयो । एकजना विद्यार्थीले मलाई सोधे, फलन $f:A \rightarrow B$ मा A का प्रत्येक सदस्यको B मा प्रतिबिम्ब भएजस्तै स्थानान्तरणमा पनि एउटा समतलका हरेक बिन्दुहरूको बेग्लाबेग्लै प्रतिबिम्ब हुन्छ, ठीक हो सर ? मैले हो भन्ने जवाफ दिएँ । वास्तवमा स्थानान्तरण भनेको एकएक मिलान (One-one mapping) नै हो । यसरी फलन र स्थानान्तरण उस्तैउस्तै हुन् । यदि स्थानान्तरण T ले बिन्दु A लाई अर्को बिन्दु (प्रतिबिम्ब) A^1 सँग मिलान गर्दछ भने विपरीत स्थानान्तरण (Inverse transformation) T^{-1} ले बिन्दु A^1 लाई A सँग मिलान गर्दछ । फलन f लाई $f(x)=y$ ले जनाए जस्तै स्थानान्तरण T लाई $T(x)=x^1$ वा $x \rightarrow x^1$ ले पनि जनाउने चलन छ ।

स्थानान्तरणका उदाहरणहरूका सम्बन्धमा पनि विद्यार्थीहरूबीच छलफल भए । माछापुच्छे हिमालको प्रतिबिम्ब फेवातालमा देख्नसकिन्छ । हामीले आफ्नो प्रतिबिम्ब हेर्न समतल ऐना प्रयोग गर्दछौं । हिन्दूहरूले पूजा गर्दा घिउमा अनुहार हेर्न लगाउँदछन् । हामीले कुनै वस्तुलाई एक ठाउँबाट सारेर अर्को ठाउँमा राख्ने गर्दछौं । गोठको वा चउरको एउटा किलामा डोरीले बाँधेको खसी (वा अन्य कुनै जनावर) डोरी तन्किने गरी एक स्थानबाट अर्को स्थानमा पुग्दछ । फोटोग्राफरले एउटै नेगेटिभबाट ठूलोसानो विभिन्न साइजको फोटो तयार गर्दछ । स्थानान्तरणका चार आधारभूत तरिकाहरू छन् : परावर्तन (Reflection), विस्थापन (Translation), परिक्रमण (Rotation) र विस्तारीकण/सङ्कुचन (Enlargement/reduction)। पहिलो दुई उदाहरण परानर्तनका हुन् भने बाँकी उदाहरणहरू क्रमश: विस्थापन, परिक्रमण र विस्तारीकरण/सङ्कुचनका हुन् । छलफलबाट निष्कर्ष निकालियो-स्थानान्तरण भनेको ज्यामितीय आकृतिहरूको परिवर्तन हो ।

२.२. आइसोमेट्रिक (Isometric) र नन्आइसोमेट्रिक (Non-isometric) स्थानान्तरण :

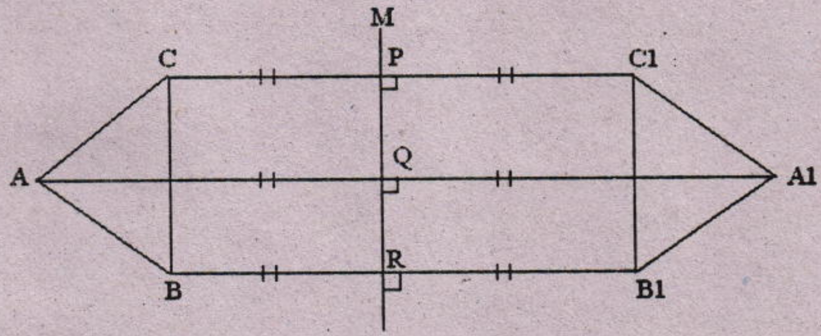
एकजना विद्यार्थीले सोधे "के स्थानान्तरण गर्दा ज्यामितीय आकृतिहरूको स्थिति (Position), आकार (Shape), र नाप (Size) सबै परिवर्तन हुन्छ ?" मैले उक्त प्रश्नको उत्तर विद्यार्थीहरू बीचको छलफलबाट निकाल्ने विचार गरें । माथि दिइएका उदाहरणहरूमध्ये कुनैकुनैमा स्थिति, आकार र नाप परिवर्तन हुन्छ र कुनैकुनैमा हुँदैन भन्ने प्रश्नको आधारमा छलफललाई अगाडि बढाएँ ।

पहिलो चार उदाहरणहरूमा वस्तुको स्थिति मात्र परिवर्तन हुन्छ । आकार र नाप उही रहन्छ । ती सबै Isometric स्थानान्तरणका उदाहरणहरू हुन् । आइसोमेट्रिक स्थानान्तरणलाई अनुरूप (Congruent) स्थानान्तरण पनि भनिन्छ । यस प्रकारको स्थानान्तरणमा आकृतिको कुनै दुई बिन्दुहरूबीचको दूरी र त्यसका प्रतिबिम्बका सम्बन्धित (Corresponding) दुई बिन्दुहरू बीचको दुरी बराबर हुन्छ । अर्थात आइसोमेट्रिक स्थानान्तरणमा दुरी सधैं अपरिवर्तित (Invariant) रूपमा रहन्छ । परावर्तन, स्थानान्तरण र परिक्रमण आइसोमेट्रिक स्थानान्तरण हुन् ।

माथिको पाँचौ (अन्तिम) उदाहरणमा वस्तुको स्थितिको साथै नाप (Size) पनि परिवर्तन हुन्छ । सो Non-isometric स्थानान्तरणको उदाहरण हो । यस प्रकारको स्थानान्तरणमा आकृतिका कुनै दुई बिन्दुहरूबीचको दुरी त्यसको प्रतिबिम्बका सम्बन्धित (Corresponding) दुई बिन्दुहरूबीचको दूरीभन्दा घटी वा बढी हुन्छ (बराबर हुँदैन) । आकृति र प्रतिबिम्ब केबल समरूप मात्र हुन्छन् । त्यसैले Non-isometric स्थानान्तरणलाई समरूप (Similarity) स्थानान्तरण पनि भनिन्छ । Isometric स्थानान्तरणमा कोण (Angle) भने अपरिवर्तित रहन्छ । त्यसैले नाप (Size) परिवर्तित भए पनि आकार (Shape) उस्तै रहन्छ । विस्तारीकरण र सङ्कुचन Non-isometric स्थानान्तरण हुन् ।

ग) परावर्तन (Reflection)

विद्यार्थीहरूलाई समतल ऐनाबाट देखिने प्रतिबिम्ब कुनै पोखरी तलाउमा देखिने रुख, घर, पहाडको हिमालको प्रतिबिम्ब कस्तो देखिन्छ भन्ने सम्बन्धमा छलफल गराएँ । उनीहरूले देखेका परावर्तनसम्बन्धी अनुभवहरू सुनाए । परावर्तनको प्रतिबिम्ब, परावर्तनको अक्ष, प्रतिबिम्बको स्वरूप सम्बन्धमा पनि छलफलहरू भए ।



विद्यार्थीहरूलाई कापीमा एउटा त्रिभुज ABC खिच्न लगाएँ । परावर्तनको अक्ष m खिच्न लगाएँ । सो अक्ष m मा ऐना राख्दा ABC को प्रतिबिम्ब कस्तो देखिन्छ हेर्न लगाएँ । सो आधारमा प्रतिबिम्ब कागजमा खिच्न लगाएँ । सो प्रतिबिम्ब ABC खिच्ने भन्ने सम्बन्धमा छलफल गराएँ ($m \perp Cp$ खिचेर cp लाई $cp=pc^1$ हुने गरी बढाउँदा बिन्दु c को प्रतिबिम्ब c पत्ता लाग्दछ, त्यसैगरी B^1 र A^1 पत्ता लगाउन सकिन्छ । यी छलफलहरूका आधारमा परावर्तनका विशेषताहरू सूचिकृत गर्न लगाएँ ।

परावर्तनका विशेषताहरू :

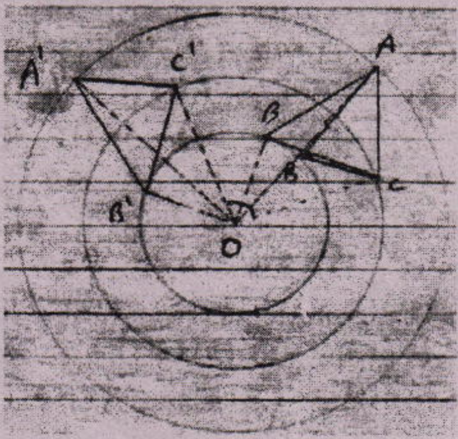
१. आकृति र त्यसको प्रतिबिम्ब परावर्तनको अक्ष (ऐना) बाट बराबर दूरीमा पर्दछन् । माथिको चित्रमा $cp=c^1p$, $AQ=A^1Q$, $BR=B^1R$ छ ।

२. आकृति र त्यसको प्रतिबिम्ब एकअर्काको उल्टो देखिन्छन् तर अनुरूप हुन्छन् । $\Delta ABC \cong \Delta A^1B^1C^1$ हुन्छ ।

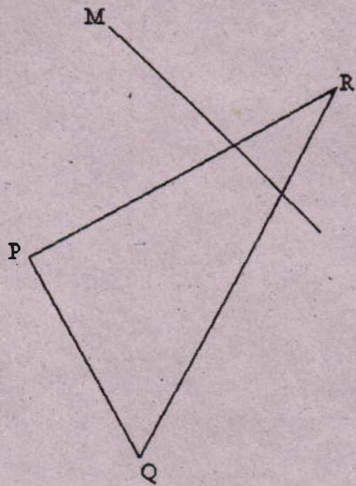
३. आकृति र प्रतिबिम्बका सम्बन्धित (Corresponding) बिन्दुहरू जोडने रेखाहरू परावर्तनको अक्षमा लम्ब हुन्छन् । माथिको चित्रमा $m \perp AA^1$, $m \perp CC^1$ र $m \perp BB^1$ छ ।

४. परावर्तनको अक्षमा परेका बिन्दुहरूको प्रतिबिम्ब उही हुन्छ । P को प्रतिबिम्ब P नै हुन्छ । यस प्रकारका बिन्दुहरू अपरिवर्तनीय (Invariants) रहन्छन् ।

५. यदि R ले m मा हुने परावर्तन जनाउँछ र $R(x)=x^1$ (x को प्रतिबिम्ब x^1 हो) भने $R^{-1}(X^1)=X$ हुन्छ (उल्टो परावर्तन गर्दा x^1 को प्रतिबिम्ब x हुन्छ) ।



परावर्तनका यी विशेषताहरूका आधारमा विद्यार्थीहरूलाई तल दिइएको त्रिभुज PQR लाई परावर्तनको अक्ष m मा परावर्तन गर्न लगाएँ ।



घ. परिक्रमण (Rotation)

विद्यार्थीहरूले परिक्रमणसम्बन्धी आफ्ना अनुभवहरू सुनाए । जस्तै : रोटे पिङ् खेलेको, जाँतो घुमाएको, दाइँ गर्दा गोरुहरू घुमेको, घडीको सुई घुमेको, विहेमा यज्ञको वरिपरि वरवधु घुमेको सबै परिक्रमणका उदाहरणहरू हुन् ।

विद्यार्थीहरूलाई एउटा त्रिभुज ABC खिच्न लगाएँ । त्यस त्रिभुजलाई केन्द्रबिन्दु O मानेर 90^o (घनात्मक) मा घुमाएर प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ कसरी पत्ता लगाउने भन्ने सम्बन्धमा विद्यार्थीहरू बीच छलफल भयो ।

विद्यार्थीहरूले ΔABC को बिन्दु A र O जोडे । O लाई केन्द्र मानी AO अर्धव्यास लिएर एउटा वृत्त खिचेँ । सो वृत्तको परिधिमा अर्को बिन्दु A^1 (A को प्रतिबिम्ब) पत्ता लगाए । जहाँ $<AOA^1=90^o$ (धनात्मकदिशामा) हुन्छ । यही प्रक्रियाबाट अन्य बिन्दुहरू B र C का प्रतिबिम्बहरू B^1 र C^1 पत्ता लगाई । ΔABC लाई 90^o (धनात्मक) परिक्रमण गर्दा प्राप्त हुने प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ खिचेँ ।

परिक्रमणका विशेषताहरू बारे छलफल भए ।

परिक्रमणका विशेषताहरू :

१. आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप हुन्छन् । जस्तै : $\Delta ABC \cong \Delta A^1B^1C^1$ छ ।

२. परिक्रमणले समतलमा रहेका ज्यामितीय आकृतिलाई परिक्रमणको केन्द्रबाट एउटै दिशामा उत्तीकै कोणिक विस्थापन (Angular displacement) गर्दछ ।

३. आकृति र प्रतिबिम्बका बिन्दुहरू जोड्ने रेखाको लम्बार्धक सधै परिक्रमणको केन्द्रबिन्दु भएर जान्छ ।

४. परिक्रमणको बिन्दु अपरिवर्तनीय (Invariant) हुन्छ ।

५. घडीको सूइको दिशामा भएको परिक्रमणलाई ऋणात्मक र घडीको सूइको विपरीत दिशामा भएको परिक्रमणलाई धनात्मकपरिक्रमण भनिन्छ ।

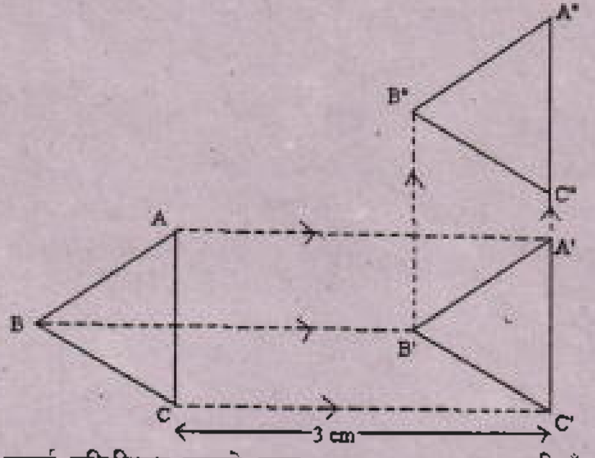
६. ज्यामितीय आकृतिको परिक्रमण गरी प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउन परिक्रमणको बिन्दु, परिक्रमणको कोण र दिशा जरुरत पर्दछ ।

परिक्रमणका यी विशेषताहरूका आधारमा विद्यार्थीहरूले विभिन्न ज्यामितीय आकृतिहरू (सरल रेखा, त्रिभुज, चतुर्भुज) लाई दिइएको परिक्रमणको बिन्दु, कोण र दिशाका आधारमा परिक्रमण गरी प्रतिबिम्बहरू पत्ता लगाए ।

ङ. विस्थापन (Translation)

मैले टेबलमा भएको एउटा किताबलाई धकेलेर एक ठाउँबाट अर्को ठाउँमा पुऱ्याउन लगाएँ । एउटा कुर्सीलाई घिसारेर अर्को ठाउँमा पुऱ्याउन लगाएँ । विद्यार्थीहरूसँग विस्थापनको सम्बन्धमा छलफलको सुरुआत गरें । हामीले दैनिक जीवनमा सामानहरू एक ठाउँबाट अर्को ठाउँमा पुऱ्याउँछौ, ती सबै विस्थापन हुन् । विद्यार्थीहरूले पनि विस्थापनका थुप्रै उदाहरणहरू प्रस्तुत गरे । विस्थापन गर्दा वस्तु/आकृतिको नयाँ स्थिति पत्ता लगाउन केके कुरा आवश्यक पर्छ भन्ने बारेमा छलफल हुँदा दुरी र दिशा आवश्यक पर्ने निष्कर्ष निकालियो ।

विद्यार्थीहरूलाई एउटा त्रिभुज खिच्न लगाएँ । सो त्रिभुजलाई ३ से.मी. दायाँ र २ से.मी. माथि



सार्दा प्रतिबिम्ब कस्तो प्राप्त हुन्छ पत्ता लगाउन दिएँ ।

यस चित्रमा ३ एकाइ दायाँ र २ एकाइमाथितिर विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब A"B"C" प्राप्त भएको छ । यस स्थानान्तरणलाई $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ विस्थापन गरेर (अर्थात विस्थापन कम्पोनेन्ट) ले जनाउने गरिन्छ ।

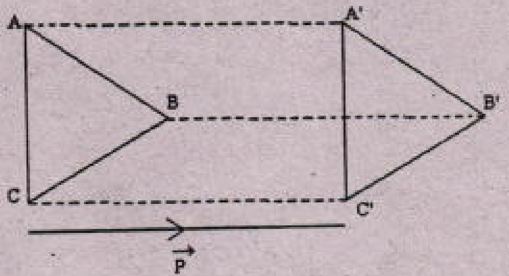
विस्थापनका विशेषताहरू बारे निम्न छलफल भए :

क) आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप हुन्छन् ।

ख) विस्थापनले समतलमा रहेका प्रत्येक बिन्दुलाई उत्तीकै दुरी र उही दिशामा स्थानान्तरण गर्दछ ।

ग) विस्थापनका लागि दिशा र परिमाण/नाप (Direction and Magniture) को जरुरत पर्दछ ।

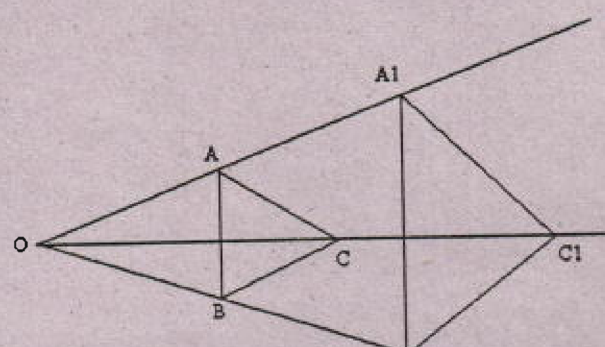
यदि ΔABC लाई भेक्टर $\bar{p}$ को दिशा र नापमा विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ प्राप्त भएको छ भने



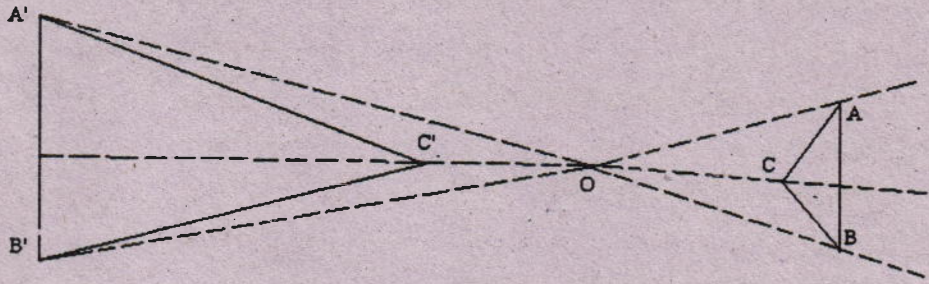
$AA^1=BB^1=CC^1=\bar{p}$ तथा $AA^1 \| BB^1 \| CC^1$ हुन्छ ।

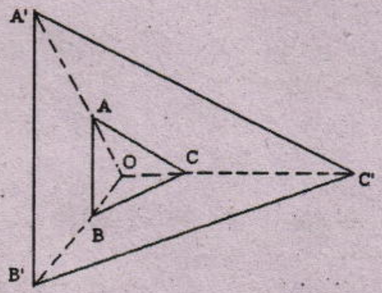
च. विस्तार (Enlargement)

एउटै नेगेटिभबाट निकालिएका (एउटै व्यक्तिका) फरकफरक साइजका फोटोहरू विद्यार्थीहरूलाई देखाएँ । त्यसैगरी फोटोकपीमा Enlarge र Reduce गरिएका चित्र/अक्षर/Text हरू प्रदर्शन गरेँ । विस्तारको धारणा दिनका लागि छलफलको सुरुआत गरेँ । फोटो, चित्र, अक्षरहरू कति गुना ठूलो वा कति गुना सानो भन्ने कुराबाट विस्तारको मापो (Scale factor) सम्बन्धमा छलफल गराएँ । विद्यार्थीहरूलाई एउटा त्रिभुज ABC खिच्न लगाएँ । त्यसलाई कुनै बिन्दु O बाट माथि २ ले



विस्तार गर्न लगाएँ। (O को अवस्थिति बेग्लाबेग्लै दिएर)।





यी तीनओटै अवस्थामा $A^1B^1=2AB$, $B^1C^1=2BC$ र $A^1C^1=2AC$ छ, $A^1B^1 \parallel AB$, $B^1C^1 \parallel BC$ र $A^1C^1 \parallel AC$ छ। यी चित्रहरूको आधारमा चित्रको नाप, विस्तारका गुणहरूबारे छलफ भए।

विस्तारका विशेषताहरू :

१. विस्तारमा आकृति र प्रतिबिम्ब समरूप हुन्छन्।

२. विस्तारको लागि विस्तारको केन्द्र र विस्तारको नापो जरुरी हुन्छ। यदि विस्तारको केन्द्र O र नापो K छ भने त्यसलाई [O,K] ले जनाइन्छ।

३. विस्तारको नापो $K>1$ छ भने आकृतिभन्दा प्रतिबिम्ब ठूला हुन्छ। आकृति र प्रतिबिम्ब केन्द्रबाट एउटै दिशामा पर्दछन्।

४. विस्तारको $0<R<1$ छ भने प्रतिबिम्ब आकृतिभन्दा सानो हुन्छ। आकृति र प्रतिबिम्ब केन्द्रबाट एउटै दिशामा पर्दछन्।

५. विस्तारको नापो $K<0$ छ भने आकृति र प्रतिबिम्ब केन्द्रबाट विपरीत दिशामा पर्दछन्। प्रतिबिम्ब उल्टो (inverted) हुन्छ।

६. विस्तारको नापो $K=1$ छ भने आकृति र प्रतिबिम्ब एउटै हुन्छ जसलाई एकात्मक विस्तार (Identity enlargement) भनिन्छ।

यी चार किसिमका स्थानान्तरण शिक्षणपश्चात विद्यार्थीहरूलाई निम्नलिखित तालिका भर्न लगाएँ।

विशेषताहरू	परावर्तन	परिक्रमण	विस्थापन	विस्तार
१. अपरिवर्तनीय बिन्दु				
२. अपरिवर्तनीय रेखा				
३. आकृति र प्रतिबिम्बकासङ्गति भुजाहरू समानान्तर				
४. आकृति र प्रतिबिम्बकासङ्गति कोणहरू बराबर				
५. आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप				
६. आकृति र प्रतिबिम्ब समरूप				

नोट : "हुन्छ" भने (√) चिन्ह र "हुँदैन" भने (X) चिन्ह लगाउने ।

३. परियोजना कार्य

स्थानान्तरण शिक्षणको लागि सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्रीहरू :

- डा.हीराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण
- S. M. Maskey, Modern Mathematics, Vol II
- Florenda L. Gallos, et.al, High School Mathematics, SMEMDP
- SEDP, Four Week Inservice Mathematics Teacher Training Package
- NISMED, Practical Work in High School Mathematics

पाठ दुई : टेसेलेसन, बिएरिङ् तथा स्केल ड«इङ्

१. परिचय :

गणित विषय सूत्रहरूको प्रयोग वा काल्पनिक समस्याहरूको समाधान वा निरस विषय मात्र हो भन्ने धारणालाई गलत साबित गर्ने विषयवस्तुमध्ये यो टेसेलेसन पनि एउटा हो । यसले विद्यार्थीहरूमा सिर्जनात्मक सोचको विकास गराउँछ । निम्नमाध्यमिक तहमा यो विषयवस्तुको प्रयोगले "गणित एक कला हो" भन्ने पनि पुष्टि गर्दछ । नियमित/अनियमित ज्यामितीय आकारहरूले नखप्ट्याइकन कुनै निश्चित ठाउँ पूरा गर्ने प्रक्रियालाई टेसेलेसन भनिन्छ ।

कुनै पनि ठाउँ वा वस्तुलाई चित्रको सहायताले सानो रूपमा लेखिन्छ । जस्तै : नेपालको नक्सा, कुनै शहरको म्याप आदि । त्यसरी सानो रूपमा व्यक्त गरिनुलाई त्यस बस्तु वा ठाउँको स्केल ड्इङ्ग गरिनु भनिन्छ । यहाँ आकार उस्तै हुन्छ तर उत्रै हुँदैनन् ।

हवाई जहाज/पानी जहाज आदि चलाउँदा चालकले जहाज कुन दिशातर्फ जाँदैछ वा जानुपर्छ भनी थाहा पाउन उत्तरी ध्रुवको सहायता लिनै पर्नेहुन्छ । मानौ जहाज 90^o मा मोड्नु पर्‍यो भने उत्तरी ध्रुवलाई आधार मानेर 90^o पट्टिको सूईको बाटोको आड् लिई अगाडि बढछ । केही दूरी पार गरेपछि फेरि दिशा बदल्नु पर्‍यो भने फेरि उत्तरी ध्रुवका आधारमा आवश्यक डिग्रीको कोणअनुसार चल्नु पर्ने हुन्छ ।

हाल निम्नमाध्यमिक तहमा उल्लिखित विषयवस्तुहरू समावेश गरिएका छन् । यहाँ हामी ती विषयहरू शिक्षण गर्ने तरिकाहरू बारे छलफल गर्ने छौं ।

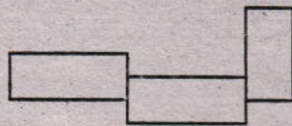
२. विषयवस्तु :

२.१ टेसेलेसन

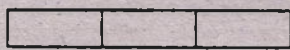
शिक्षक मनोहर प्रायः जसो गणित शिक्षणमा केहीनकेही सामग्रीको प्रयोग गर्नुहुन्छ । एक दिन मैले उहाँको कक्षा अवलोकन गरैं । सो दिन उहाँले टेसेलेसनसम्बन्धी पाठ शुरु गर्न लाग्नु भएको थियो ।

उहाँले कक्षाको अनुगमनमा एकजना विद्यार्थीलाई डाक्नुभयो । ती विद्यार्थीलाई बाक्लो कागजको एउटा आयत (करिब 30cm×20cm) र चक्र एक टुक्रा दिनुभयो । यत्तिकैमा सबै विद्यार्थीहरू ज्यादै उत्सुक देखिए । त्यस बेला मनोहरजीले कक्षामा हुन गइरहेको क्रियाकलाप बारे छोटो जानकारी दिनुभयो: "तिम्रो साथीले यहाँ भुइँमा केही चित्र बनाउँदैछ, उसले राम्रो चित्र बनाउन के गर्नुपर्छ ? तिमीहरूले उसलाई सुझाव दिनुपर्छ ।" मनोहरजीले कक्षामा बढी आवश्यक होहल्ला तथा विद्यार्थीहरूको समूह ज्यादै ठूलो होला भन्ने ठान्नु भ . उहाँले विद्यार्थीहरूलाई १०/१० जनाको समूहमा बाँड्नुभयो र सबभन्दा पहिले पहिले समूहलाई कक्षाको प्राङ्गणमा पंतिवद्ध गरेर अवलोकन गराउनुभयो ।

मनोहरजीले पहिलो विद्यार्थीलाई कागजको आयत भुईंको एक छेउमा राखेर त्यसको वरपर परिधिमा भुइँमा चकले कोर्न लगाउनुभयो । त्यसको सँगै अर्को दुईओटा पनि कोर्न भन्नुभयो । तर निम्नअनुसार कोरेछ ।

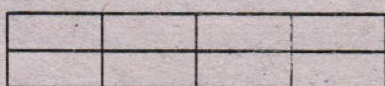


मनोहरजीले अवलोकन गर्ने विद्यार्थीहरूलाई प्रश्न गर्नुभयो : "के गरेमा चित्र स्पष्ट र मनमोहन हुन्छ होला ?" यत्तिकैमा अर्को एकजना विद्यार्थीले निम्नअनुसार चित्र कोरेछ :



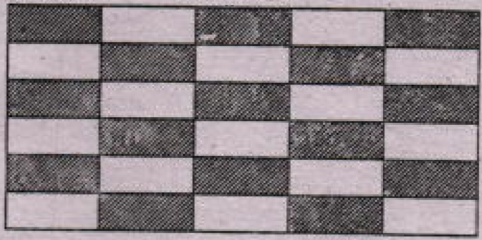
फेरि मनोहरजीले प्रश्न गर्नुभयो "कुनचाहिँ चित्रमा फेरि अर्को चित्र थप्नु पऱ्यो भने सजिलो होला ?" अवलोकन गर्ने विद्यार्थीहरूले "पछिल्लो चित्र" भन्ने जवाफ दिए र किन भनी सोधिएको प्रश्नमा "यो चित्र सीधा एउटै रेखामा बनेको छ र सबै चौडाइहरू एक आपसमा जोडिएका छन्" भन्ने उत्तर दिए । सो चित्रमा अरु तीनओटा चित्र थप्न अर्को समूहका विद्यार्थीहरूलाई भन्नुभयो ।

अरु विद्यार्थीहरूलाई पनि पालैपालो चित्र सीधा रूपमा खिच्न लगाउँदा अर्को भागको भित्तामा भेटियो र अर्को चित्र फेरि लहरको मुन्तिर लेख्न लगाउनुभयो ।



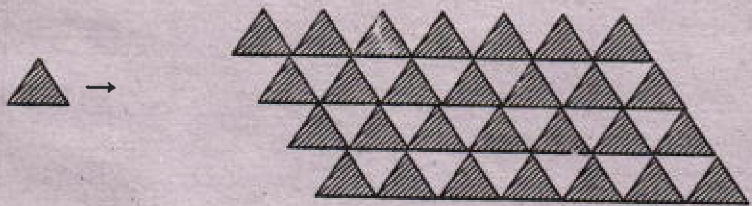
यस प्रकारका चित्रहरू प्रायः जसो विद्यार्थीलाई १ वा २ ओटा खिँच्न लगाई आ-आफ्नो स्थानमा फर्काउनुभयो र कक्षामा मनोहरीले एउटा काम दिनुभयो "तिम्रा साथीहरूले अहिले गरेको जस्तै एउटा पानामा पेन्सिलले पूरा गर ।" त्यसपछि उहाँले कक्षा क्रियाकलापमा भाग लिएका विद्यार्थीहरूलाई सबै समूहमा सहयोगका लागि 5cm×3cm का बाक्लो कागजका टुक्राहरू दिएर पठाउनुभयो । सबैले आआफ्नो पानामा भरेर देखाए । त्यसैगरी कागजका वर्गबाट पनि पाना भर्न लगाउनुभयो ।

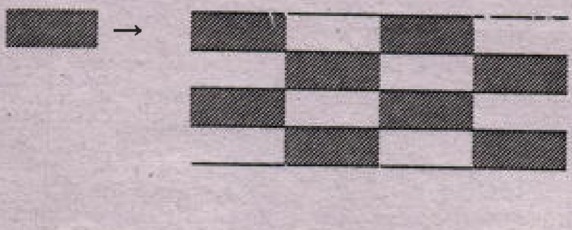
शिक्षक मनोहरजीले एकैनाशका 5cm×3cm का दुई फरकफरक ढङ्गका पातलो कागजका समानान्तर चतुर्भुजहरूको दुई चाङ (करिब ५० ओटा) समूहगत रूपमा आआफ्नो पानामा टाँस्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीहरूले निम्नअनुसारको आकृति तयार पारे ।



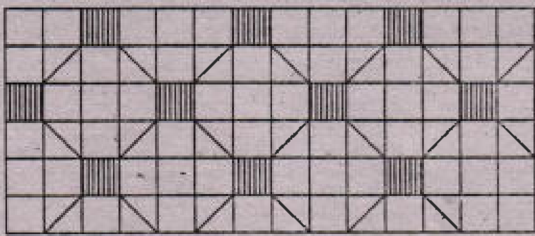
कुनै आकारबाट नखप्ट्याइकन र ठाउँ खाली नराखिकन समतल सतह ढाक्ने वा छोप्ने प्रक्रियालाई टेसेलेसन वा टाएलिङ् (Tessellation or, Tiling) भनिन्छ ।

मनोहरजीले विद्यार्थीहरूलाई परिभाषा लेख्न लगाउनुभयो । उनीहरूले लेखेका परिभाषा माथि लेखिएको परिभाषासँग दाँज्न लगाउनुभयो । कक्षामा अर्को ज्यामितीय आकारहरू (जसलाई Template भनिन्छ) देखाउनुभयो र सो आकारबाट बनाइएको टेसेलेसन चार्ट पनि देखाउनुभयो ।





मनोहरजीले निम्न टेसेलेसनहरू भएको चार्ट देखाएर फरक छुट्याउन लगाउनु भयो ।



विद्यार्थीहरूका उत्तर सुनेपछि उहाँले फेरि प्रश्नहरू गर्नुभयो "पहिलो चार्टको कुनै एउटा चित्र कस्तो छ ? दोस्रोमा कतिओटा चित्रको बनोट छ ? त्यस्तै तेस्रो टेसेलेसन कस्तो चित्रको हो ? विद्यार्थीले पहिलो टेसेलेसन वर्गबाट बनेको छ ? दोस्रो अष्टभुज र वर्गको जोडको चित्रबाट बनेको छ र तेस्रो .... चित्रबाट बनेको छ भनी उत्तर दिए ।

१.	उस्तै नियमित ज्यामितीय आकृति (Regular polygon) प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनलाई नियमित टेसेलेसन (Regular tesselation) भनिन्छ । जस्तै : समबाहु त्रिभुज, वर्ग ।
२.	दुई वा दुईभन्दा बढी नियमित ज्यामितीय आकृति प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनलाई अर्ध नियमित टेसेलेसन (Semi-regular tessellation) भनिन्छ । जस्तै : माथिको चार्ट नं ३ मा वर्ग र अष्टभुजको जोड्को टेसेलेसन ।
३.	अनियमित आकृतिबाट बनेका टेसेलेसनलाई अनियमित टेसेलेसन (Irregular tessellation) भनिन्छ । जस्तै : चार्ट नं. ३ ।

त्यसपछि मनोहरजीले विद्यार्थीहरूलाई ती टेसेलेसनहरूका परिभाषा लेख्न भन्नुभयो । लेखिएका परिभाषा माथि लेखिएका परिभाषासँग दाँज्न लगाउनुभयो । उहाँले विद्यार्थीहरूलाई समूहमा विभाजन गर्नुभयो ।

विभाजित विद्यार्थीहरूलाई बाक्लो कागजका समभुज, त्रिभुज, वर्ग, समपञ्चभुज, समषष्टभुज, समसप्तभुज र समअष्टभुजका Template वितरण गर्नु भई नियमित टेसेलेसन गराउनुभयो । प्रत्येक समूहबाट एकएकजनालाई प्रस्तुत पनि गराउनुभयो । जहाँ समभुज, त्रिभुज, वर्ग र समषड्भुजबाट गरिएको मात्र टेलेसेसन भयो तर समपञ्चभुज, समसप्तभुज र समअष्टभुजबाट टेसेलेसन भएको देखिएन । उहाँले माथिका Template हरू प्रयोग गरी अर्ध नियमित टेसेलेसन तयार पार्ने गृहकार्य पनि दिनुभयो । उहाँले टेसेलेसनसम्बन्धी तलका सामग्रीहरू पनि थप अध्ययनको लागि दिनु भयो ।

टेसेलेसन :

अनुरूप ज्यामितीय आकृतिहरू (जसलाई टायल भनिन्छ) द्वारा समतल सतह छाप्ने (बुट्टा तयार गर्ने) तरिकालाई टेशेलेसन भनिन्छ । टेशेलेसन गर्दा सम्पूर्ण समतल सतह उस्तै खालका

आकृतिहरू (टायल) ले मात्र ढाकिएका हुन्छन् जसका प्रत्येक कुना समान खालका बहुभुजहरूले समान क्रममा (एउटै दिशामा) घेरेका हुन्छन् । टेशेलेसन गर्दा टायलहरूका बीचमा खाली ठाउँ हुनुहुँदैन र खप्टिनु पनि हुँदैन । जुनसुकै आकारको टायलबाट टेशेलेसन गर्न सकिदैन । टेशेलेसन गर्न सकिने ज्यामितीय आकृतिहरूमा समभुज त्रिभुज, वर्ग र नियमित षडभुज मात्र हुन् । वृत्त, पञ्चभुज सप्तभुज आदि आकृतिबाट टेशेलेसन गर्न सकिदैन । टेशेलेसन गर्न सम्भव हुनको लागि टायलका बिन्दुहरूमा बन्ने कोणहरू जोड्दा ३६०° हुनु पर्दछ । जस्तै समबाहु त्रिभुजमा प्रत्येक कोण ६०° हुने हुँदा ६ ओटा कुनाहरू मिल्दा ३६०° हुन्छ भने वर्गमा ४ ओटा कुना र नियमित षडभुजमा ३ ओटा कुनाहरू मिल्दा ३६०° हुन्छ । तर नियमित पञ्चभुजमा प्रत्येक भित्रीकोण १०८° हुने हुँदा जति सङ्ख्यामा टायल मिलाए पनि ठीक ३६०° हुन सक्दैन । त्यसैले यसबाट टेशेलेसन गर्न सम्भव छैन ।

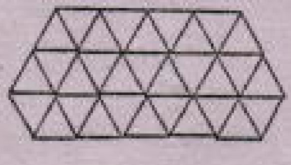
टेशेलेसनको प्रकार :

टेशेलेसन मुख्यतया नियमित, अर्धनियमित र अनियमित गरी तीन प्रकारका हुन्छन् । एकै प्रकारका नियमित ज्यामितीय आकृतिहरूबाट हुने टेशेलेसनलाई नियमित टेशेलेसन भनिन्छ । त्यसैगरी दुई वा सोभन्दा बढी प्रकारका नियमित ज्यामितीय आकृतिहरूबाट हुने टेशेलेसनलाई अर्धनियमित टेशेलेसन भनिन्छ । अनियमित आकृतिहरूबाट हुने टेशेलेसन (त्रिभुज वा चतुर्भुजबाट हुने) लाई अनियमित टेशेलेसन भनिन्छ ।

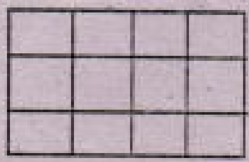
टेशेलेसन

नियमित	अर्धअनियमित	अनियमित
$३^{६}$	३-४-६-४	**अनियमित बहुभुज**
	$३^{४}$-४	
$४^{४}$	$३^{२}$-४-३-४	Demi-regular
	$३^{४}$-६	Vertex-1
	३-६-३-६	३-४-३-१२
$६^{३}$	$४-८^{२}$	Vertex-2
	$३-१२^{२}$	३-१२-१२
	४-६-१२	Curved shape

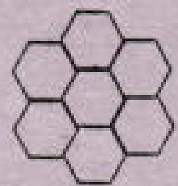
क) **नियमित टेशेलेसन**



$३^{६}$ टेशेलेसन



$४^{४}$ टेशेलेसन



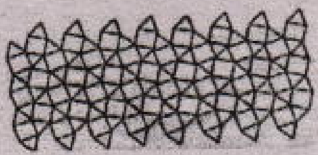
$६^{३}$ टेशेलेसन

टायल 
६ ओटा त्रिभुजबाट गरिएको

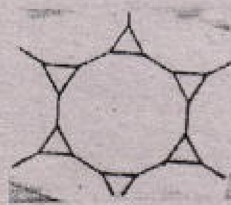
टायल 
४ ओटा वर्गबाट हुने टेशेलेसन

टायल 
३ ओटा षडभुजबाट हुने

ख) अर्ध नियमित टेशेलेसन

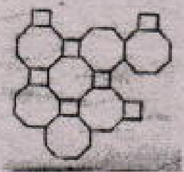


३^{२}-४-३-४ टेसेलेसन

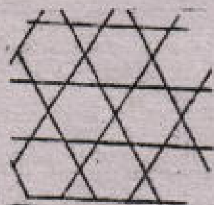


३-१२^{२} टेसेलेसन

टायल 

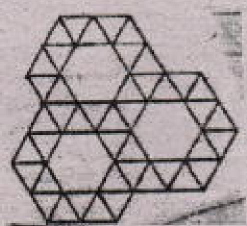


४-८^{२} टेसेलेसन



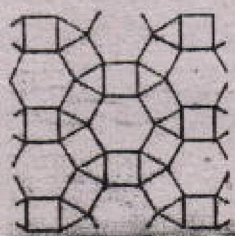
३-६-३-६ टेसेलेसन

टायल 



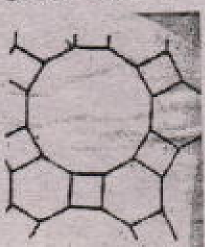
३^{४}-६ टेसेलेसन

टायल 



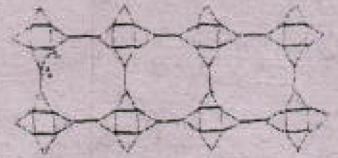
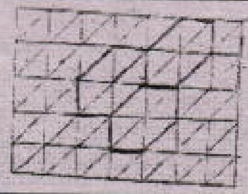
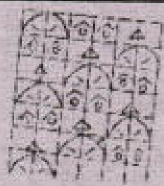
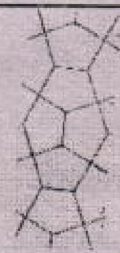
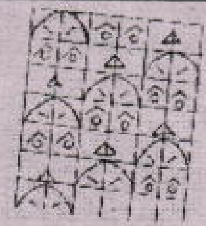
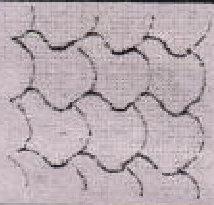
३-४-६-४ टेसेलेसन

टायल 



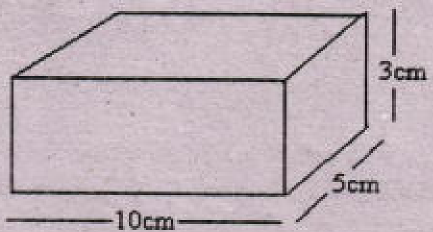
४-६-१२ टेसेलेसन

ग) अनियमित टेशेलेसन

	
Demi-regular टेशेलेसन	त्रिभुजबाट हुने टेशेलेसन
	
अनियमित बहुभुजबाट हुने टेशेलेसन	
	
	
Curve shape बाट हुने टेशेलेसन	

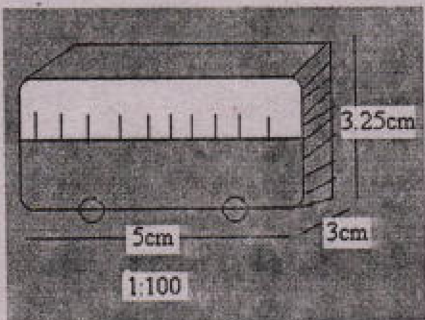
उहाँले टेसेलेसन सम्बन्धी सामग्रीहरू पनि थप अध्ययनका लागि दिनु भयो । -

ख) मनोहरजीले 1m को स्केल दिई विद्यार्थीहरूलाई कक्षाकोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ निकाल्न लगाउनुभयो । कक्षाकोठाको लम्बाइ 10m, चौडाइ 5m र उचाइ 3m रहेछ । एकजना विद्यार्थीलाई कालोपाटीमा 3m कोठाको नमूना बनाए ।



त्यसपछि सबै विद्यार्थीहरूलाई स्केलका सहायताले आआफ्नो कापीमा लम्बाइ 10cm, चौडाइ 5cm र उचाइ 3cm को कालोपाटीमा लेखेअनुसारको चित्र बनाउन लगाउनुभयो र प्रश्न गर्नुभयो "किन 10m लाई 10cm को चित्र बनाइएको होला?" । विद्यार्थीहरूले ठीकसँग उत्तर दिन सकेनन् । अनि भन्नुभयो यो वास्तविक कोठाको सानो रूप हो । जस्मा प्रत्येक भागहरू 1:100 को अनुपातमा बनाइएको छ । किनभने 10m भनेको 100cm हो र 1000cm लाई 10cm को रूपमा व्यक्त गर्दा सानो चित्र वास्तविक वस्तुको 10:1000 अथवा 1:100 भाग हुन्छ ।

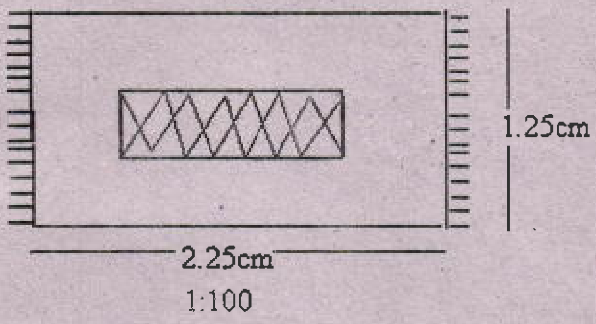
यसरी वास्तविक चित्रलाई सानो रूपमा प्रस्तुत गर्नु नै स्केल ड्रइङ हो भनी थप्नुभयो । उहाँले समूहगत रूपमा विद्यार्थीहरूलाई विद्यालयको नक्शाको स्केल ड्रइङ गर्ने कार्य दिनुभयो ।

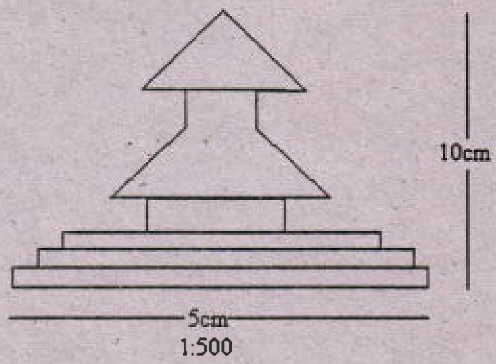


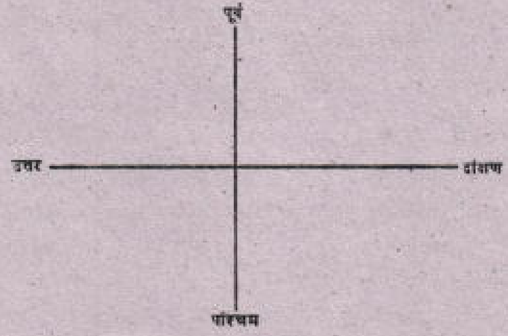
सबै समूह नेतालाई स्केल ड्रइङ प्रस्तुत गराउनुभयो । एउटा समूहका विद्यार्थीहरूले 1m=1cm एकाइ छान्दा चित्र ठूलो बन्ने भएकाले 1cm = 20m एकाइ लिएर ड्रइङ गरेको रहेछ, जुन 1:200 भागको भनी विद्यार्थीले आफ्नो प्रस्तुतिमा बताए । त्यस्तै बाँकी समूहले 1m=1cm मानेर नै आफ्नो स्केल ड्रइङ बनाएको बताए । यत्तिकैमा रमेशले प्रश्न गरे के जुनसुकै एकाइमा पनि स्केल ड्रइङ गर्न सकिन्छ ? यस प्रश्नको उत्तर मनोहरजीले यसरी दिए, एकाइ जतिमा बदले पनि हुन्छ तर सबै लम्बाइलाई मान्य हुने गरी लिएमा चित्र दुरुस्त हुन्छ ।

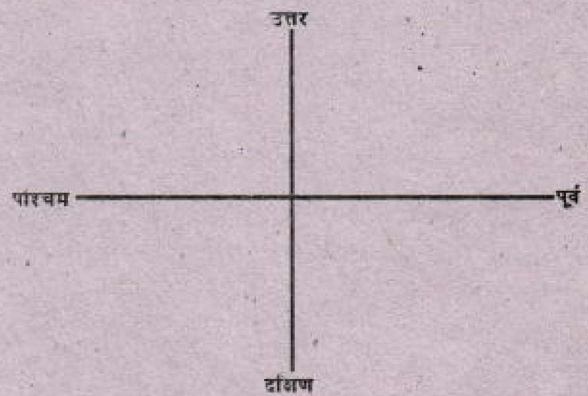
त्यसपछि मनोहरजीले तल दिइएका नमूनाहरू देखाई वास्तविक लम्बाइ निकाल्न लगाउनुभयो उहाँले विद्यार्थीहरूलाई आफूखुसी चित्रहरू बनाउन लगाई र त्यसको वास्तविक लम्बाइ निकाल्न लगाउनुभयो ।

ग)   शिक्षक मनोहरजीले विद्यार्थीहरूलाई खेल मैदानमा लानुभयो । जहाँ चार दिशा छुट्याई लट्ठी गाडेर डोरी बाँधिएको रहेछ । ती डोरीहरू भेटिएको ठाउँमा एकजना विद्यार्थी





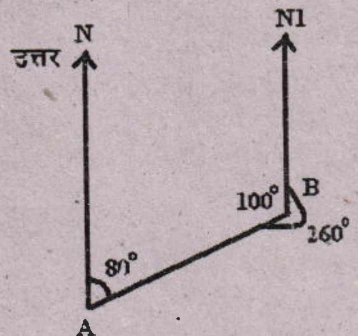




उभ्याउनुभयो । सबै विद्यार्थीहरूलाई गाडेको क्षेत्रफल वरिपरि वृत्ताकार रूपमा उभ्याउनुभयो र निम्नअनुसार प्रश्नहरू गर्नुभयो ।

- उत्तरदेखि पूर्वसम्म कति डिग्री होला ? दक्षिणसम्म कति होला ?
- उत्तरदेखि पश्चिमसम्म कति डिग्री होला ?

सबैले उत्तरदेखि पूर्व सम्म 90°, दक्षिणसम्म 180° हुन्छ भने र उत्तरदेखि पश्चिमसम्म 90° छ । तर मनोहरीजीले सबैलाई उत्तरदेखि पश्चिमसम्म 270° हुन्छ भन्नु हुँदा विद्यार्थीहरू मान्न तयार भएनन् । विद्यार्थीहरूले यसरी असहमति जनाएपछि उहाँले घडीको सुई कसरी हिड्छ ? भनी प्रश्न गर्नुभयो । विद्याथीहरूले उत्तर-पूर्व दक्षिण-पश्चिम र उत्तर भन्ने जवाफ दिएपछि उहाँले भन्नुभयो "त्यसैले उत्तरदेखि पश्चिमसम्मको कोण 270° हुन्छ" । विपिन ले



प्रश्न गरे "किन उत्तरी दिशालाई आधार मानेको होला, सर ?" मनोहरजीले विपिनलाई स्यावासी दिदै उत्तर दिए कि चुम्बकीय ध्रुवले जहिले पनि स्वतन्त्रपूर्वक रहँदा उत्तरी दिशा देखाउँछ। आकाशमा हवाई जहाज उड्दा, समुद्रमा पानी जहाज चल्दा कुन ठाउँमा र कतातिर जाँदैछ भन्ने थाहा पाउन कम्पास (Compass) को प्रयोग गर्दछन् । किनभने कम्पासमा स्वतन्त्रपूर्वक रहेको चुम्बक हुन्छ । सोहीअनुसार आफ्नो गन्तब्य पहिल्याउँछन् भन्ने जवाफ दिनुभयो ।

त्यसपछि उहाँले उत्तर र पूर्वदिशाको बीचमा उत्तर-पूर्व दिशा हुन्छ भन्ने धारणा दिनुभयो । बाँकी दक्षिण-पूर्व, दक्षिण-पश्चिम, उत्तर-पश्चिमको दिशा छुट्याउने कार्य विद्यार्थीहरूलाई दिनुभयो। उत्तर-उत्तरपूर्वको कति डिग्री होला भनी प्रश्न गर्नुभयो । विद्यार्थीहरूले सजिलैसँग 45^o भन्ने उत्तर दिए । बाँकी दिशाहरूको स्थिति डिग्रीमा निकाल्ने कार्य पनि दिनुभयो।

त्यसपछि मनोहरजीले कुनै स्थानबाट अर्को स्थानको दिशास्थिति पत्ता लगाउने बारे निम्न क्रियाकलाप गराउनुभयो ।

A स्थानमा एउटा लट्ठी र B स्थानमा अर्को लट्ठी गाडिएको थियो । A बाट B को दिशा स्थिति कति होला भनी मनोहरजीले प्रश्न गर्नुभयो तर विद्यार्थीहरूले AB को दूरी निकाले । उहाँले स्थान पत्ता लगाउन दूरीका साथै डिग्री पनि आवश्यक पर्ने बारे छलफल गर्नुभयो । उहाँले भुईंमा A बाट उत्तरी दिशा छुट्याउने गरी एउटा रेखा कोर्नुभयो ? त्यस्तै A देखि B सम्म पनि रेखा कोर्नुभयो र विद्यार्थीहरूलाई $\angle NAB$ नाप्न लगाउनुभयो जुन 80^o थियो । कोणको नाप गर्न ठूलो प्रोट्याक्टर प्रयोग गर्नुभएको थियो । यसलाई तीन अङ्कको बनाई 80^o लेख्ने तरिका पनि बताइदिनुभयो ।

त्यसैगरी B बाट A नाप्न, B मा पनि उत्तरी दिशा कोर्नुपर्ने हुन्छ । उत्तरी दिशा BN1 पनि कोर्नुभयो । अब, बृहतकोण N_1BA नै B बाट A को दिशास्थिति हुने बारे छलफल गर्नुभयो ।

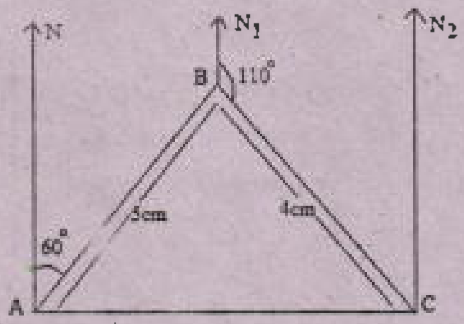
माथि $\angle N1BA=180^o-80^o=100^o$

बृहत $\angle N1BA=360^o-100^o$

$=260^o$

त्यसैगरी उहाँले एउटा परिस्थिति भन्नुभयो "एउटा हवाइजहाज A बाट 60° को दिशामा 500km दूरीमा B स्थानसम्म उड्यो, B बाट 110° बनाई 400km टाढा पुग्यो भने C बाट A सम्मको दिशास्थिति र दूरी कति होला ?

विद्यार्थीहरूलाई त्यस कथाको चित्र बनाउन लगाउनुभयो र उहाँले निरीक्षण गरिरहनुभयो। विद्यार्थीहरूले A बाट B सम्मको दूरी कसरी राख्ने भन्ने निश्चित गर्न सकेनन् र त्यसपछि सबैलाई उहाँले 1km लाई 1cm एकाइ लिएमा कापीमा दिशास्थिति कोर्न सजिलो हुने बताउनुभयो। त्यसपछि सबै समूहका विद्यार्थीहरूले निम्नअनुसार चित्र बनाए।



C बाट उत्तरी दिशा CN1 खिचेर C बाट A को दिशास्थिति र AC को लम्बाइ नाप्न लगाउनुभयो। AC रेखाको लम्बाइ km को नापमा विद्यार्थीहरूले उत्तर निकाले।

३. परियोजना कार्य :

विद्यार्थीहरूलाई निम्नलिखित कार्यहरू दिनुहोस् र यी कार्यहरूबाट उनीहरूको सिकाइमा परेको प्रभावलाई समेटेर प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस्।

- आफ्नो नातेदार वा साथीको घर जाउ र उहाँको घरका विभिन्न भागको स्केल ड्रइङ्ग गर
- तिमी आफूले बनाउने घरको विभिन्न भागहरूको स्केल ड्रइङ्ग गर।
- विभिन्न बहुभुजहरूको प्रयोग गरी टेसेलेसन तयार गर।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- K.S. Sidhu , Teaching of Mathematics , Sterling Publishers Pvt. ltd, New Delhi
- NCERT, Content-cum Methodology of Teaching Mathematics for B.Ed. Students, New Delhi
- डा. हीराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण
- हरिप्रसाद उपाध्याय , गणित शिक्षण

एकाइ छ

नाप (Metric Measurement)

Competency: Understand and apply mathematics in physical world's metric measurement related problems.

१. परिचय :

भौतिक संसारमा अहिले हरेक वस्तुको पहिचान त्यसको नापद्वारा गरिन्छ । कोठामा आवश्यक वस्तुहरू कति नापका चाहिन्छन् ? कति दूरी हिड्नु पर्ला ? कति ठाउँ ढाक्छ ? आदि दैनिक जीवनसँग सम्बन्धित वस्तुहरू नापसँग सम्बन्धित रहेका हुन्छन् । कतिपय वस्तुहरूको नाप सूत्रविना नै निकाल्न सकिन्छ भने कुनैको नाप निकाल्न सूत्रको प्रयोगद्वारा सहज र सरल हुन्छ । त्यस मध्ये हालको माध्यमिक गणित पाठ्यक्रममा समावेश नापसम्बन्धी पाठहरूको यहाँ छलफल गर्ने जमर्को गरिन्छ ।

कुनै समतलमा कोरिएका ज्यामितीय आकारहरूको लम्बाइ तथा परिमिति त्यसका भुजाहरूको नापद्वारा निकाल्ने तथा त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुज र वृत्तको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्रको प्रतिपादनका साथै समस्याहरूको समाधान शिक्षण गर्ने तरिका यहाँ छलफल गर्नेछौं । त्यस्तै प्रिज्म, पिरामिड, बेलना, गोला र सोलीको सतहको क्षेत्रफल तथा आयतनसम्बन्धी सूत्रहरूको प्रतिपादन तथा तत्सम्बन्धी समस्याहरूको समाधान गर्ने तरिकाहरू यहाँ प्रस्तुत गरिनेछ ।

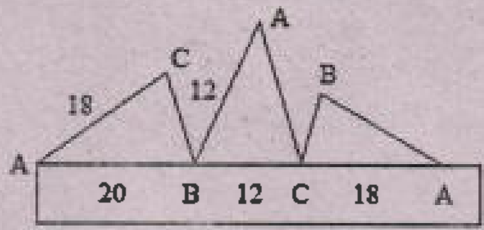
भौतिक संसारका वस्तुहरूमध्ये प्रिज्म, पिरामिड आकारका वस्तुहरू बनाउन कति परिमाणका धातुहरू आवश्यक पर्छ भनी थाहा पाउन सतहको क्षेत्रफल तथा त्यसको क्षमता तथा ओगट्ने ठाउँ बुझ्न आयतन निकालिन्छ ।

२. विषयवस्तु :

२.१ परिमिति :

शिक्षक शिवजी कक्षामा बहुभुज तथा वृत्तको परिमिति (परिधि)सम्बन्धी शिक्षण गर्दै हुनुहुन्थ्यो । उहाँले कक्षामा बाक्लो कागजका एउटाएउटा त्रिभुज, चतुर्भुज, पञ्चभुज, षड्भुज र वृत्तका साथै १ मिटर लामो स्केल ल्याउनुभएको थियो । उहाँले सो वस्तुहरूको परिमिति निकाल्ने एउटा क्रियाकलाप निम्नअनुसार गराउनु भएको थियो ।

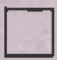
दुई जना विद्यार्थीहरूलाई कक्षाकोठाको अगाडि भागमा बोलाउनुभयो । एकजनालाई स्केल समात्न लगाउनुभयो । अर्कोलाई त्रिभुज स्केल माथि राख्न लगाउनुभयो र तलको चित्रअनुसार त्रिभुज स्केलमाथि राखी घुमाउन लगाउनुभयो ।



सो त्रिभुज बिन्दु A पूरा एक फन्को घुमी फेरि स्केलमा बिन्दु A पुग्दा स्केलको ५० से.मि. मा पुग्यो । त्यो त्रिभुजको परिमिति ५० से.मि. भयो भनी छलफल गर्नुभयो ।

शिवजीले प्रश्न गर्नुभयो "के सबै बहुभुजको परिमिति निकाल्न बहुभुजलाई स्केलमाथि राखी घुमाउनै पर्छ ? अर्को तरिकाले पनि नाप्न सक्छौ ?" त्यसको उत्तरमा विद्यार्थीहरूले बहुभुजका भुजाहरू स्केलले नापेर त्यसको योगफल नै परिमिति हुन्छ भन्ने जवाफ दिए । उहाँले विद्यार्थीहरूको ७/७ जनाको समूह बनाई प्रत्येक समूहलाई कागजको चतुर्भुज, पञ्चभुज र षड्भुजहरू वितरण गर्नु भई परिमिति निकाल्न लगाउनुभयो । प्रत्येक समूहलाई आ-आफ्नो समूह कार्य प्रस्तुत गराउनुभयो । त्यसपछि आयत, वर्ग, समपञ्चभुज, समषड्भुजको परिमिति निकाल्ने सूत्र छलफल गर्दै प्रतिपादन गर्नुभयो ।


आयतको परिमिति = २ लम्बाइ+२ चौडाइ=२(लम्बाइ+चौडाइ)


वर्गको परिमिति = ४ लम्बाइ


समपञ्चभुजको परिमिति = ५ लम्बाइ


समषड्भुजको परिमित = ६ लम्बाइ

त्यस्तै सबै समूहलाई एउटाएउटा वृत्त दिई त्यसको परिमिति (परिधि) निकाल्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीले वृत्तलाई स्केलमा राखी पूरा एक फन्को घुमाए । परिधिलाई त्यसैको ब्यासले भाग गर्न लगाउनुभयो । सबै समूहले आ-आफ्नो नतिजा २२/७ भएको बताए । त्यसपछि उहाँले निम्न कुरा स्पष्ट पारिदिनुभयो:

$$\frac{\text{वृत्तको परिधि}}{\text{वृत्तको ब्यास}} = \frac{२२}{७}$$

जसअनुसार, वृत्तको परिधि (c)= π × ब्यास

=2 π × अर्धब्यास

क्षेत्रफल :

क) त्रिभुजको क्षेत्रफल : विद्यार्थीहरूलाई समूहमा 6cm, 8cm र 10cm भुजाहरू भएका त्रिभुजहरूको वितरण गर्नु भई त्यसको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीले त्रिभुजको

क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र प्रयोग गरी क्षेत्रफल निकाल्ने जहाँ त्रिभुजको उचाइ 4.8cm र आधार 10cm थियो ।

त्रिभुजको क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}$ आधार भुजाको लम्बाइ×त्रिभुजको उचाइ

त्रिभुजको क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times10\times4.8=24cm^2$

शिवजीले तीनओटा भुजाहरूको नापका सहायताले पनि त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्न सकिने बारे उदाहरणसहीत निम्नअनुसार प्रष्ट पार्नुभयो : 6c, 8cm र 10cm भुजाहरू भएको त्रिभुजको अर्धपरिमिति (s)$=\frac{6+8+10}{2}=12cm$

सो त्रिभुजको क्षेत्रफल $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ जहाँ a,b र c त्रिभुजका भुजाहरू हुन् ।

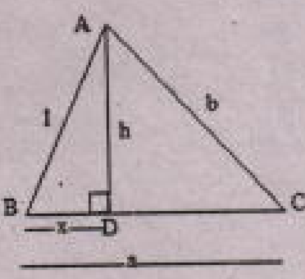
$=\sqrt{12(12-10)(12-8)(12-6)}$

$=\sqrt{12\times2\times4\times6}$

$=24cm^2$

उहाँले सो सूत्र प्रयोग गरी विद्यार्थी आफैले ३/३ त्रिभुजहरूको नाप लिई क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो । सो कक्षाका विद्यार्थी रमेशले यो सूत्रको प्रतिपादन बारे प्रश्न गरे । तब शिवजीले यस प्रकार प्रमाणित गरिदिनुभयो ।

यो सूत्र गणितज्ञे Heron Greek ले करिब १०० बि.सं. तिर प्रतिपादन गरेका थिए । त्यसैले यो सूत्रलाई Heron's Formula पनि भनिन्छ ।



ΔABC का भुजाहरू a, b र c छन् । $AD \perp BC$, $AD = h$ र $BD = x$ मानौं । जसअनुसार $CD = a-x$ हुन्छ ।

ΔABD बाट, $h^2 = c^2 - x^2$

र ΔADC बाट, $h^2=b^2-(a-x)^2=b^2-a^2+2ax-x^2$

अथवा, $c^2-x^2=b^2-a^2+2ax-x^2$

अथवा, $c^2=b^2-a^2+2ax$

अथवा, $x=\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}$

फेरि, $h^2=c^2-x^2$

$$=c^2-\left(\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}\right)^2$$

$$=\left(c+\left(\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}\right)\right)\left(c-\left(\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{2ac+c^2-b^2+a^2}{2a}\right).\left(\frac{2ac-c^2+b^2-a^2}{2a}\right)$$

$$=\left(\frac{(a+c)^2-b^2}{2a}\right)\left(\frac{b^2-(a-c)^2}{2a}\right)$$

$$=\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a}.\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2a}$$

मानौ,

a+b+c=2s,

$$=\left(2s\left(\frac{a+b+c-2b}{2a}\right)\right)\frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2a)}{2a}$$

$$=\left(\frac{2s(2s-2b)}{2a}\right).\left(\frac{(2s-2c)(2s-2a)}{2a}\right)$$

$$=\frac{2s.2(s-b)}{2a}.\frac{2(s-c).2(s-a)}{2a}$$

$$=\frac{2s(s-b).2(s-c).2(s-a)}{a^2}$$

$$=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

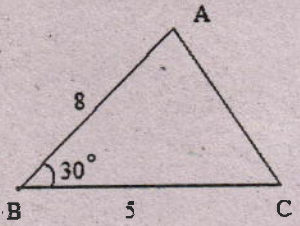
$$\therefore h=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

त्रिभुजको क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times$आधारको लम्बाइ$\times$उचाइ

$$=\frac{1}{2}\times a\times\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

त्यसपछि शिवजीले त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने अर्को तरिका पनि यस प्रकार प्रस्तुत गर्नुभयो :



AB=8cm, BC=5c, र <ABC=30° नाप भएका त्रिभुज ABC प्रत्येक समूहलाई एउटाएउटा बाँड्नुभयो र AB, BC तथा <ABC नाप्न लगाउनुभयो ।

यो आँकडाबाट त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्न निम्न सूत्रको प्रयोग गर्नुभयो :

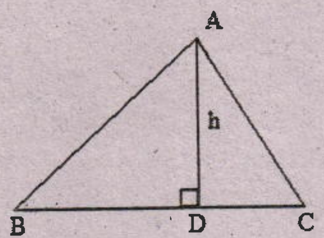
$$= \frac{1}{2} \times AB \times BC \times Sin30^o$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$= 10cm^2$$

यो सूत्रको प्रयोग गरी विद्यार्थी आफैलाई ३/३ ओटा त्रिभुजहरू बनाउन दिई त्यसको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो ।

एक जना विद्यार्थीले सो सूत्रको प्रतिपादनबारे प्रश्न गरे । तब शिवजीले यसप्रकार त्यस सूत्रको प्रतिपादन गर्नुभयो :



ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार (BC)×उचाइ (AD) हुन्छ ।

यदि ΔABD मात्रै हेर्ने हो भने

SinABD=$\frac{AD}{AB}$ हुन्छ ।

अथवा, AD=AB. SinABD हुन्छ ।

त्यसैले, ΔABC को क्षेत्रफल=$\frac{1}{2}$×BC×AB×SinABC प्रमाणित गर्नुभयो । त्यसपछि अर्को विद्यार्थी केशवले प्रश्न गरे कि $\angle C$ को लागि पनि यही सूत्र मान्य हुन्छ कि ? यत्तिकैमा अर्को

विद्यार्थी रमेशले उत्तर दिइ हाले कि $\angle C$ को लागि BC र AC तथा $\angle A$ को लागि AB र AC ले बनाएका कोणको नाप दिइएको हुनैपर्छ ।

त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्न दिइएका दुई भुजाहरूले बनाएका कोणको नाप थाहा भएमा निम्न सूत्र प्रयोग गर्न सकिन्छ :

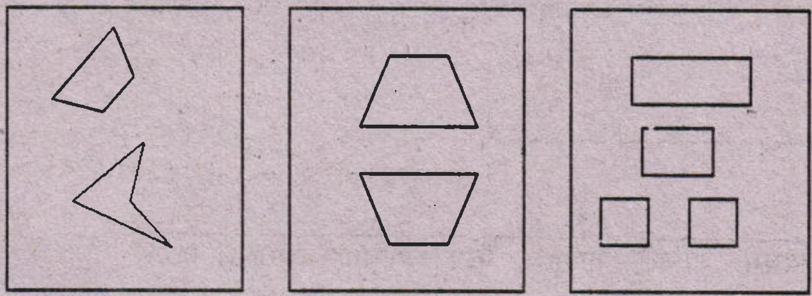
$$\Delta = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \text{Sin}B$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times CA \times \text{Sin}C$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \text{Sin}A$$

ख) चतुर्भुजको क्षेत्रफल :

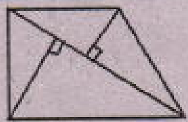
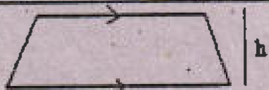
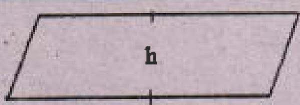
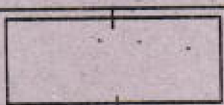
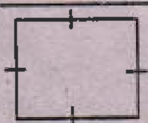
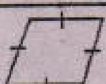
शिवजीले विभिन्न चतुर्भुजहरूको चित्र लेखिएको चार्टहरू देखाउनुभयो र ती चतुर्भुजका नाम र परिभाषा तथा भुजाहरू विद्यार्थीहरूसँग छलफल गर्दै सङ्क्षेपमा विस्तार गर्नुभयो ।



- समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजित हुन्छन् ।
- समानान्तर चतुर्भुजलाई विकर्णले समद्विभाजन गर्छ ।
- आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।
- वर्गका विकर्णहरू परस्पर लम्बार्धक भई शीर्ष कोणहरूलाई 45° हुने गरी समद्विभाजन गर्छन् ।
- समभुज चतुर्भुजका विकर्णहरूले शीर्षकोणहरूलाई समद्विभाजन गर्छ ।

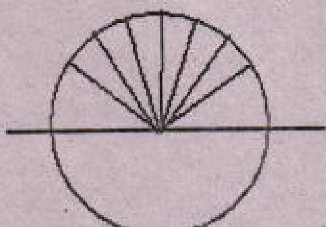
त्यसपछि उहाँले कागजका चतुर्भुजहरू बनाउने समूह कार्य दिनुभयो । विद्यार्थीहरूले आ-आफ्नो समूहमा रही कम्पास र रुलरको सहायताले माथि उल्लेख गरिएका सबै चतुर्भुजहरू तयार गरे । शिवजीले ती चतुर्भुजका क्षेत्रफल निकाल्न के गर्नुपर्छ ? भनी प्रश्न राख्नुभयो । सबै जसो विद्यार्थीहरूले चतुर्भुजलाई विकर्णले त्रिभुज बनाई बनेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफलको योग नै सो चतुर्भुजको क्षेत्रफल हुन्छ भन्ने तर्क दिए । विद्यार्थीहरूलाई समूहले बनाएका सबै

चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो र ती चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र पनि प्रतिपादन गर्न लगाउनुभयो ।

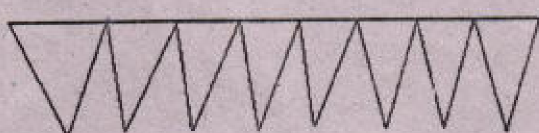
	चतुर्भुजको क्षेत्रफल=$\frac{1}{2}$ विकर्ण (लम्बहरूको योग)
	समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल=$\frac{1}{2}$ उचाइ - आधारहरूको योग)
	समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल=लम्बाइ × उचाइ
	आयत=लम्बाइ×चौडाइ
	वर्ग=लम्बाइ$^{\text{२}}$
	समभुज चतुर्भुज =$\frac{1}{2}$ विकर्णहरूको गुणनफल

विद्यार्थीलाई स्वयम् आफैले नापहरू लिई माथिका चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो ।

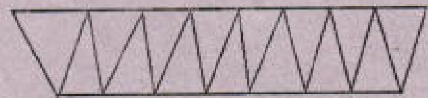
ग). वृत्तको क्षेत्रफल :



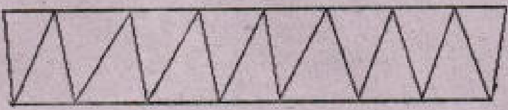
विद्यार्थीलाई शिवजीले कागजका वृत्तहरू बनाउन लगाउनुभयो । वृत्तलाई दुई भागमा बाँडी प्रत्येक भागलाई केन्द्रबाट बराबर हुने गरी ८/८ भागमा बाँड्न लगाउनुभयो । प्रत्येक भाग



आकारका हुन्छन् । ती सबै भागलाई जोडेर राख्दा



आकारको हुन्छ । शुरुमा अन्तिमको एक टुक्रालाई आधा गरी अर्को छेउमा जोड्दा



हुन्छ ।

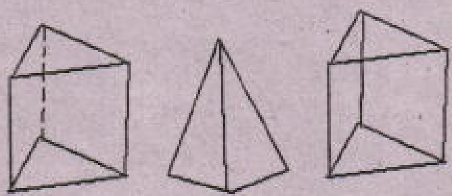
यदि ८/८ को सट्टामा १६/१६ वा सोभन्दा बढी भागमा बाँड्दा त्यसले आयतको रूपं लिन्छ । अर्थात् पूरा वृत्तको क्षेत्रफल आयातमा बदलिन्छ । जसको लम्बाइ πr र चौडाइ r एकाइका हुन्छन् । त्यसैले सो आयतको क्षेत्रफल $\pi r \times r = \pi r^2$ हुन्छ भन्ने तर्क दिनुभयो । त्यसपछि विद्यार्थी स्वयम्लाई फरक अर्धब्यास भएका बृत्तहरूको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो ।

सतहको क्षेत्रफल र आयतन :

प्रिज्म र पिरामिड :

शिवजीले विद्यार्थीहरूलाई समूहमा बाँड्नुभयो र प्रत्येक समूहलाई प्रिज्म र पिरामिड एकएकओटा बाँड्नुभयो । प्रिज्म र पिरामिडका भागहरूको स्वरूप, आधारहरू, आधार र शीर्ष भाग जोडने भागहरू अध्ययन गर्न लगाउनुभयो र ती दुई ठोस वस्तुहरूको फरक बताउन लगाउनुभयो ।

आधारहरू अनुरूप तथा समानान्तर भई आधारहरू जोड्ने भाग प्रिज्ममा आयताकार हुन्छन् । आधारका भुजाहरूका शीर्ष बिन्दुबाट जोडने भाग पिरामिडमा त्रिभुजाकार हुन्छन् ।



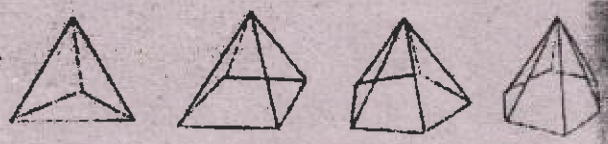
Right Prism Oblique pyramid Prism

ले शीर्ष भागको मध्य बिन्दुबाट लम्ब बनाउँदा आधारको ठीक बीचमा लम्ब पर्छ भने स्तो प्रिज्मलाई Right prism भनिन्छ । त्यस्तै पिरामिडको शीर्ष बिन्दुबाट लम्ब तानियो भने आधारको ठीक बीच भागमा लम्ब पर्छ भने त्यस्तो पिरामिडलाई Right pyramid भनिन्छ भनी छलफल गर्नुभयो ।

हामी यहाँ Right prism लाई प्रिज्म र पिरामिड मात्रै भन्छौं भनी उहाँले छलफल गर्नुभयो । आधारहरूको योग र छेउको भागमा बनेका आयतहरूको योग नै प्रिज्मको सतहको क्षेत्रफल हो । त्यस्तै आधार र छेउ भागमा बनेका त्रिभुजहरूको योग पिरामिडको सतहको क्षेत्रफल हुन्छ । प्रिज्ममा आयतको सङ्ख्या आधारहरूको बहुभुजको भुजाको सङ्ख्याले जनाउँछ भने पिरामिडमा समद्विभुज त्रिभुजको सङ्ख्या आधारको बहुभुजको भुजाको सङ्ख्याले जनाउँछ । जस्तै पञ्चभुजाकार प्रिज्ममा पाँचओटा आयातहरू हुन्छन् भने वर्गाकार पिरामिडमा चारओटा समद्विवाहु त्रिभुजहरू हुन्छन् भनी छलफल गर्दै निष्कर्ष निकाल्नुभयो ।

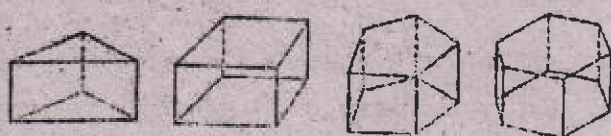
Cuboid आयताकार प्रिज्म हो भन्ने बारे कक्षामा विद्यार्थीहरूबीच छलफल गराउनुभयो ।

(क) पिरामिडहरू :



Triangular pyramid | Square pyramid | Pentagonal pyramid | Hexagonal pyramid

(ख) प्रिज्महरू :



Triangular prism | Square prism | Pentagonal prism | Hexagonal prism

पिरामिडका गुणहरू

- Vertex र Base हुन्छ ।
- Base विभिन्न आकारका बहुभुजहरू हुन सक्छन् ।
- नियमित बहुभुज Base भएका पिरामीडहरू नियमित पिरामिड हुन्छन् ।
- पिरामिडको आधार जति भुजाको छ त्यति नै सङ्ख्यामा त्रिभुजहरू जोडिएर Vertex बनेको हुन्छ ।
- नियमित पिरामिडमा सबै अनुरूप त्रिभुजहरू जोडिएर Vertex बन्दछ ।
- आधारका नामहरूअनुसार पिरामिडका नाम हुन्छन् ।

प्रिज्मका गुणहरू

- आधार र आधारको ठीक विपरीत माथि पर्ने भाग (Top) अनुरूप हुन्छन् र ती दुई समतल समानान्तर हुन्छन् ।

- आधार जति भुजको छ त्यति नै सङ्ख्यामा आयाताकार सतहले घेरेको हुन्छ ।
- आधार विभिन्न प्रकारका बहुभुजले बनेको हुनसक्दछ ।
- Base र Top नियमित बहुभुजले बनेको प्रिज्म नियमित प्रिज्म हो ।
- नियमित प्रिज्म घेर्ने सबै आयातहरू अनुरूप हुन्छन् ।
- आधारको नामअनुसार प्रिज्मको नाम राखिन्छ ।

शिवजीले प्रिज्म र पिरामिडको आयतन निकाल्न निम्न तर्क प्रस्तुत गर्नुभयो :

Cuboid को आयतन निकाल्न लम्बाइ, चौडाइ र उचाइको गुणा गरिन्छ ।

अर्थात्,

आयतन =लम्बाइ×चौडाइ×उचाइ

=(लम्बाइ×चौडाइ)×उचाइ

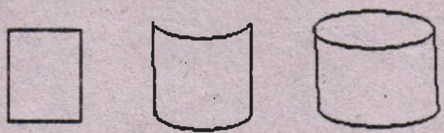
=आधारको क्षेत्रफल×उचाइ

त्यसैले प्रिज्मको आयतन त्यसको आधारका क्षेत्रफल र उचाइको गुणनफल हुन्छ । त्यसैगरी पिरामिडको आयतन उत्रै आधार र उत्तिकै उचाइ भएको प्रिज्मको आयतनको एकतिहाई हुन्छ भन्ने बारे छलफल गर्नुभयो ।

बेलना र सोली :

यदि प्रिज्मका आधारहरू बनेको बहुभुजको भुजाहरूको सङ्ख्या बढाउँदै गएमा अनगिन्ती भुजा भएको प्रिज्म बन्दछ, जुन वृत्त हुन्छ । त्यस वृत्ताकार आधार भएको प्रिज्मलाई बेलना भनिन्छ । त्यसैगरी पिरामिडको आधारका बहुभुजको सङ्ख्या बढाउँदै गएमा आधार वृत्ताकार भएको पिरामिड हुन्छ । त्यस वृत्ताकार आधार भएको पिरामिडलाई सोली भनिन्छ भन्ने बारे छलफल गर्नु भएपछि शिवजीले बेलनाको बक्र सतहको क्षेत्रफलको सूत्रको बारे निम्न क्रियाकलाप गर्नुभयो :

एक पाना आयताकार कागज देखाई त्यसको क्षेत्रफल लम्बाइ र चौडाइको गुणनफल हुन्छ भन्नुभयो । यदि दुबैतिरको लम्बाइ जोड्ने हो भने चौडाइ वृत्ताकार बन्छ, जुन वृत्तको परिधि हुन्छ । त्यसैले बेलनाको



बक्र सतहको क्षेत्रफल =कागजको क्षेत्रफल

=वृत्तको परिधि×उचाइ

$=2\pi rh$ जहाँ अर्धब्यास r र उचाई h ले जनाइएको छ ।

त्यसैगरी दुई आधारहरूको क्षेत्रफल र बक्र सतहको क्षेत्रफलको योग त्यो बेलनाको पूरासतहको क्षेत्रफल हुन्छ । सोलीको बक्र सतहको क्षेत्रफल πrl हुन्छ जहाँ अर्धब्यास r र छड्के उचाइ l छ ।

सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल बक्र सतहको क्षेत्रफल र आधारको वृत्तको क्षेत्रफलको योग हुन्छ ।

बेलना Cuboid को विस्तृत रूप भएकाले बेलनाको आयतन पनि आधारको क्षेत्रफललाई उचाइले गुणा गरेर निकालिन्छ अर्थात्, πr^2h हुन्छ ।

त्यस्तै सोलीको आयतन सोलीकै आधार तथा उत्तिकै उचाइमा रहेका बेलनाको एक तिहाई हुन्छ । अर्थात्, $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ हुन्छ ।

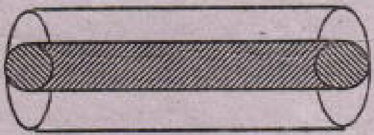
यसरी शिवजीले ठोस वस्तुकै प्रयोग गरेर यसको बनावट तथा सूत्रहरू प्रतिपादन गर्नुभयो र तत्सम्बन्धी प्रश्नहरू बताउन लगाउनुभयो ।

गोला :

गोलाको बाहिरी भाग बक्र सतह नै हुन्छ । जुन $4\pi r^2$ हुन्छ । जहाँ गोलाको अर्धब्यासलाई r ले जनाइएको छ । त्यस्तै आयतन $\frac{4}{3}\pi r^3$ हुन्छ ।

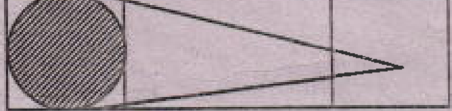
ठोस वस्तुहरूको सतह क्षेत्रफल तथा आयतन :

क) बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल = समानान्तरीय आयतकार ठोस वस्तु $\times \frac{\pi}{4}$



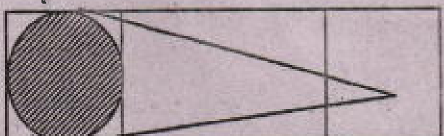
(जहाँ वस्तुको ब्यास र वर्गको भुजाको लम्बाई बराबर तथा दुवैको उचाइ समान छन्)

ख) बेलनाको आयतन = समानान्तरीय आयताकार ठोस वस्तु $\times \frac{\pi}{4}$



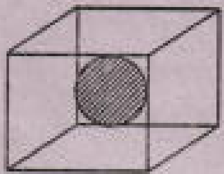
(जहाँ वस्तुको ब्यास र वर्गको भुजाको लम्बाई बराबर तथा दुवैको उचाइ समान छन्)

ग) सोलीको आयतन = समानान्तरीय आयतकार ठोस वस्तु $\times \frac{\pi}{12}$



(जहाँ वस्तुको ब्यास र वर्गको भुजाको लम्बाई बराबर तथा दुवैको उचाइ समान छन्)

घ) गोलाको सतहको क्षेत्रफल = समानान्तरीय आयतकार ठोस वस्तु $\times \frac{\pi}{6}$



(जहाँ वस्तुको ब्यास र वर्गको भुजाको लम्बाई बराबर तथा दुवैको लम्बाइ समान छन्)

ङ) वृत्तको परिधि = वर्गको परिमिति $\times \frac{\pi}{4}$

(जहाँ वृत्तको ब्यास र वर्गको भुजा बराबर छन्)

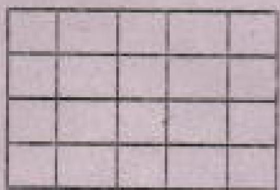
क्षेत्रफलसम्बन्धी समस्याहरू :

शिवजीले कागजको किनारामा बनेको भागको क्षेत्रफल निकाल्ने तरिका निम्नअनुसार गराउनुभयो :

आयताकार कागजको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो । त्यसको भित्र वरिपरि २ से.मि. चौडाइको किनारा (भित्रपट्टि आयत) कोर्न लगाउनुभयो । त्यो आयतको लम्बाइ, चौडाइ तथा क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो । सो कागजको किनाराको क्षेत्रफल निकाल्न बाहिरी आयतबाट भित्री आयत भयो, यसको अर्थ बाहिरी आयतबाट भित्री आयतको क्षेत्रफल घटाउनु पर्ने रहेछ भनी विद्यार्थीलाई उहाँले स्पष्ट पार्नुभयो । त्यसैगरी भित्री आयतका नापहरू र किनाराको चौडाइ दिएमा कसरी किनाराको क्षेत्रफल निकाल्ने हो त्यससम्बन्धी विद्यार्थी स्वयम्लाई छलफल गराउनुभयो । यसका साथै बगैचाको बीचबाट परस्पर काटीगएका बाटाहरूको क्षेत्रफल निकाल्ने तरिकाका लागि पनि कागजमा बाटोको आकार चौडाइहरू काटेर क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो ।

शिवजीले विद्यार्थीहरूलाई एउटा प्रश्न राख्नुभयो :

10m×8m को आयताकार चोकमा 2m×2m का ढुँगाहरू छाप्न कतिओटा ढुँगा आवश्यक पर्ला ?



उहाँले चौडाइतिरबाट चारओटा र लम्बाइतिर पाँचओटा ढुँगा राख्ने विचार गर्नुभयो । के यसो गर्दा पूरा चोक ढाक्छ ? किन ? विद्यार्थीहरूले उत्तर दिए कि पूरा ढाक्छ किनभने चौडाइमा 2m ले 8m लाई, त्यस्तै लम्बाइमा 2m ले 10m लाई विशेष भाग लाग्छ, भन्ने जवाफ दिए ।

कति टुक्रा चाहिएलान् भनी गर्नुभएको प्रश्नमा विद्यार्थीले 5×4=20 ओटा भन्ने जवाफ दिए । त्यसैले चौरको क्षेत्रफल $=20\times4m^2 = 80m^2$ छ । यसप्रकार शिवजीले सूत्र प्रतिपादन यसरी गर्नुभयो ।

चोकको क्षेत्रफल =एउटा ढुँगाको क्षेत्रफल×ढुँगाको सङ्ख्या

अथवा, $A=a\times N$ हुन्छ ।

यसैका आधारमा उहाँले विद्यार्थीलाई पर्खालको आयतन = प्रति ईँटाको आयतन×ईँटको सङ्ख्या हुन्छ भनी प्रमाणित गर्न लगाउनुभयो ।

यसैगरी कक्षाकोठाको वास्तविक लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ नाप्न लगाई पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्ने कार्य समूहगत रूपमा गराउनुभयो ।

३. परियोजना कार्य :

क) तलदिइएका कार्यहरू विद्यार्थीहरूलाई गर्न दिनुहोस् । यी कार्यहरूबाट उनीहरूको गणित सिकाइमा कस्तो प्रभाव पर्‍यो, प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस् ।

- आ-आफ्नो घरको कुनै कोठाको क्षेत्रफल, आयत आदि निकाल, र ईँटका लागि कति खर्च लाग्ला ? अनुमान गर ।
- कागजको एउटा ठूलो बाकसमा बेलनाकार हुने बट्टाहरू कतिओटा अटाउलान् ? नापेर लेख ।
- कागजका बेलना, प्रिज्म, पिरामिड, सोलीका नमूनाहरू बनाऊ ।

ख) माध्यमिक तहको क्षेत्रफल तथा आयतनसम्बन्धी पाठ शिक्षणका लागि उपयोगी learning module तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्रीहरू

- K.S. Sidhu, Teaching of Mathematics , Sterling Publishers Pvt. Ltd., New Delhi
- NCERT, Content-cum-Methodology of Teaching Mathematics for B.Ed. Student, New Delhi
- डा. हीराबहादुर महर्जन, माध्यमिक गणित शिक्षण
- डा. हरिप्रसाद उपाध्याय, गणित शिक्षण

एकाइ सात

तथ्याङ्कशास्त्र

Competency : Appriciate and use descriptive statistics in drawing information and representation of the information, interprete and draw conclusion.

१. परिचय :

मानव सभ्यताको शुरुवात सँगसँगै तथ्याङ्कशास्त्रको जन्म भएको मानिन्छ । हेब्रुस (Hebrews) तथा फाराह (Pharachs) जस्ता प्राचीन सभ्यताका मानिसहरूले जनसङ्ख्या र धन सम्पत्तिको गणना (Census) गर्न तथ्याङ्कशास्त्रको प्रयोग गरेको पाइन्छ । प्राचीन ग्रिसमा १४०० बि.सि. मा भूमिसुधारका लागि जमिनको तथ्याङ्क सङ्कलन गरेको अभिलेख पाइन्छ । तर पनि प्राचीनकालका तथ्याङ्कीय अभिलेखका वस्तुहरू मानिस, धनसम्पत्ति र जमिन भएको अनुमान गर्ने गरिएको छ ।

तथ्याङ्क (Statistics) शब्द ल्याटिन भाषाको 'Status' तथा इटालियन शब्द 'Statista' बाट आएको देखिन्छ । जसको अर्थ राज्य सञ्चालन (Political static) भन्ने हुन्छ । तसर्थ यसको प्रारम्भमा यसको प्रयोग राज्य सञ्चालनका लागि विभिन्न कार्यहरूमा भएको भनिन्छ । गणित शिक्षाको वर्तमान आधुनिक युगमा यो विद्यालाई केवल राज्य सञ्चालन व्यवस्थामा मात्र सीमित नराखी व्यवस्थापन, विज्ञान, कृषि, वनविज्ञान, मनोविज्ञान, तथ्याङ्कशास्त्र, समाजशास्त्र, अनुसन्धान आदि हरेक क्षेत्रमा प्रयोगमा ल्याउन थालिएको छ । यसले अध्ययनका क्षेत्रका आँकडाहरू प्राप्त गरी यिनीहरूको प्रस्तुतीकरण तथा विश्लेषणका आधारमा निष्कर्षमा पुग्न सहयोग गर्दछ । गणितमा यसको प्रयोगपछि जुनसुकै अध्ययनको सन्दर्भमा पनि तथ्याङ्कका आधारमा मात्र निष्कर्षमा पुग्ने पद्धतिको विकासमा महत्वपूर्ण योगदान पुगेको छ । केही वर्षपहिले विश्वविद्यालय तहमा मात्र अध्ययन गरिने तथ्याङ्कशास्त्रलाई हाल आएर विद्यालय तहको अनिवार्य गणित विषयको पाठ्यक्रममा प्राथमिक तहदेखि नै समावेश गरिएको छ । यस एकाइमा तथ्याङ्कशास्त्रअन्तर्गत तथ्याङ्क सङ्कलन, विश्लेषण, विभिन्न किसिमका ग्राफहरू, मध्यक, मध्यिका, रित, विस्तार (Range) र सम्भाव्यतासमेतका विषयवस्तुहरू र यी विषयवस्तुहरूको शिक्षण तरिकासमेत प्रस्तुत गरिएका छन् ।

२. **विषयवस्तु :**

तथ्याङ्क सङ्कलन र तालिकीकरण

शिक्षक रमेशले आफ्ना विद्यार्थीहरूलाई तथ्याङ्क सङ्कलनसम्बन्धी विषयवस्तुको शिक्षण गर्नका लागि प्रत्येकलाई बेग्ला-बेग्लै शीर्षकहरू छनौट गर्न लगाए । जस्तै : विगत पाँच वर्षमा आफ्नो विद्यालयबाट एस.एल.सी. उत्तिर्ण गर्ने छात्रछात्राहरूको सङ्ख्या, कक्षा ८ का विद्यार्थीहरूले अर्धवार्षिक परीक्षामा गणितमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क, कक्षाका विद्यार्थीहरूले लगाएका कपडाको रङ्ग, विद्यार्थीको उचाइ आदि । विद्यार्थीहरूले छनोट गरेको शीर्षकमा आ-आफ्नो तरिकाले तथ्याङ्कको सङ्कलन पनि गर्न लगाए । यही क्रममा विद्यार्थी प्रदिपले आफ्नो कक्षाका साथीहरूको उचाइ से.मि.मा. निम्नअनुसार सङ्कलन गरे :

118	120	120	122	123	120	121	121	120
119	121	122	120	121	118	119	120	122
120	119	121	121	120	121	122	121	119
122	121	123						

अब, शिक्षक रमेशले प्रदिपले सङ्कलन गरेको तथ्याङ्कलाई आधार मानेर निम्नलिखित प्रश्न गरे ।

क) सबैभन्दा बढी विद्यार्थी कति उचाइका रहेछन् ?

ख) सबैभन्दा बढी उचाइ कति रहेछ ?

ग) प्रदिपले जम्म कतिजनाको उचाइ सङ्कलन गरेछन् ?

घ) १२० से.मि. उचाइ हुने कति जना रहेछन् ?

प्रदिपले सङ्कलन गरेको जानकारीबाट यी प्रश्नहरूको उत्तर पाउन त कठिन छ र बढी समय लाग्छ भनेर पुष्पाले भनिन् । त्यसो भए के गर्दा माथिका प्रश्नहरूले खोजेका जानकारीहरू सजिलै पाउन सकिएला त ? शिक्षकले भने, प्रदिपले लेखेको उचाइलाई अर्को तरिकाले लेखेर राखेमा वा मिलाएर लेखेमा यस्ता प्रश्नहरूको उत्तर दिन सजिलो हुन्छ होला, छात्रा शर्मिलाले भनिन् । ल त शर्मिला कसरी लेख्ने होला ? लेखेर देखाइदेउ त ? भनी शर्मिलालाई उठाएपछि अनि निम्नअनुरूपको तालिका बनाइन । उनले तालिकाको एउटा कोठा (column) मा उचाइलाई राखेर अर्को कोठामा जतिजनाको उचाइ समावेश छ त्यत्ति नै सङ्ख्या राखेर देखाइन् । शिक्षक रमेशले शर्मिलालाई धन्यवाद दिदै तालिकामा केही सुधार गरी निम्नअनुसारको तालिका बनाई प्रस्तुत गरे :

<table>
<tr><th>उचाइ से.मी.मा</th><th>मिलान चिन्ह</th><th>बारम्बारता (t)</th></tr>
<tr><td>118</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>119</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>120</td><td>卌 |||</td><td>8</td></tr>
<tr><td>121</td><td>卌 ||||</td><td>9</td></tr>
<tr><td>122</td><td>卌</td><td>5</td></tr>
<tr><td>123</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">जम्मा</td><td>30</td></tr>
</table>

शिक्षक रमेशले माथि सोधेका प्रश्नहरू दोहोऱ्याए । विद्यार्थीहरूले ती सबै प्रश्नहरूको तालिका हेरेर तुरुन्त जवाफ दिए । साथै उनीहरूले सङ्कलन गरेका जुनसुकै तथ्याङ्कलाई पनि तालिकामा राखेपछि त्यसबाट पाउनु पर्ने जानकारी सजिलै पाउन सकिदोरहेछ भन्ने महशुस पनि गरे । त्यसपछि कक्षामा सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्कलाई तालिका बनाएर राख्नु पर्ने सहमति पनि बन्यो ।

शिक्षक रमेशले विद्यार्थीहरूलाई अङ्ग्रेजी पत्रिकाको एकएक प्याराग्राफ समूहमा वितरण गरे त्यसमा प्रयोग भएका स्वरवर्ण (Vowels: a,e,i,o,u) हरू प्रत्येकको सङ्ख्या गन्ती गरी लेख्न लगाए । विद्यार्थीहरूका चारओटा समूहमध्ये दुईओटाले मिलान चिन्ह प्रयोग गरी तालिका बनाए भने बाँकी दुईओटाले मिलान चिन्ह प्रयोग नगरी सङ्ख्या मात्र उल्लेख गरे । शिक्षक रमेशले ती दुवै प्रकारको तालिकाको बीचमा तुलना गर्न लगाई मिलान चिन्हसमेत भएको तालिका बनाउँदा तथ्याङ्क सङ्कलन कार्य बढी विश्वासिलो हुने र एकएक गरी टिप्दै जान सकिने भएकाले चिन्हसमेतको निम्नअनुसारको तालिका बनाउन लगाए ।

<table>
<tr><th>स्वर वर्ण (Vowels)</th><th>मिलान चिन्ह (Tally bars)</th><th>बारम्बारता
(Frequency)</th></tr>
<tr><td>a</td><td>卌 卌 ||</td><td>12</td></tr>
<tr><td>e</td><td>卌 卌 卌</td><td>15</td></tr>
<tr><td>i</td><td>卌 |||</td><td>8</td></tr>
<tr><td>o</td><td>卌 卌 |||</td><td>13</td></tr>
<tr><td>u</td><td>卌 ||</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="2">जम्मा</td><td>55</td></tr>
</table>

- शिक्षक रमेशले एकजना विद्यार्थीलाई अगाडि बोलाई उसलाई आफ्ना सबै साथीहरूको जन्ममहिना पालैपालो सोधेर मिलान चिन्ह प्रयोग गरी तालिका निर्माण गर्न लगाए ।
- शिक्षक रमेशले विद्यार्थीहरूलाई समूहगत रूपमा एउटा डाइस (Dice) चालिस पटक फाल्न लगाई प्रत्येक पटक केके पर्छ टिपी त्यसलाई तालिकामा देखाउन लगाए । मिलान चिन्हमा चारओटा धर्सालाई काटेपछि के सजिलो भयो , सोध्दै, गन्न सजिलो भयो भन्ने निष्कर्ष बताइदिए ।
- यसरी तथ्याङ्कलाई तालिकामा प्रस्तुत गर्दा धेरैजसो जानकारी एकै पटक थाहा पाउन सकिन्छ । यस्तो तालिकालाई बारम्बारता तालिका (Frequency table) भनिन्छ । तालिकामा मिलान चिन्ह प्रयोग गर्दा तथ्याङ्क सङ्कलन र गन्ती गर्न छिटोछरितो भई समयको बचत हुने व्यवस्थित हुने र गल्ती हुने सम्भावना न्यून हुने हुन्छ ।

२.२ प्रस्तुतीकरणमा प्रयोग भएका तालिका तथा ग्राफबाट सूचनाको खोजी (Seeking information from tables and graphs used in literature/display):

कुनै पनि शीर्षकमा प्राप्त सूचना एवम् तथ्याङ्कलाई तालिका तथा ग्राफमा राखी प्रस्तुत गर्दा एकै झलकमा धेरै जानकारीहरू अर्थपूर्ण तरिकाले सहजै प्राप्त गर्न सकिन्छ । कुनै पनि कोरा तथ्याङ्क (Raw data) बाट वस्तुनिष्ठ र सही सूचना एवम् जानकारीहरू सजिलै पाउन सकिदैन । त्यही कोरा तथ्याङ्कलाई तालिका र तथ्याङ्कअनुसारको ग्राफमा राखिसकेपछि त्यस्तो समस्या स्वतः हटेर जाने गर्दछ । प्राप्त तथ्याङ्कलाई आकर्षक र सजिलै बुझ्न सकिने गरी प्रस्तुत गर्नुपर्दा लेखाचित्रको प्रयोग गरिन्छ । त्यस्तै एकभन्दा बढी तथ्याङ्कहरू बीचमा तुलना गर्दा पनि लेखाचित्र (Graphs) ज्यादै उपयोगी मानिन्छ । यस्ता लेखाचित्र एकभन्दा बढी प्रकारका छन् । (तिनको विस्तृत चर्चापछि सोही शीर्षकमा गरिने छ ।)

तालिका तथा ग्राफको प्रयोग र यसबाट प्राप्त हुने सूचनाको खोजी गर्नेसम्बन्धी धारणाको शिक्षण गर्दा शिक्षक रमेशले कक्षाका विद्यार्थीहरूको जन्ममहिना पालैपालो सोधेर मिलान चिन्ह प्रयोग गरी निम्नअनुसारको तालिका तयार पारे :

जन्ममहिना	मिलान चिन्ह	बारम्बारता
वैशाख	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
जेष्ठ	~~||||~~ |||	8
आषाढ	~~||||~~ |	6
....	....	....
....	....	....
चैत्र	||	2
जम्मा		72

तालिका तयार गरी प्रस्तुत गरेपछि तालिकाका आधारमा निम्नलिखित प्रश्नहरूको जवाफ दिन लगाए।

- सबभन्दा बढी विद्यार्थीहरू जन्मेको महिना कुन हो ?
- सबभन्दा कम विद्यार्थीहरू जन्मेको महिना कुन हो ?
- विद्यार्थीहरूको कूल सङ्ख्या कति छ ?
- चैत्रमा भन्दा जेठमा कति विद्यार्थी बढी जन्मेका थिए ?
- चैत्रमा भन्दा आषाढमा कति प्रतिशत विद्यार्थी बढी जन्मेका थिए ?

शिक्षक रेमशले सोधेका प्रश्नहरूमध्ये अन्तिम प्रश्नको बाहेक अन्य प्रश्नहरूको जवाफ आयो तर "प्रतिशत" तालिकाले प्रस्तुत नगरेकाले त्यो प्रश्नको जवाफ आएन। त्यसपछि उनले कुनै पनि तथ्याङ्कलाई सही प्रकारले प्रस्तुतीकरणका लागि एकभन्दा बढी उपयुक्त विधिबाट तालिका र ग्राफ तयार पार्नुपर्दछ भन्ने निष्कर्ष सुनाए। सँगसँगै यसरी तयार पारिने तालिका वा ग्राफहरूबाट एकसाथ धेरै सूचनाहरू प्राप्त गर्न सकिन्छ भन्ने कुरा पनि पुनः दोहोऱ्याए।

नोट : विभिन्न किसिमका ग्राफ (Graphs) बारेमा अर्को पाठमा चर्चा गरिएको छ।

२.३ विभिन्न किसिमका ग्राफहरूको निर्माण र प्रस्तुतीकरण (Drawing and interpretation of bar pictures, pie diagrams, line graphs, histograms and giving inforrmation from the collected data):

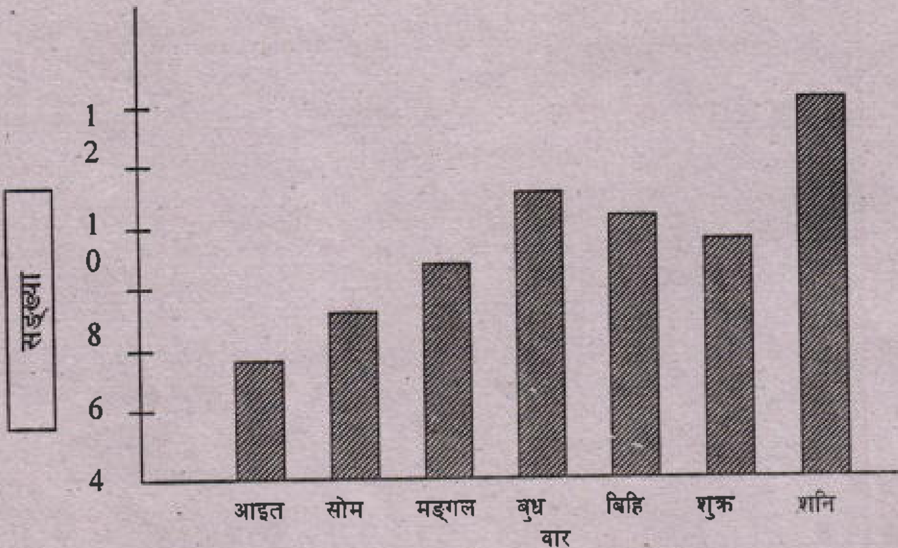
तथ्याङ्कलाई तालिकामा मात्र प्रस्तुत गर्दा सबै मानिसले त्यसलाई सहजै नबुझ्ने हुनसक्दछ। त्यसकारणले एकै झलकमा सबैले सजिलोसँग बुझ्नेगरी चित्र वा लेखाचित्रमा तथ्याङ्कलाई प्रस्तुत गर्दा आवश्यक सूचनाहरू प्राप्त गर्न र सामान्यीकरण गर्न सजिलो हुन्छ। तथ्याङ्कलाई लेखाचित्रमा देखाउँदा तथ्याङ्कको प्रकृतिअनुसार फरकफरक तरिका वा उपायहरू अपनाउन सकिन्छ। तथ्याङ्कलाई तालिकामा राखिसकेपछि त्यसको स्वरूपअनुसार निम्नअनुसारका कुनै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्ने गरिन्छ। जसका बारेमा यहाँ विस्तृत चर्चा गरिनेछ :

- चित्रलेखाचित्र (Picto graph)
- स्तम्भ लेखाचित्र (Bar graph)
- वृत्त चित्र (Pie chart)
- रेखा चित्र (Line graph)
- हिस्टो ग्राफ (Histograph)
- सञ्चित बारम्बारता बक्र (Ogive)

२.३.१ स्तम्भ लेखाचित्र (Bar graph):

शिक्षक रमेशले स्तम्भ लेखाचित्रको शिक्षण गर्ने समयमा एकजना खसी व्यापारीले एक हप्तासम्म गरेको खसी विक्रीको तथ्याङ्कलाई निम्नअनुसार प्रस्तुत गरे।

बार	खसीको सङ्ख्या
आइतबार	४
सोमबार	५
मंगलबार	७
बुधबार	१०
बिहिबार	८
शुक्रबार	७
शनिबार	१२



प्राप्त तथ्याङ्कलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिसकेपछि शिक्षक रमेशले विद्यार्थीहरूलाई तलका प्रश्नहरू गरे :

- चित्रमा स्तम्भको उचाइले के जनाएको छ ?
- चित्रमा दुईओटा स्तम्भको दूरी बराबर छ ?
- दिइएको तथ्याङ्कलाई यसरी लेखाचित्रमा किन देखाइएको होला ?
- सबभन्दा कम खसी बिक्री भएको बार कुन हो ?
- सबभन्दा बढी खसी बिक्री भएको बार कुन हो ?

यी र यस्तै प्रश्नहरूका आधारमा छलफल गरिसकेपछि विद्यार्थीहरूलाई यस्तो लेखाचित्र (Graph) लाई के भनिन्छ ? भन्ने प्रश्न गरे । यत्तिकैमा एकजना विद्यार्थीले यसलाई स्तम्भ लेखा चित्र (Bar graph) भनिन्छ भन्ने जवाफ दिए । हो यसलाई स्तम्भमा देखाइने हुनाले "स्तम्भ लेखाचित्र" भन्ने गरिएको हो भन्ने कुरा बताइदिए । साथै उनले यस्तो चित्र बनाएमा केके फाइदा हुन्छ ? भन्ने प्रश्न गर्दै निम्न कुराहरू बताइदिए :

- प्राप्त तथ्याङ्क (जानकारी) लाई स्तम्भ लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्दा बुझ्न र तुलना गर्न सजिलो पर्छ ।
- जानकारीहरूलाई अर्थपूर्ण तरिकाले यसलाई बुझाउन सजिलो पर्दछ ।
- पढ्न नसक्ने/नजान्ने मानिसले पनि यसबाट सूचना प्राप्त गर्न सक्दछ ।
- हेर्दा आकर्षक देखिन्छ ।
- स्तम्भ लेखाचित्र बनाउँदा स्तम्भको चौडाइ बराबर हुनुपर्दछ र लम्बाइले जानकारीको सङ्ख्या बताउँछ ।

स्तम्भ लेखाचित्रका दुईओटा स्तम्भहरूको दूरी समान हुनुपर्दछ । शिक्षक रमेशले यसपछि विद्यार्थीहरूलाई "तिमीहरूलाई कुन रङ्ग धेरै मनपर्छ ?" भन्ने प्रश्न गर्दै प्राप्त तथ्याङ्कलाई स्तम्भ लेखाचित्रमा देखाउन लगाए । साथै यस्तै अन्य एकएकओटा तथ्याङ्क खोजेर स्तम्भ लेखाचित्रमा देखाउने अभ्यास गर्न पनि भने ।

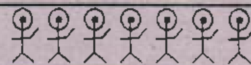
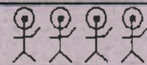
नोट :

एकभन्दा बढी आपसमा सम्बन्धित तथ्याङ्कहरूलाई स्तम्भ लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । यस्ता एकभन्दा बढी आँकडा/तथ्याङ्कलाई एउटै स्तम्भ लेखा चित्रमा प्रस्तुत गरिएको लेखाचित्रलाई बहुस्तम्भ लेखाचित्र (Multiple bar graph) भनिन्छ । यस्तो बहुस्तम्भ लेखाचित्र बनाउँदा पनि स्तम्भको चौडाइ बराबर बनाई लम्बाइले सङ्ख्या जनाउने गरी निर्माण गरिन्छ ।

२.३.२ चित्रग्राफ (Picto graph) :

कुनै पनि तथ्याङ्कलाई चित्रद्वारा व्यक्त गरिएमा तुलनात्मक रूपमा जीवन्त देखिन्छ । यस्तो अवस्थामा दिइएको आँकडाका बारेमा बुझ्न, धारणा बनाउन वा प्राप्त सूचनाका आधारमा सामान्यीकरण गर्न सजिलो हुन्छ । यदि प्राप्त आँकडालाई चित्रका आधारमा प्रस्तुत गरियो भने त्यसलाई चित्रग्राफ वा चित्र लेखाचित्र (Picto graph) भनिन्छ । प्राप्त तथ्याङ्कलाई अर्थपूर्ण र सजिलोसँग देखाउन सकिने भएकाले ग्राफचित्रमा यसको प्रयोग पर्याप्त मात्रामा भएको पाइन्छ । यसमा जुनकुरा प्रस्तुत गर्न खोजिएको हो, त्यसलाई सोही वस्तुको चित्रले जनाइन्छ । जस्तै :

श्री सरस्वती प्राथमिक विद्यालयको कक्षागत विद्यार्थीहरूको विवरण

कक्षा	विद्यार्थी सङ्ख्या
कक्षा-१	
कक्षा-२	
कक्षा-३	
कक्षा-४	
कक्षा-५	

सङ्केत :  = 5 जना विद्यार्थी

यो चित्रबाट केके सूचनाहरू थाहा पाउन सकिन्छ ?

- कक्षा एकमा सबभन्दा धेरै ३५ जना विद्यार्थी छन् ।
- कक्षा पाँचमा सबभन्दा कम १५ जना विद्यार्थी छन् ।
- तल्लो कक्षामा भन्दा माथिल्लो कक्षामा विद्यार्थी सङ्ख्या घट्दै गएको छ ।
- कक्षामा विद्यार्थी सङ्ख्या कम्तिमा १५ जना र बढीमा ३५ जना छन् आदि ।

यस्तै प्रकारका अन्य तथ्याङ्कलाई पनि चित्रग्राफमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । यस्तो ग्राफबाट प्रस्तुतीकरण सरल र ठोस खालको हुनजान्छ । साथै सान्दर्भिक देखिन्छ । ग्राफमा प्रयोगमा ल्याइएको सङ्केत आफै एकाइको बारेमा बोल्दछन् । तर ग्राफमा प्रयोगमा ल्याइने चित्र वा सङ्केत उपयुक्त आकारको हुनुपर्दछ ।

विद्यार्थीहरूलाई चित्रग्राफको शिक्षण गर्ने समयमा शिक्षक रमेशले एउटा आँकडालाई चित्रग्राफबाट प्रस्तुत गरी त्यसलाई अध्ययन गर्न लगाउने र यस्तो ग्राफबाट प्राप्त गर्न सकिने बढीभन्दा बढी सूचनालाई टिपोट गर्न लगाउने गर्दछन् । यसरी चित्रात्मक ढङ्गले कुनै आँकडालाई प्रस्तुत गर्ने तरिकालाई के भन्नसकिन्छ ? भन्ने बारेमा छलफल गर्दछन् । यस्तो ग्राफका बारेमा विद्यार्थीले पूर्ण जानकारी प्राप्त गरेपछि थप अभ्यासका लागि विद्यार्थीहरूमा दैनिक जीवनसँग सम्बन्धित तथ्याङ्कहरू सङ्कलन गरी चित्रग्राफमा देखाउन लगाउने र आवश्यकताअनुसार सुधार गर्न लगाउने गर्दा यसको धारणा राम्रोसँग बस्ने गरेको उनको अनुभव छ ।

२.३.३. हिस्टोग्राम (Histogram) :

तथ्याङ्कशास्त्र पाठको शिक्षण गर्ने क्रममा एकजना विद्यार्थीले रमेशलाई हिस्टोग्राम भनेको कस्तो ग्राफ हो ? यो कसरी तयार गरिन्छ ? भन्ने प्रश्न गरे । उक्त विद्यार्थीको जिज्ञाशा मेटाउनको लागि उनले यसको परिचय र तयार पार्ने तरिकाका बारेमा छलफल गरे । यही क्रममा बारम्बारताको वितरण (Frequency distribution) मा श्रेणी अन्तर (Class interval) लाई ठाडो आयतद्वारा देखाइएको ग्राफ नै हिस्टोग्राम हो भन्ने निष्कर्ष निकालियो तथ्याङ्कलाई श्रेणी अन्तरमा व्यक्त गरिएको अवस्थामा आयतको माध्ययमबाट बारम्बारता जनाई लेखाचित्रमा व्यक्त गर्ने गरिन्छ । यसमा श्रेणी अन्तर फरकफरक भएको अवस्थामा आयतको चौडाइमा फरक हुनआउँछ र त्यसको मान (Frequency) क्षेत्रफलको आधारमा व्यक्त गरिन्छ । प्राप्त तथ्याङ्कमा श्रेणी अन्तर फरकफरक भएको अवस्थामा सबभन्दा पहिला त्यसलाई समान बनाई हिस्टोग्राम बनाउनु पर्दछ । यस्तो तथ्याङ्क श्रेणी अन्तरलाई समान नबनाई हिस्टोग्राम बनाउन पनि सकिन्छ तर यसरी बनाएकामा क्षेत्रफलका आधारमा बारम्बारता प्रस्तुत गर्नु पर्ने भएकाले हेर्दा अलिकठिन देखिनेजस्तो हुन्छ । तसर्थ श्रेणी अन्तरलाई समान बनाइसकेपछि मात्र यसको निर्माण गर्दा आकर्षक र स्पष्ट देखिन्छ । सामान्यतया हिस्टोग्राम बनाउन निम्न चरणहरू अपनाउनु पर्दछ :

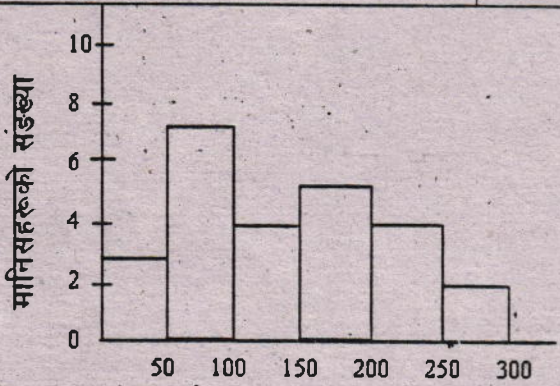
- x-अक्षमा श्रेणीअन्तर र y-अक्षमा त्यसको बारम्बारता देखाउनु पर्दछ ।
- x-अक्षमा श्रेणीअन्तरअनुसारका चौडाइ भएका आपसमा जोडिएका बारम्बारताअनुसारको उचाइ भएका आयतहरू खिच्नु पर्दछ ।
- y-अक्ष जहिले पनि शुन्यबाट शुरु गर्नुपर्दछ, तर x-अक्ष कुनै पनि उपयुक्त स्थानबाट शुरु गर्न सकिन्छ ।

यसमा आयतका उचाइहरू श्रेणीअन्तरको बारम्बारतासँग समानुपातमा हुन्छन् । यही सबै श्रेणीअन्तरहरू बराबर आकारका भएमा आयतका उचाइहरू श्रेणीअन्तरको बारम्बारतासँग समानुपातमा हुन्छन् । यस अवस्थामा प्रत्येक आयतको उचाइ त्यस श्रेणी अन्तरको बारम्बारतासँग बराबर हुन्छन् । श्रेणीअन्तरको फरक नै आयतको चौडाइ हुन्छ । तर श्रेणीअन्तरका आकार (फरक) बराबर नभएमा आयतको चौडाइ श्रेणी अन्तरको आकार र आवृत्तिको अनुपातमा आयतको उचाइ निर्धारण गरिन्छ । यसका लागि सबैभन्दा सानो श्रेणीअन्तरलाई सन्दर्भ अन्तर मानेर बारम्बारता वितरणका अन्य बारम्बारताको उचाइ निर्धारण गर्नुपर्दछ । तर फरक भएको श्रेणीअन्तरलाई समान श्रेणी अन्तरमा परिवर्तन गरी हिस्टोग्राम तयार पारेमा राम्रो देखिनुका साथै सजिलो हुन्छ ।

हिस्टोग्राम सम्बन्धी केही उदाहरण हेरौं :

क)

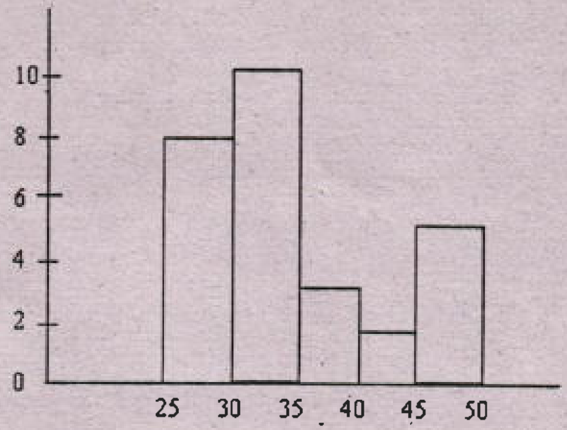
दैनिक आम्दानी (रु मा)	मानिसहरूको सङ्ख्या
0-50	3
50-100	7
100-150	4
150-200	5
200-250	4
250-300	2



दैनिक आम्दानी (रुपैयामा)

ख)

शिक्षकहरूको उमेर (वर्षमा)	शिक्षक सङ्ख्या
25-30	8
30-35	10
35-40	3
40-45	2
45-50	5

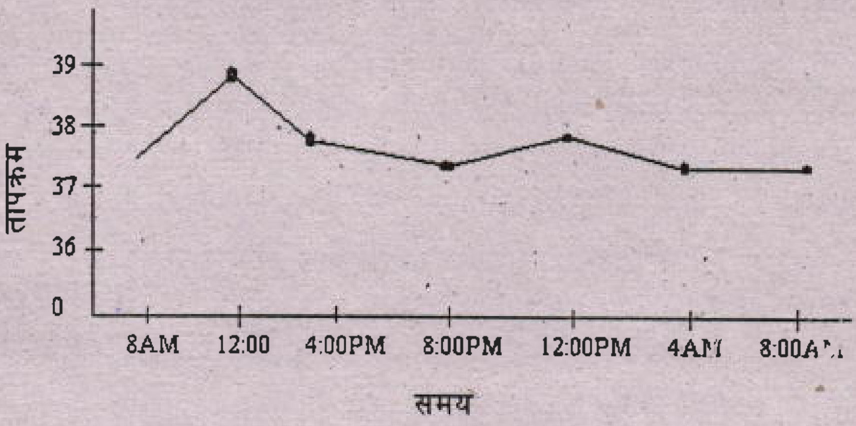


प्राप्त आँकडाको श्रेणीअन्तर शून्य (Origin) बाट सुरु नभई बीचबाट सुरु भएको अवस्थामा त्यस्तो आँकडाको हिस्टोग्राम बनाउने क्रममा शून्यको नजिक x-अक्षलाई भाँचेर (Break) देखाउनु पर्दछ ।

शिक्षक रमेशले त्यसपछि अर्को एउटा तथ्याङ्कको आधारमा हिस्टोग्राम बनाउन लगाए ।

२.३.४ रेखाचित्र (Line-graph):

सबैखालका तथ्याङ्कलाई एउटै खाले लेखाचित्र (Graphs) मा व्यक्त गर्न उपयुक्त हुँदैन । तथ्याङ्कहरूको प्रकृतिअनुसार कुन खालको ग्राफ उपयुक्त हुन्छ भन्ने निर्धारण गरिन्छ । कतिपय तथ्याङ्कलाई अन्य ग्राफबाटभन्दा रेखाग्राफ (Line-graph) बाट बढी प्रभावकारी ढङ्गले व्यक्त गर्न सकिन्छ । तापक्रम, वर्षा, गतिसँग सम्बन्धित तथ्याङ्कहरूलाई चित्रग्राफ, वृत्तचित्र आदि ग्राफबाट प्रस्तुत गर्नुभन्दा रेखाचित्रद्वारा गर्न बढी अर्थपूर्ण र बढी सूचनादायक हुने हुन्छ । त्यसैले यस्ता प्रकृतिका तथ्याङ्कलाई रेखाचित्रमा व्यक्त गर्ने गरिन्छ । उदाहरणका लागि एकजना बिरामीको एक दिनभरिको तापक्रमको विवरण रेखाचित्रमा देखाइएको छ ।



यस्तो रेखाचित्रको शिक्षण गर्ने समयमा उनले माथि प्रस्तुत गरिएको रेखाचित्र विद्यार्थीहरूलाई देखाई तलका प्रश्नहरू गर्ने गर्दछन् ।

- तापक्रम कति समयको फरकमा नापिन्छ ?
- सबभन्दा धेरै र सबभन्दा कम तापक्रम भएको समय कुन हो ?
- एक दिन (२४ घण्टा) मा तापक्रम कतिसम्म पुग्यो ?
- तापक्रममा क्रमशः सुधार आएको छ ? आदि ।

मैले यस्ता प्रश्नहरूमा छलफल गराएपछि विद्यार्थीहरूमा रेखाचित्र पढ्ने सीपको विकास हुनुका साथै यस्तो चित्रको महत्व र प्रयोगलाई समेत बुझी विद्यार्थीहरूमा अर्थपूर्ण सिकाइ भएको अनुभव गर्दछु । रेखाचित्रसम्बन्धी यसरी स्पष्ट भइसकेपछि सिकाइलाई दिगो बनाउन थप अभ्यासका लागि आफ्नो विद्यालयको दिनभरको तापक्रम, वर्षको औसत वर्षा, हावाको गति, गाउँमा शिशुहरूको वार्षिक जन्मदर आदि तथ्याङ्कलाई रेखाचित्र बनाई व्यक्त गर्न लगाउन सकिन्छ, जसले गर्दा विद्यार्थीहरूले व्यावहारिकरूपमा रेखाचित्रलाई बुझी आफ्ना क्रियाकलापहरूलाई पनि रेखाचित्रमा व्यक्त गरी हेर्ने मौका पाउँछन् । जस्तै : आफूलाई हप्ताभरिमा (दैनिक समयमा) विद्यालय पुग्न लागेको समयलाई विद्यार्थी प्रकाशले रेखाचित्र तयार पारी देखाउन सक्छन् ।

२.३.५ वृत्तचित्र (Pie-chart/Pie-diagram):

शिक्षक रमेशले कुनै एउटा सिङ्गो वस्तु वा चिजको विभिन्न भाग देखाउन वृत्त चित्र प्रयोग गर्ने गर्दछन् । उनले वृत्तचित्रको प्रयोग गर्दा प्राप्त तथ्याङ्कको कूल (सिङ्गो) परिमाणलाई ३६०$^\circ$ सँग तुलना गरी तथ्याङ्कका प्रत्येक हिस्सा (Items) हरूलाई प्रतिनिधित्व गर्ने कोणहरू निकाल्दछन् । यस्ता हिस्सा (भाग) हरूलाई प्रतिशतमा व्यक्त गर्ने पनि गर्दछन् । शिक्षक रमेशले प्रत्येक हिस्साले प्राप्त गर्ने कोणको नाप पत्ता लगाउन तलको सूत्र प्रयोग गर्दछन् :

$$\text{हिस्साले जनाउने कोण} = \frac{\text{हिस्सा}}{\text{कूल परिमाण}} \times 360^\circ$$

> विभिन्न शीर्षकमा दिइएका तथ्यहरूको कुल राशिलाई तिनीहरूको मानका अनुपातमा विभिन्न खण्डमा विभाजित गरी वृत्तमा प्रस्तुत गरिएको चित्रलाई वृत्तग्राफ वा वृत्तचित्र (Pie-chart) भनिन्छ । दुई वा दुईभन्दा बढी तथ्याङ्कको तुलना गर्न यसलाई प्रतिशतमा देखाउनु पर्दछ । त्यस वृत्तको केन्द्रीयकोण ३६०$^\circ$ हुने भएकाले सम्पूर्ण राशिलाई ३६०$^\circ$ मानेर सोहीअनुसार प्रत्येक खण्डको कोण पत्ता लगाई वृत्तलाई सोहीअनुसार भाग लगाउनु पर्दछ । वृत्तग्राफलाई अझ सरल किसिमले बनाउनका लागि तथ्याङ्कलाई प्रतिशतमा प्रस्तुत गर्नुपर्दछ । यसका लागि पूरा वृत्तलाई १००%=३६०$^\circ$ वा १%=३.६$^\circ$ गरी निकाल्न सकिन्छ ।

शिक्षक रमेशले विद्यार्थीहरूलाई वृत्तचित्रको शिक्षण गर्ने क्रममा तलको उदाहरण दिए ।

एक जना मानिसको मासिक खर्च विवरण :

शीर्षक	खर्च
खाजामा	रु १०००
शिक्षामा	रु २०००
घरखर्च	रु ३५००
लुगामा	रु ४०००
यातायात	रु ३०००

यस तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा व्यक्त गर्दा,

जम्मा खर्च =रु १३,५००।-

त्यसैले जम्मा खर्च

रु. $13500=360^{o}$

रु. $1=\left(\frac{360}{13500}\right)^{\circ}$

अब,

खाजामा भएको खर्च=$\left(\frac{360}{13500}\times 1000\right)^{\circ} = 26.7^{\circ}$

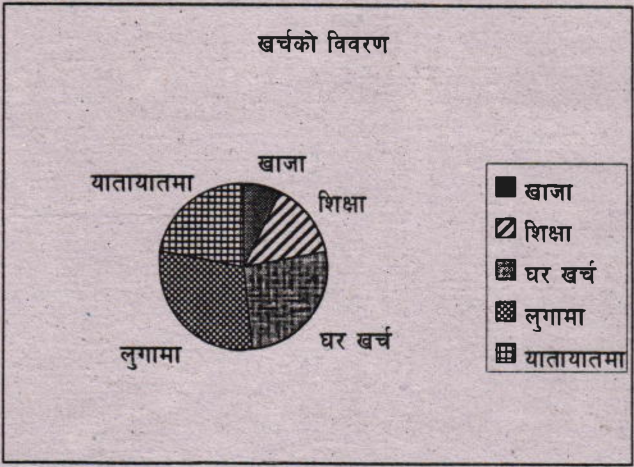
शिक्षामा भएको खर्च=$\left(\frac{360}{13500}\times 2000\right)^{\circ} = 53.3^{\circ}$

घर खर्च=$\left(\frac{360}{13500}\times 3500\right)^{\circ} = 93.3^{\circ}$

लुगामा भएको खर्च=$\left(\frac{360}{13500}\times 4000\right)^{\circ} = 106.7^{\circ}$

यातायातमा भएको खर्च=$\left(\frac{360}{13500}\times 3000\right)^{\circ} = 80^{\circ}$

अब, यो सूचनालाई आधार मानी वृत्तलाई यहाँ निकालिएको डिग्रीका आधारमा बाँडेर वृत्तचित्र तयार पारिन्छ ।



यसप्रकार शिक्षक रमेशले वृत्तचित्रको उदाहरण दिई शिक्षण गरेपछि विद्यार्थीहरूलाई पनि आ-आफ्नो घरमा हुने खर्चको विवरण, पृथ्वीमा भएको जमिन र पानीको भाग, एकदिनमा आफूले गरिने कामका लागि समयको बाँडफाँड, एउटा निर्वाचनमा उम्मेदवारले पाएको मत सङ्ख्या आदि तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा राखी प्रस्तुत गरे ।

२.३.६ सञ्चित बारम्बारता बक्र (Comulative frequency curve or ogive):

विद्यार्थीहरूलाई प्राप्त तथ्याङ्कहरूको अर्थपूर्ण प्रस्तुतीकरण गर्ने विविध तरिकाहरूमध्ये चित्रग्राफ, वृत्तग्राफ, स्तम्भ लेखाचित्र र रेखाचित्रका बारेमा अध्ययन गराइसकेपछि उनीहरूलाई कुनै थप जिज्ञाशा छ कि भनी बुझ्ने क्रममा एकजना विद्यार्थीले यीबाहेक तथ्याङ्कलाई ग्राफमा प्रस्तुतीकरण गर्ने कुनै तरिका छैनन् सर ? भनी प्रश्न गरे । त्यसपछि मैंले प्राप्त तथ्याङ्कलाई ग्राफमा प्रस्तुतीकरण गर्ने अर्को एउटा तरिका पनि छ भन्दै सञ्चित बारम्बारता बक्र (Ogive) का बारेमा निम्नअनुसार बताइदिएँ ।

यदि कुनै वर्गीकृत तथ्याङ्कको श्रेणी अन्तर (Class-interval) लाई तेर्सो अक्षमा जनाई त्यो श्रेणीअन्तरको सञ्चित बारम्बारतालाई ठाडो अक्षमा सङ्कलन गरी हातले स्वतन्त्र रूपमा खिच्दा (Freehand-drawing) प्राप्त हुने बक्र रेखालाई सञ्चित बारम्बारता बक्र (Cumulative frequency curve or ogive) भनिन्छ । यो एक प्रकारको रेखाग्राफ (Line graph) हो । प्रत्येक आँकडा वा श्रेणीको सञ्चित बारम्बारता निकाली सोको तालिका बनाउँदा निम्नलिखित दुईविधिमध्ये कुनै प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

क) भन्दा कम विधि (Less than method) र

ख) भन्दा बढी विधि (More than method)।

प्राप्त तथ्याङ्कबाट यो बक्र तयार पार्नका लागि बनाइने सञ्चित बारम्बारता तालिकाका निर्माण गर्ने आधारमा यी विधिलाई छुट्ट्याउने गरिन्छ । सञ्चित बारम्बारतालाई घट्दो क्रममा राखी यसैका आधारमा बक्र तयार पारिने विधिलाई “भन्दा कम विधि” भनिन्छ । यस विधिबाट

तयार पारिएको बक्र तलबाट माथि उक्लिदैं गएको बन्न आउँछ । त्यस्तै सञ्चित बारम्बारतालाई बढ्दो क्रममा राखी यसैका आधारमा बक्र तयार पारिने विधिलाई "भन्दा बढी विधि" भनिन्छ । यस विधिबाट बनेको बक्र माथिबाट तल ओर्लदैं गएको बन्दछ । प्राप्त तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता बक्रमा प्रस्तुत गर्दा निम्नअनुसार गर्नुपर्दछ ।

- ग्राफमा तेर्सोतर्फको अक्षमा तथ्याङ्कको श्रेणीअन्तरलाई र ठाडो अक्षमा बारम्बारता (Frequency) राख्ने ।
- तथ्याङ्कलाई क्रमशः ग्राफमा राख्ने/Plot गर्ने/वा चिन्ह √ लगाउने ।
- चिन्ह लगाइएको बिन्दुहरूलाई क्रमशः हातले जोड्दै जाने ।
- अब, सञ्चित बारम्बारता बक्र तयार हुन्छ ।

एउटा तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता बक्र तयार पारेर हेरौं ।

कुनै एउटा विद्यालयमा कक्षा : ८ को गणित विषयको परीक्षामा विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क र विद्यार्थी सङ्ख्याको विवरण निम्नअनुसार छ :

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या
0-20	10
20-40	15
40-60	20
60-80	10
80-100	5

यस तथ्याङ्कलाई "भन्दा कम विधि" बाट बारम्बारता तालिका बनाउँदा :

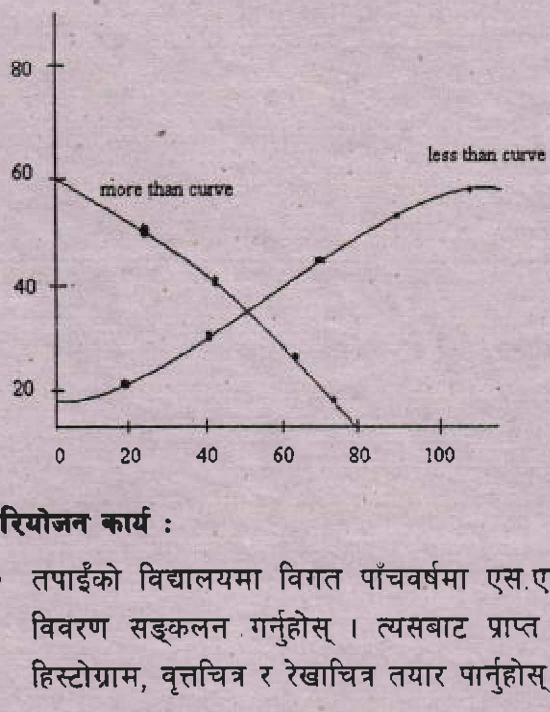
प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या
20 भन्दा कम	10
40 भन्दा कम	25
60 भन्दा कम	45
80 भन्दा कम	55
100 भन्दा कम	60

यही तथ्याङ्कलाई "भन्दा बढी विधि" बाट बारम्बारता तालिका तयार गर्दा,

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या
0 वा 0 भन्दा बढी	60
20 वा 20 भन्दा बढी	50
40 वा 40 भन्दा बढी	35
60 वा 60 भन्दा बढी	15
80 वा 80 भन्दा बढी	5

अब, यी दुवै तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता बक्रमा प्रस्तुत गर्दा, (दुवै विधिबाट)

सञ्चित बारम्बारता बक्र (Ogive)



३. परियोजन कार्य :

- तपाईँको विद्यालयमा विगत पाँचवर्षमा एस.एल.सी. परीक्षा उत्तीर्ण गर्ने छात्रछात्राहरूको विवरण सङ्कलन गर्नुहोस् । त्यसबाट प्राप्त तथ्याङ्कलाई चित्रग्राफ, स्तम्भ लेखाचित्र, हिस्टोग्राम, वृत्तचित्र र रेखाचित्र तयार पार्नुहोस् ।
- आफ्नो विद्यालयमा अध्ययनरत ब्राह्मण, क्षेत्री, दलित र जनजातिका विद्यार्थीहरूको तथ्याङ्क सङ्कलन गर्नुहोस्, तथ्याङ्क, उमेरगत, कक्षागत, छात्रछात्रा, आदि आधारमा लिनु पर्नेछ । यसरी सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्कका आधारमा कुन तथ्याङ्कका लागि कुन ग्राफ बनाउन उपयुक्त हुन्छ, प्रत्येक तथ्याङ्कलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । साथै प्रस्तुत गरिएको लेखाचित्रबाट केकस्ता सूचनाहरू प्राप्त गर्न सकिन्छ ? र यसलाई केकस्तो प्रयोगमा ल्याउन सकिन्छ ? सो पनि उल्लेख गर्नुहोस् ।

४. **सन्दर्भ सामग्री :**

- Asthana, B.N. Elements of statistics, part 1 & 2.
- Gupta. S.P., An Easy approach of statistics.
- Gupta. S.P., Fundamental of statistics.
- Saxena, H.C. Elementary of statistics.

पाठ : दुई

मध्यक, मध्यिका, रीत, विस्तार र चतुर्थांशको विस्तार

१. परिचय :

ग्राफ, चार्ट तथा बारम्बारता वितरणका ग्राफहरू आदिबाट हामी तथ्याङ्क कसरी फैलिएर वा वितरित भएर रहेका छन् भन्ने कुराको स्पष्ट जानकारी प्राप्त गर्न सक्दछौं । तर यत्तिले मात्र तथ्याङ्कका अन्य महत्वपूर्ण विशेषताहरूका बारेमा जानकारी प्राप्त गर्न कठिनाइ पर्दछ । त्यसैले तथ्याङ्कहरूलाई सही र अर्थपूर्ण ढङ्गले बुझ्नका लागि ग्राफ, चार्ट र तालिकाबाहेक तथ्याङ्कका थप विशेषताहरू र वास्तविक रूप थाहा पाउनका लागि तथ्याङ्कहरूका बीचमा तुलना गर्नका लागि थप प्रक्रियाहरूको अध्ययन आवश्यक पर्दछ । त्यसैले यस पाठमा मध्यक, मध्यिका, रीत, विस्तार (Range), आन्तरिक चतुर्थांशको विस्तार (Inter quartile range) यिनीहरूको प्रयोगका बारेमा चर्चा गरिने छ ।

२. विषयवस्तु

२.१ मध्यक (Mean)

क) मैले मध्यकको शिक्षण गर्ने समयमा सबैजना विद्यार्थीहरूलाई आ-आफ्नो पैतालाको लम्बाइ से.मी. मा नाप्न लगाएँ । नापेर निकालेको लम्बाइलाई टिप्न लगाएर बोर्डमा सबैजनाको नाप टिपेँ । नाप यस्तो आयो

15, 15, 14, 16, 16, 14, 18, 15, 16, 18

यसपछि तलका प्रश्न सोधेँ :

- तिमीहरू सबैको खुट्टाको नापको प्रतिनिधित्व गर्ने एउटा सङ्ख्या के हुनसक्छ ?
- सबैलाई प्रतिनिधित्व गर्ने त्यस्तो सङ्ख्या कसरी आउँछ होला ?

यस्तो सङ्ख्या "औसत" निकालेर आउँछ । एकजना छात्राले जवाफ दिइन । त्यसपछि सबैजनालाई औसत निकाल्न भनेँ र निम्नअनुसार निकाले :

$$\text{औसत } (Average) = \frac{15+15+14+16+16+14+18+15+16+18}{10}$$

$$= \frac{157}{10}$$

$$\text{औसत अङ्क} = 15.7$$

यहाँ सबै विद्यार्थीहरूको पैतालाको लम्बाइलाई प्रतिनिधित्व गर्ने अङ्कलाई अङ्कगणितीय मध्यक (Arithmetic mean) वा औसत अङ्क (Average) भनिन्छ । कुनै पनि तथ्याङ्कको यसरी मध्यक निकाल्दा के फाइदा होला ? भन्ने प्रश्न गर्दै विचार गर्न लगाएँ ।

विद्यार्थीका पैतालाको लम्बाइको मध्यक निकालेजस्तै गरी अन्य यस्तै तथ्याङ्कहरूको पनि मध्यक निकाल्न सकिन्छ ? भन्ने प्रश्नमा सकिन्छ भन्ने जवाफ प्राप्त भएपछि त्यस्तै केही उदाहरणहरू लिएर मध्यक निकाल्ने अभ्यास गर्न लगाएँ ।

विद्यार्थीहरूले प्राप्त तथ्याङ्कहरू सबैलाई जोडेर जतिओटा सङ्ख्या छन् त्यत्तिले नै भाग गरेपछि औसत वा मध्यक निस्कन्छ भन्ने निष्कर्ष निस्केपछि यसलाई सूत्रका रूपमा व्यक्त गर्दा मध्यक $\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$, जसमा x- वैयक्तिक अङ्क हुन्छ भन्ने कुरा स्पष्ट भयो ।

> विद्यार्थीहरूलाई अङ्कगणितीय मध्यकको शिक्षण गर्दा सामान्य औसतको शिक्षणबाट शुरु गरी क्रमश: वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यक (Mean) तिर डोऱ्याउँदा शिक्षणसिकाइमा सरलता आउँछ । यसका लागि विद्यार्थीको उचाइको औसत, विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्कको औसत जस्ता प्रसस्त उदाहरणहरूबाट धेरै अभ्यास गरेपछि मात्र सूत्रहरूको प्रयोग सिकाउँदा शिक्षणसिकाइ प्रभावकारी हुन्छ । मध्यकलाई $\bar{x}$ ले जनाउने गरिन्छ ।

ख) अर्को दिन मैले विद्यार्थीहरूलाई तलको तथ्याङ्क दिएर मध्यक निकाल्न भने कक्षा ९ का विद्यार्थीहरूले अनिवार्य गणितको पूर्णाङ्क 50 मा लिइएको अर्धवार्षिक परीक्षामा प्राप्त गरेको अङ्क निम्नअनुसार छ :

प्राप्ताङ्क :	20	25	30	35	40
विद्यार्थी सङ्ख्या :	5	10	12	8	5

यो तथ्याङ्कको अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्न विद्यार्थीहरू अलमलमा परेको थाहा पाएपछि मैले यो तथ्याङ्कको प्राप्ताङ्कलाई x र विद्यार्थी सङ्ख्यालाई f मानेर निम्नअनुसार तालिका बनाउन लगाएँ :

x	f	fx
20	5	100
25	10	250
30	12	360
35	8	280
40	5	200
विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या(N) = 40		$\sum$fx=1190

यस्तो तालिका बनाएपछि विद्यार्थीहरूले सरल अनुभव गरे । अब उनीहरूले प्राप्ताङ्क र विद्यार्थी सङ्ख्याको गुणनफल जोडेर आएको योगफलाई जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्याले भाग गरेमा अङ्कगणितीय मध्यक निस्कने बताए र यसरी मध्यक निकाले ।

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{1190}{40}$$

$$\therefore \bar{x} = 29.75$$

यहाँ लेखिएको सूत्रमा f ले बारम्बारता (Frequency), x ले चल सङ्ख्या (Variable) र N ले परिणामको सङ्ख्या (Number of items) लाई जनाउँछ ।

यसपछि विद्यार्थीहरूलाई यस्ता खालका अन्य उदाहरणहरू दिएर र उनीहरू आफैलाई खोज्न लगाएर अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्ने अभ्यास गर्न लगाएँ ।

विद्यार्थीहरूलाई कुनै पनि गणितीय समस्या समाधान गर्ने तरिकाको शिक्षण गरिसकेपछि "यो" केका लागि प्रयोग हुन्छ ? यसबाट के फाइदा हुन्छ ? भन्ने बारेमा छलफल गर्दा बढी उत्प्रेरणा जाग्ने र सिकाइमा सजिलो हुने मेरो अनुभव भएकाले मैले सधैंजसो यस्ता गणितीय धारणाको शिक्षणका क्रममा त्यसको उपयोगिता र प्रयोगका बारेमा छलफल गर्ने र विद्यार्थीहरूलाई बताइदिने गर्दछु । माथिको उदाहरणमा अङ्कगणितीय मध्यक निकालेपछि विद्यार्थीहरूले प्राप्त गरेको औसत उपलब्धिस्तर घट्यो वा बढ्यो ? कुनै एकदुईजना विद्यार्थीले प्राप्ताङ्क कम ल्याए भने कक्षाको उपलब्धि पनि तल झर्छ, आदि कुराको जानकारी पाउन सकिन्छ ।

ग) अङ्कगणितीय मध्यककै शिक्षणको क्रममा मैले पुनः तलदिएको अर्को तथ्याङ्क दिएर यसमा मध्यक कसरी निकाल्ने होला ? भन्ने प्रश्न गरेँ :

कक्षा ८ का विद्यार्थीहरूले प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्क निम्नअनुसार छन् :

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या
0-10	4
10-20	6
20-30	10
30-40	20
40-50	6
50-60	4

यो तथ्याङ्कबाट विद्यार्थीहरूलाई मध्यक निकाल्न लगाएँ । मैले उनीहरूलाई आफूसँगसँगै काम गर्न लगाउँदै निम्नअनुसारको तालिका बनाई मध्यक निकाल्न लगाएँ :

प्राप्ताङ्क (श्रेणीअन्तर)	मध्यमान (m)	बारम्बारता (f)	f×m
0-10	5	4	20
10-20	15	6	90
20-30	25	10	250
30-40	35	20	700
40-50	45	6	270
50-60	55	4	220
		$N=(\sum f)=50$	$\sum fm=1550$

अब,

अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्न,

$$\bar{x}=\frac{\sum fm}{N}$$

$$=\frac{1550}{50}$$

$$\therefore \bar{x}=31$$

दिइएको वर्गीकृत तथ्याङ्कबाट यहाँ उल्लेख गरिएको विधिबाट अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्न सकिन्छ । तर ठूलाठूला सङ्ख्याहरू भएका तथ्याङ्कमा सधै यो तरिकाबाट मध्यक निकाल्दा हिसाब (Calculation) गर्न गाह्रो हुन्छ । यस्ता तथ्याङ्कबाट मध्यक निकाल्ने अर्को तरिका पनि छ । यसलाई छोटो तरिका (Shortcut method) पनि भनिन्छ । यस तरिकाबाट मध्यक निकाल्दा एउटा सङ्ख्यालाई मध्यक मानी हिसाब गरिन्छ । यसलाई 'a' ले जनाउने गरिन्छ । यसलाई कल्पित मध्यक (Assumed mean) भनिन्छ । कल्पिक मध्यकको प्रयोग गर्दा प्रत्येक मध्यबिन्दु 'm' बाट कल्पित मध्यक a घटाउँदा आएको फरकलाई d ले जनाइन्छ । यस तरिकाबाट मध्यक पत्ता लगाउन निम्न सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

$$\bar{x}=a+\frac{\sum fx}{N};$$

यहाँ, a=कल्पित मध्यक,

$\sum fd$=फरक (d) र बारम्बारता (f) को गुणनफलको योगफल

N= बारम्बारताको कूल योग ।

अब,

मैले यो सूत्र प्रयोग गरेर माथिकै तथ्याङ्कको मध्यक निकाल्न लगाएँ । यसका लागि निम्नअनुसार गर्न लगाएँ : मानौ, कल्पित मध्यक (a)=35

प्राप्ताङ्क (श्रेणीअन्तर)	मध्यमान (m)	बारम्बारता (f)	d=m-a	fd
0-10	5	4	5-35=-30	-120
10-20	15	6	15-35=-20	-120
20-30	25	10	25-35=-10	-100
30-40	35	20	35-35=0	0
40-50	45	6	45-35=+10	+60
50-60	55	4	55-35=+20	+80
		N=50		$\sum$fd=-200

मध्यक निकाल्ने सूत्र प्रयोग गर्दा,

$$\bar{x} = a + \frac{\sum fd}{N}$$

$$= 35 + \frac{-200}{50}$$

$$= 35 - 4$$

$$\therefore \bar{x} = 31$$

यस्तो खालको वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यक निकाल्नका लागि वर्गान्तर (Class-interval) लाई समावेश गरेर पनि निकाल्न सकिन्छ । यस्तो गरी मध्यक निकाल्दा सूत्र, निम्नअनुसार हुन्छ :

$$\bar{x} = a + \frac{\sum fd'}{N} \times i$$

यसमा d^1=d/i, i=वर्गान्तर हुन्छ ।

माथिकै तथ्याङ्कलाई यस तरिकाबाट निम्नअनुसार मध्यक निकाल्न लगाउन सकिन्छ । मैले यसको शिक्षण गर्नुपर्दा यसरी गर्ने गर्दछु ।

प्राप्ताङ्क (श्रेणीअन्तर)	मध्यमान (m)	बारम्बारता (f)	d=m-a	d'=d/c	fd
0-10	5	4	-30	-3	-12
10-20	15	6	-20	-2	-12
20-30	25	10	-10	-1	-10
30-40	35	20	0	0	0
40-50	45	6	+10	+1	+6
50-60	55	4	+20	+2	+8
		N=50			$\sum fd^1$=-20

यहाँ, कल्पित मध्यक (a)=35

वर्गान्तर (i)=10

अब,

$$\bar{x} = a + \frac{\sum fd^1}{N} \times i$$

$$= 35 + \frac{-20}{50} \times 10$$

$$= 35 - 4$$

$$\therefore \bar{x} = 31$$

यसरी अङ्कगणितीय मध्यकको शिक्षण गर्दा श्रेणीअनुसार फरकफरक सूत्रको प्रयोग गरी निकाल्ने तरिका सिकाउने गरिन्छ । एउटै खालको श्रेणीबाट मध्यक निकाल्दा पनि एकभन्दा बढी तरिकाबाट सिकाउने र सरल तरिका छान्न लगाउने गर्दा विद्यार्थीहरू बढी स्पष्ट हुने गरेको अनुभव मैले गरेको छु ।

२.२ मध्यिका (Median)

क) अङ्कगणितीय मध्यक (Mean) का बारेको शिक्षणसिकाइ क्रियाकलापको समाप्तिपछि एकजना विद्यार्थीले मध्यिका (Median) भनेको कस्तो हो त सर ? यो पनि मध्यकजस्तै हो ? भनेर प्रश्न गरे । उनको जिज्ञासालाई शान्त पार्न मैले केही विद्यार्थीहरूलाई आआफ्नो तौल भन्न लगाएर बोर्डमा टिप्दै गएँ । विद्यार्थीको तौल कि.ग्रा. मा निम्नअनुसार थियो :

35, 42, 41, 38, 40, 42, 45, 37, 44

प्राप्त तथ्याङ्कलाई सानोदेखि ठूलोको क्रममा मिलाउँदा,

35, 37, 38, 40, 41, 42, 42, 44, 45

यहाँ, तथ्याङ्कको ठीक बीचमा परेको मान = 41

त्यसैले मध्यिका 41हुन्छ ।

अर्को तरिका :

यो तथ्याङ्कमा पदहरूको सङ्ख्या (N) = 9 छ, अब, मध्यिका स्थान पत्ता लगाउँदा, $\left(\frac{N+1}{2}\right)$औ पद नै मध्यिका हुन्छ, त्यसैले यहाँ $\left(\frac{9+1}{2}\right)$औ पद=5 औ पद 41 मध्यिका हो ।

यति उदाहरण दिइसकेपछि मध्यिका भनेको के रहेछ त ? यसको अर्थको खोजी गर्न लगाएँ ।

तथ्याङ्कलाई सानोदेखि ठूलो वा ठूलोदेखि सानो क्रममा मिलाएर राख्दा ठीक बीचमा परेको मानलाई तिनीहरूको मध्यिका (Median) भनिन्छ । अर्को शब्दमा भन्दा मध्यिका तथ्याङ्कको एउटा केन्द्रिय भाग हो, जसले तथ्याङ्कलाई ठीक दुई बराबर भागमा विभाजन गर्दछ ।

ख)	प्राप्त तथ्याङ्कको सङ्ख्या बिजोर (Odd) भएमा त्यस तथ्याङ्कको बीचमा पर्ने मान मध्यमान हुन्छ, भनी निकाल्न सकिन्छ । तर तथ्याङ्कहरू जम्मा अवलोकनहरूको सङ्ख्या जोर (Even) भएमा के गर्ने ? भन्ने प्रश्न गर्दै यस्तो एउटा तलको उदाहरण दिएर मध्यिका पत्ता लगाउने अभ्यास गर्न लगाएँ ।

विद्यार्थीहरूको तौल : 35, 36, 36, 38, 40, 41, 43, 45 छ ।

यहाँ,

ठीक बीचमा परेको तथ्याङ्कको मान एउटा मात्र छैन । यस्तो अवस्थामा बीचमा परेका दुईओटा मान 38 र 40 को अङ्कगणितीय मध्यक नै मध्यिका हुन्छ ।

त्यसैले, मध्यिका $= \frac{38+40}{2} = \frac{78}{2} = 39$

यसैलाई मध्यिकाको स्थान पत्ता लगाएर पनि मध्यिका निकाल्न सकिन्छ । यो तथ्याङ्कमा अवलोकनहरूको जम्मा सङ्ख्या (N)=8 छ । अब मध्यिकाको स्थान पत्ता लगाउदा,

$\frac{N+1}{2} = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$ औ पद ।

यसअनुसार मध्यिकाको स्थान, चौथो र पाँचौ पदको बीचमा पर्दछ ।

अर्थात् 38 र 40 को बीचमा हुन्छ ।

त्यसैले मध्यिका $\frac{38+40}{2} = 39$ हुन्छ ।

नोट : कहिलेकाहीँ यसरी निकालिएको मध्यिका दिइएको तथ्याङ्कमा नपर्न पनि सक्दछ । यो तथ्याङ्कमा 39 छैन । त्यसैले यो मध्यिकाको अड्कल मात्र हो । यसरी निकालिएको मान यकिन मान नहुन पनि सक्दछ ।

मैले कक्षा ९ का 15 जना विद्यार्थीहरूको जुत्ताको नाप (से.मी.मा) लाई बोर्डमा लेखी तलको प्रश्न गरेँ :

20, 22, 20, 21, 24, 18, 22, 20, 21, 19, 21, 20, 19, 23, 25

ती नापका जुत्ताहरूलाई नापअनुसार क्रमशः लाइनमा मिलाएर राख्दा कुनचाहिँ नापको जुत्ता बीचमा पर्ला ?

यस प्रश्नको उत्तर नै मध्यिका हुन्छ । तथ्याङ्कको बीचमा पर्ने (50%) अवलोकन नै मध्यिका हो । मध्यिकाको स्थान पत्ता लगाउन अवलोकनहरूको सङ्ख्यामा 1 थपी आधा गरिन्छ । यसो गर्न अवलोकनहरूलाई क्रम मिलाएर राख्नु पर्छ । यदि अवलोकनहरूको सङ्ख्या जोर छ भने बीचका दुईओटा मानहरूलाई जोडेर आधा पारी त्यसको स्थान पत्ता लगाउने गरिन्छ । मध्यिका स्थानात्मक (Positional) औसत हो । यसलाई गुणात्मक (Qualitative) तथ्याङ्कमा पनि प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

ग) तल 46 जना विद्यार्थीहरूको तौल (पौण्डमा) दिइएको छ । यसको मध्यिका कति होला ? अभ्यास गरौ :

तौल (lbs)	:	100	150	140	120	130	160
विद्यार्थी सं.	:	3	2	16	10	14	1

यस तथ्याङ्कलाई बढ्दा क्रममा मिलाएर राख्दा :

तौल	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
100	3	3
120	10	13
130	14	27
140	16	43
150	2	45
160	1	46
	N = 46	

अब,

मध्यिका $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$औं पद,

$= \left(\frac{46+1}{2}\right)$ औं पद,

=23.5 औं पद,

सञ्चित बारम्बारता लहर (Column) को अवलोकनबाट, 23.5 औं पद 130 हो ।

मध्यिका =130 हुन्छ ।

यसरी खण्डित श्रेणीको मध्यिका निकाल्ने गरिन्छ ।

घ) वर्गीकृत तथ्याङ्क (Grouped data) वा निरन्तर श्रेणी (Continuous series) को मध्यिका :

वर्गीकृत तथ्याङ्कमा मध्यिका निकाल्नका लागि सर्वप्रथम मध्यिका पर्ने स्थानको पहिचान गरिन्छ । वर्गीकृत तथ्याङ्कमा मध्यिका पर्ने स्थान $\frac{N}{2}$ औं पद हुन्छ । यसबाट मध्यिका पर्ने स्थानको पहिचान गरिसकेपछि पुनः वास्तविक मध्यिका निकाल्ने गरिन्छ ।

उदाहरणका लागि :

कक्षा ९ का 50 जना विद्यार्थीहरूले गणित विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क वितरण दिइएको छ । यसको मध्यिका कति होला ?

प्राप्ताङ्क : 10-20 20-30 30-40 40-50 50-60 60-70

विद्यार्थी सं.: 4 6 10 15 8 7

यसलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा राख्दा,

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
10-20	4	4
20-30	6	10
30-40	10	20
40-50	15	35
50-60	8	43
60-70	7	50

यहाँ विद्यार्थी सङ्ख्याको आधारमा ठीक बीचमा पर्ने प्राप्ताङ्क अर्थात् मध्यिका पत्ता लगाउन जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या N=50 लाई आधा गरेर पत्ता लगाउन सकिन्छ,

मध्यिका $= \frac{N}{2}$ औं पद

$= \frac{50}{2}$ औं पद

$=25$ औं पद

अर्थात् 50 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको अङ्कलाई सानोदेखि ठूलोको क्रममा मिलाएर राख्दा 25 औं विद्यार्थीले प्राप्त गरेको अङ्क नै यस तथ्याङ्कको मध्यिका हुन्छ । माथिको तालिकाबाट पच्चिसौं विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क '40-50' वर्गान्तरमा 40 देखि 50 को बीचमा पर्दछ मात्र भन्न सकिन्छ । यस अवस्थामा मध्यिकाको यकिन गर्न सूत्रको प्रयोग गर्नु पर्दछ । यस्तो अवस्थामा मध्यिका निकाल्ने सूत्र निम्नअनुसार हुन्छ :

$$\text{मध्यिका} = L + \frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f} \times i$$

यहाँ,

L= मध्यिका श्रेणीको तल्लो सीमा (Lower limit)

N= बारम्बारताको योगफल

c.f.= मध्यिका श्रेणीभन्दा एक श्रेणी अगाडिको सञ्चित बारम्बारता

f= मध्यिका श्रेणीको बारम्बारता

i= मध्यिका श्रेणीको श्रेणीअन्तर (Class-interval)

अब माथिको तथ्याङ्कबाट यो सूत्र प्रयोग गरेर मध्यिका निकाल्दा,

$$\text{मध्यिका} = L + \frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f} \times i$$

$$= 40 + \frac{\frac{50}{2} - 20}{15} \times 10$$

$$= 40 + \frac{25 - 20}{15} \times 10$$

$$= 40 + \frac{50}{15}$$

$$= 40 + 3.33$$

$$= 43.33$$

वर्गीकृत तथ्याङ्कमा यसरी नै मध्यिका निकाल्ने गरिन्छ । विद्यार्थीलाई यसको शिक्षण गर्ने क्रममा यस्ता केही उदाहरणहरूको प्रस्तुतिपछि अभ्यासका लागि यस्तै प्रसस्त अवस्था र तथ्याङ्कहरू दिने गर्दा सिकाइ प्रभावकारी हुने विश्वास गरिन्छ ।

नोट : मध्यिका पत्ता लगाउन ग्राफबाट पनि सकिन्छ । ग्राफबाट मध्यिका पत्ता लगाउने तरिका र यससम्बन्धी थप जानकारीका लागि तथ्याङ्कशास्त्रसम्बन्धी विभिन्न पुस्तकहरूको सहयोग लिन सकिन्छ ।

२.३ रीत (Mode)

क) तथ्याङ्कशास्त्रको शिक्षणका क्रममा मैले मध्यक र मध्यिकाका बारेमा शिक्षणसिकाइको काम समाप्त भएपछि रीत (Mode) को बारेमा छलफल चलाएँ । यसै सन्दर्भमा उनीहरूले प्रयोग गर्ने जुत्ताको नम्बर सोध्दै बोर्डमा टिप्दै गए । यसमा 11 जनाले निम्नअनुसार साइजका जुत्ता प्रयोग गरेको पाइयो :

4, 4, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 4, 5 ,7

अब, सबभन्दा धेरै जनालाई मिल्ने जुत्ताको साइज कुन हो ? खोजी गरौं । यो तथ्याङ्क (सूचना) लाई सानोदेखि ठूलो क्रममा मिलाएर राख्दा :

{4, 4, 4}	{5, 5, 5, 5, 5}	{6, 6}	{7}
तीन पटक	पाँच पटक	दुई पटक	एक पटक

यहाँ, सबभन्दा बढी प्रयोग भएको जुत्ताको साइज =5 त्यसैले रीत (mode) 5 हुन्छ ।

तथ्याङ्कको सङ्कलनमा सबभन्दा बढी दोहोरिएको सङ्ख्या वा मानलाई रीत (Mode) भनिन्छ । यदि दिइएको तथ्याङ्क वर्गीकृत रूपमा छ भने, सबभन्दा बढी बारम्बारता भएको वर्गान्तरलाई रीत (Modal class) भनिन्छ ।

तर सबभन्दा बढी दोहोरिने सङ्ख्या एकभन्दा बढी भएको वा समान भएको अवस्थामा रीत अपरिभाषित (Undefined) हुन्छ । यस्तो अवस्थामा रीत निकाल्नका लागि अप्रत्यक्ष विधि (Indirect method) को सहयोग लिइन्छ । यसरी रीत निकाल्दा,

रीत =3×मध्यिका -2×मध्यक गरिन्छ ।

ख) मध्यक र मध्यिका निकाल्ने क्रममा श्रेणीअनुसार फरकफरक प्रक्रियाको अवलम्बन गर्नु परे जस्तै रीत निकाल्न पनि श्रेणीअनुसार फरकफरक प्रक्रिया अपनाउनु पर्ने हुन्छ । खण्डित श्रेणीमा रहेको तलको तथ्याङ्कको रीत कति होला ? हेरौं ।

प्राप्ताङ्क	: 10	12	15	20	25	35	45	50	60
विद्यार्थी सङ्ख्या.	: 4	6	10	14	20	19	10	6	3

खण्डित श्रेणीको यस तथ्याङ्कको रीत पत्ता लगाउनका लागि सबभन्दा पहिले तल दिइएजस्तै समूहगत तालिका (Grouping table) बनाउनु पर्दछ ।

समूहगत तालिका (Grouping table):

<table>
<tr><th rowspan="2">प्राप्ताङ्क (x)</th><th colspan="6">बारम्बारता (f)</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th><th>V</th><th>VI</th></tr>
<tr><td>10</td><td>4</td><td rowspan="2">}10</td><td></td><td rowspan="3">}20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td><td rowspan="2">}16</td><td rowspan="3">}30</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>10</td><td rowspan="2">}24</td><td rowspan="3">}44</td></tr>
<tr><td>20</td><td>14</td><td rowspan="2">}34</td><td rowspan="3">}53</td></tr>
<tr><td>25</td><td>20</td><td rowspan="2">}39</td><td rowspan="5">}49</td></tr>
<tr><td>35</td><td>19</td><td rowspan="2">}29</td><td rowspan="4">}35</td></tr>
<tr><td>45</td><td>10</td><td rowspan="2">}16</td><td rowspan="3">}19</td></tr>
<tr><td>50</td><td>6</td><td rowspan="2">}9</td></tr>
<tr><td>60</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

यस तालिकामा बारम्बारतातर्फको पहिलो लहर (Column) मा दिएको बारम्बारता राखिएको छ । दोस्रो (II) मा शुरुबाट दुईदुईओटा बारम्बारता जोडेर आएका सङ्ख्यालाई राखिएको छ । तेस्रो (III) मा पहिलो 4 लाई छाडेर दुईदुईओटा बारम्बारता जोडेर राखिएको छ । चौथो (IV) मा शुरुदेखिको तीनतीनओटालाई जोडेर ग्रुप गरिएको छ । पाँचौ लहरमा पहिलोलाई छाडेर तीनतीनओटा र छैटौं (VI) लहरमा पहिला दुईओटा छोडेर तीनतीनओटालाई जोडेर राखिएको छ । यसरी तयार पारिएको तालिकाका आधारमा मात्र रीत निकाल्न अझै कठिनाई पर्ने हुनाले पुन: विश्लेषण तालिका (Analysis table) बनाउनु पर्दछ ।

विश्लेषण तालिका (Analysis table)

Column No:	Size of the items								
	10	12	15	20	25	35	45	50	60
I					1				
II					1	1			
III				1	1				
IV				1	1	1			
V					1	1	1		
VI			1	1	1				
Total			1	3	6	3	1		

यस तालिकाबाट 25 सबभन्दा धेरै पटक (६ पटक) दोहोरिएको छ, त्यसैले यसको रीत 25 हुन्छ ।

नोट : विश्लेषण तालिका तयार पार्दा समूहगत तालिका वा लहरहरूमा सबभन्दा धेरै बारम्बारता बनाउनका लागि प्रयोग भएको बारम्बारताको सङ्ख्याको टिपोट गरिन्छ ।

ग) निरन्तर श्रेणी (Continuous series) मा भएको तथ्याङ्कको रीत निकाल्नका लागि सबभन्दा पहिला अनुभवबाट (By inspection) वा समूहगत तालिका र विश्लेषण तालिकाको निर्माण गर्ने गरिन्छ । तालिकाहरू बनाउँदा माथि खण्डित श्रेणीको तथ्याङ्कमा तयार गरिएका तालिकाको जस्तै गरी तालिका तयार पारिन्छ । यसरी तालिकाका आधारमा रीत वर्गान्तर (Class interval) पत्ता लगाईसकेपछि रीत निकाल्नका लागि सूत्र प्रयोग गरी निकाल्न सकिन्छ । निरन्तर श्रेणीमा रीत निकाल्दा प्रयोग गरिने सूत्र निम्नअनुसार छ :

रीत (Mode)= $L+\dfrac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times i$

यसमा,

L= रीत पर्ने वर्गको तल्लो सीमा (Lower limit)

f_0=रीत पर्ने वर्गभन्दा अघिल्लो वर्गको बारम्बारता

f_1=रीत पर्ने वर्गको बारम्बारता

f_2= रीत पर्ने वर्गभन्दा पछिल्लो वर्गको बारम्बारता

i= वर्गान्तर

अब, यस श्रेणीमा भएको तथ्याङ्कबाट रीत निकाल्नका लागि एउटा उदाहरण हेरौ :

आयकर रकम रु :	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
कर दाताहरूको सङ्ख्या :	7	9	14	17	20	8	5	3

यस तथ्याङ्कलाई समूहगत तालिका बनाउँदा

समूहगत तालिका

<table>
<tr><th rowspan="2">प्राप्ताङ्क (x)</th><th colspan="6">बारम्बारता (f)</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th><th>V</th><th>VI</th></tr>
<tr><td>200-300</td><td>7</td><td rowspan="2">}16</td><td></td><td rowspan="3">}30</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>300-400</td><td>9</td><td rowspan="2">}23</td><td rowspan="3">}40</td><td></td></tr>
<tr><td>400-500</td><td>14</td><td rowspan="2">}31</td><td rowspan="3">}51</td></tr>
<tr><td>500-600</td><td>17</td><td rowspan="2">}37</td><td rowspan="3">}45</td></tr>
<tr><td>600-700</td><td>20</td><td rowspan="2">}28</td><td rowspan="3">}33</td></tr>
<tr><td>700-800</td><td>8</td><td rowspan="2">}13</td><td rowspan="3">}16</td></tr>
<tr><td>800-900</td><td>5</td><td rowspan="2">}8</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>900-1000</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
</table>

अब, समूहगत तालिकाको आधारमा विश्लेषण तालिका बनाउँदा,

विश्लेषण तालिका

Column No:	Size of the items							
	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
I					1			
II			1	1				
III				1	1			
IV				1	1	1		
V		1	1	1				
VI			1	1	1			
Total		1	3	5	4	1		

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

$$= 15 + \frac{\frac{50}{4} - 8}{12} \times 10$$

$$= 15 + \frac{12.5 - 8}{12} \times 10$$

$$= 15 + 3.75$$

Q_1=18.75

फेरि,

Q_3=3N/4 औँ पद

=(3×50)/4 औँ पद

=37.5 औँ पद

त्यसैले Q_3 "35-45" को वर्गरूपान्तरमा पर्दछ ।

अब,

सूत्र प्रयोग गर्दा,

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

$$= 35 + \frac{\frac{3 \times 5.0}{4} - 35}{9} \times 10$$

$$= 35 + \frac{37.5 - 35}{9} \times 10$$

$$= 35 + 2.78$$

Q_3=37.78

फेरि,

चतुर्थांशको विस्तार (Inter quartile range) निकाल्दा,

IQR =Q_3-Q_1

=37.78-18.75

IQR=19.03 हुन्छ ।

३. परियोजना कार्य :

क) आफूले पढाउने कुनै एउटा कक्षाका विद्यार्थीहरूलाई मिल्ने जुत्ताको नाप उनीहरूलाई नै सोधेर पत्ता लगाउनुहोस् । यसरी आएको तथ्याङ्कबाट मध्यक, मध्यिका, रीत, विस्तार र चतुर्थांसको विस्तार पत्ता लगाउनुहोस् ।

ख) तपाईंको विद्यालयबाट गएको वर्ष एस.एल.सी. परीक्षामा समावेश हुने विद्यार्थीहरूले गणित विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई निरन्तर श्रेणीको तथ्याङ्कमा राखी त्यसको आधारमा मध्यिका, मध्यक, रीत, विस्तार र चतुर्थांसको विस्तार पत्ता लगाउनुहोस् । यसरी पत्ता लगाइएका नापहरू हाम्रो शिक्षणसिकाइ कार्यका कुनकुन क्षेत्रमा केकसरी प्रयोगमा ल्याउन सकिएला ? सूची तयार पार्नुहोस् र सूचीमा उल्लेख गरिएका कुरालाई गणित शिक्षणका समयमा प्रयोगमा ल्याउने अभ्यास गर्नुहोस् । यसबाट के नतिजा आयो ?पछि निष्कर्ष बनाउनुहोस् ।

ग) विद्यार्थीहरूको (कुनै एउटा कक्षाको) उचाइ पत्ता लगाई त्यसलाई निरन्तर श्रेणीमा राखी त्यसबाट मध्यक, मध्यिका, चतुर्थांस र विस्तार पत्ता लगाउनुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- Asthana, B.N. Elements of statistics, part 1 & 2.
- Gupta. S.P., An Easy approach of statistics.
- Gupta. S.P., Fundamental of statistics.
- Saxena, H.C. Elementary of statistics.

अनुसुची १

Euclid's Element contains twenty-three definitions, five postulates, five axioms and forty-eight propositions.

Definitions

1. A ***point*** is that which has no parts.
2. A ***line*** is length without breadth.
3. The extremities of a line are points.
4. A ***straight line*** is a line which lies evenly with the point on itself.
5. A ***surface*** is that which has only length and breadth.
6. The extremities of a surface are lines.
7. ***A plane surface*** is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.
8. ***A plane angle*** is the inclination to one another of two lines in a plane if the lines meetand do not lie in a straight line.
9. When the lines containing the angle are straight lines, the angle is called a ***rectilinear angle.***
10. When a straight line erected on a straight line makes the adjacent angles equal to one another, each of the equal angles is called a ***right angle,*** and the straight line standing on the other is called ***& perpendicular*** to that on which it stands.
11. An ***obtuse angle*** is an angle greater than a right angle.
12. An ***acute angle*** is an angle less than a right angle.
13. A ***boundary*** is that which is an extremity of anything.
14. ***A. figure*** is that which is contained by any boundary or boundaries.
15. A ***circle*** is a plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one particular point among those lying within the figure are equal.
16. The particular point (of Definition 15) is called the ***center*** of the circle.
17. A ***diameter*** of a circle is any straight line drawn through the center and terminated in both directions by the circumference of the circle. Such a straight line also bisects the circle.
18. A ***semicircle*** is the figure contained by a diameter and the circumference cut off by it. The center of the semicircle is the same as that of the circle.19. ***Rectilinear figures*** are those which are contained by straight lines, ***trilateral*** figures being those contained by three, ***quadrilateral*** those contained by four, and ***multilateral*** those contained by more than four straight lines.
20. Of the trilateral figures, an ***equilateral triangle*** is one which has its three sides equal, an isosceles triangle has two of its sides equal, and a ***scalene triangle*** has its three sides unequal.

21. Furthermore, of the trilateral figures, a ***right-angled triangle*** is one which has a right angle, an ***obtuse*** angled triangle has an obtuse angle, and an ***acute-angled triangle*** has its three angles acute.
22. Of the quadrilateral figures, a ***square*** is one which is both equilateral and right-angled, an ***oblong*** is right-angled but not equilateral, a ***rhombus*** is equilateral but not right-angled, and a ***rhomboid*** has its opposite sides and angles equal to one another but is neither equilateral nor right-angled. Quadrilaterals other than these are called ***trapezia.***
23. ***Parallel*** straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both direction, do not meet one another in either direction.

The postulates

1. A straight line can be drawn from any point to any point.
2. A finite straight line can be produced continuously in a straight line.
3. A circle may be described with any center and distance.
4. All right angles are equal to one another.
5. If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side together less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which the angles are together less than two right angles.

The Axioms or Common Notions:

1. Things which are equal to the same thing are also equal to one another.
2. If equals be added to equals, the wholes are equal.
3. If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.
4. Things which coincide with one another are equal to one another.
5. The whole is greater than the part,

The Propositions

1. On a given finite straight line to construct an equilateral triangle.
2. To place at a given point (as an extremity) a straight line equal to a given straight line.
3. Given two unequal straight lines, to cut off from the greater a straight line equal to the less.
4. If two triangles have the two sides equal to two sides respectively and have the angles contained by the equal straight lines equal, they will also have equal to the base equal to the base, the triangle will be equal to the triangle, and, the remaining angles will be equal to the remaining angles respectively, namely those which the equal sides subtend.
5. In isosceles triangles the angles at the base are equal to one another, and if the equal straight lines be produced further, the angles under the bases will be equal to one another.

6. If in a triangle two angles be equal to one another, the sides which subtend the equal angles will also be equal to one another.
7. Given two straight lines constructed on a straight line (from its extremities) and meeting in a point, there cannot be constructed on the same straight line (from its extremities), and on the same sides of it, two other straight lines meeting in another point and equal to the former respectively, namely each to that which has the same extremity with it.
8. If two triangles have the two sides equal to two sides respectively, and have also the base equal to the base, they will also have the angles equal which is contained by the equal straight lines.
9. To bisect a given rectilinear angle.
10. To bisect a given finite straight line.
11. To draw a straight line at right angles to a given straight line from a given point on it.
12. To a given infinite straight line, from a given point which is not on it, to draw a 1. perpendicular straight line.
13. If a straight line set up on a straight line make angles it will make either two right angles or angles equal to two right angles.
14. If with any straight line, and at a point on it, two straight lines not lying on the same side make the adjacent angles equal to two right angles, the two straight lines will be in a straight line with one another.
15. If two straight lines cut one another, they make the vertical angles equal to one another.
16. In any triangle, if one of the sides be produced the exterior angle is greater than either of the interior and opposite angles.
17. In any triangle two angles taken together in any manner are less than two right angles.
18. In any triangle the greater side subtends the greater angle.
19. In any triangle the greater angle is subtended by the greater side.
20. In any triangle two sides taken together in any manner are greater than the remaining one.
21. If on one of the sides of a triangle, from its extremities, there be constructed two straight lines meeting within the triangle, the straight lines so constructed will be less than the remaining two sides of the triangle, but will contain a greater angle.
22. Out of three straight lines, which are equal to three given straight lines, to construct a triangle; thus it is necessary that two of the straight lines taken together in any manner should be greater than the remaining one.
23. On a given straight line and at a point on it to construct a rectilinear angle equal to a given rectilinear angle.
24. If two triangle have the two sides equal to two sides respectively, but have the one of the angles contained by the equal straight lines greater than the other, they will also have the base greater than the base.

25. If two triangles have the two sides equal to two sides respectively, but have the base greater than the base, they will also have the one of the angles contained by the equal straight lines greater than the other.
26. If two triangles have the two angles equal to two angles respectively, and one side equal to one side, namely, either the side adjoining the equal angle, or that subtending one of the equal angles, they will also have the remaining sides equal to the remaining sides and the remaining angle equal to the remaining angle.
27. If a straight line falling on two straight lines make the alternate angles equal to one another, the straight lines will be parallel to one another.
28. If a straight line falling on two straight lines make the exterior angle equal to the interior and opposite angle on the same side or the interior angles on the same side equal to two right angles, the straight lines will be parallel to one another.
29. A straight line falling on parallel straight lines makes the alternate angles equal to one another, the exterior angle equal to the interior and opposite angle, and the interior angles on the same side equal to two right angles.
30. Straight lines parallel to the same straight line are also parallel to one another.
31. Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line.
32. In any triangle, if one of the sides be produced, the exterior angle is equal to the two interior and opposite angle, and the three interior angle of the triangle are equal to two right angles.
33. The straight lines joining equal and parallel straight lines (at the extremities which are) in the same directions (respectively) are themselves also equal and parallel.
34. In parallelogrammic areas the opposite sides and angles are equal to one another, and the diameter bisects the areas.
35. Parallelograms which are on the same base and in the same parallels are equal to one another.
36. Parallelograms which are on the same base and in the same parallels are equal to one another.
37. Triangles which are on the same base and in the same parallels are equal to one another.
38. Triangles which are on the same bases and in the same parallels are equal to one another.
39. Equal triangles which are on the same base and on the same side are also in the same parallels.
40. Equal triangles which are on equal bases and on the same side are also in the same parallels.
41. If a parallelogram have the same base with a triangle and be in the same parallels, the parallelogram is double of the triangle.
42. To construct, in a given rectilinear angle, a parallelogram equal to a triangle.

43. In any parallelogram the complements of the parallelograms about the diameter are equal to one another.
44. To a given straight line to apply, in a given rectilinear angle, a parallelogram equal to a given triangle.
45. To construct, in a giveft rectilinear angle, a parallelogram equal to a given rectilinear figure.
46. On a given straight line to describe a square.
47. In a right-angled triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the squares on the sides containing the right angle.
48. If in a triangle the square on one of the sides be equal to the squares on the remaining two sides of the triangle, the angle contained by the remaining two sides of the triangle is right.

(Source: Modern Mathematics, Vol. I, S.M. Maskey)

विश्लेषण तालिकाको आधारमा सबभन्दा धेरै पटक आएको वर्गान्तर '500-600' हो । त्यसैले रीत यही वर्गमा पर्छ ।

अब रीत निकाल्ने सूत्र प्रयोग गर्दा,

रीत (Mode)= $L+\dfrac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times i$

$$= 500+\frac{17-14}{2\times17-14-20}\times100$$

$$= 500+\frac{300}{34-34}$$

$$=500$$

रीत पत्ता लगाउनका लागि ग्राफको सहयोग लिन पनि सकिन्छ । ग्राफबाट रीत अनुमान गर्नका लागि दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा हिस्टोग्राम (Histogram) खिचेर अनुमान गर्नुपर्ने हुन्छ । (यसका लागि थप सन्दर्भ सामग्री खोजेर हेर्नुहोला ।)

अहिले चर्चा गरिएका औसतहरू (मध्यक, मध्यिका र रीत) को शिक्षणको उद्देश्य औसत निकाल्न मात्र नभई त्यसरी निकालिएको औसतलाई हेरी दैनिक जीवनका उदाहरणहरूबाट निष्कर्ष निकाल्ने, अध्ययन गरिएका औसतहरूमध्ये उपयुक्त औसत छानेर प्रयोग गर्ने सीपको विकास गराउनु हो । यसका लागि विद्यार्थीहरूलाई उनीहरूको दैनिक व्यवहारसँग सम्बन्धित प्रसस्त तथ्याङ्कहरू दिएर अभ्यास गराउने र कुन तथ्याङ्कका लागि कुन औसत उपयुक्त हुन्छ भनेर छनोट गर्ने र निकालिएको औसतका आधारमा निष्कर्ष निकाल्न लगाउने गरिन्छ ।

२.४ विस्तार (Range) :

कुनै पनि तथ्याङ्कको वितरणमा भएको सबैभन्दा ठूलो (Largest) पद र सबैभन्दा सानो (Smallest) पदको फरकलाई विस्तार (Range) भनिन्छ । यसले दिइएको तथ्याङ्कको फैलावट कति छ भनेर देखाउन । जस्तै : नेपालका निजामती कर्मचारीहरूको मासिक तलव स्केल यस प्रकारका छन् :

3500, 4100, 4900, 7500, 8500, 10500, 12000, 15000

यसमा अधिकत्तम तलव, रु 15000 र न्यूनत्तम तलव रु 3500 बीचको अन्तर (फरक) 15000-3500=11500 हुन्छ । त्यसैले यस तथ्याङ्कको विस्तार पनि 11500 हुन्छ । यसलाई सूत्रका रूपमा राख्दा,

विस्तार (R)=L-S हुन्छ ।

यहाँ,

L= सबभन्दा ठूलो पद र

S= सबभन्दा सानो पद हुन्छ ।

वर्गीकृत तथ्याङ्कको विस्तार पत्ता लगाउँदा पनि तथ्याङ्कको सबभन्दा ठूलो वर्गान्तरको उच्च सीमा र सबभन्दा सानो वर्गान्तरको न्यून सीमाबीचको अन्तर निकाल्ने गरिन्छ । जस्तै :

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थी सं.	2	5	10	18	3

यहाँ सबैभन्दा ठूलो वर्गान्तर '40-50' र सबैभन्दा सानो वर्गान्तर '0-10' छ । त्यसैले विस्तार (R) = सबैभन्दा ठूलो वर्गान्तरको उच्च सीमा सबैभन्दा सानो वर्गान्तरको न्यून सीमा =50-0=50 हुन्छ ।

२.५ चतुर्थांशको विस्तार (Inter quartile range):

मैले विद्यार्थीहरूलाई चतुर्थांसको विस्तारको धारणा दिनका लागि निम्न उदाहरण दिने गर्दछु : कक्षा आठका १५ जना विद्यार्थीहरूको जुत्ताको नाप (से.मी.मा) यस प्रकार पाइयो ।

20, 22, 20, 21, 24, 15, 22, 20, 21 ,19, 21, 20, 19, 23, 25

उल्लिखित जुत्ताहरूका साइजलाई क्रमशः मिलाएर राख्दा मध्यिका बीचमा पर्दछ भने सो मध्यिकाभन्दा मुनिका नापका जुत्ताहरूमध्ये बीचमा कुन पर्दछ र सोभन्दा माथिका नापका जुत्ताहरूमध्ये बीचमा कुन पर्छ ? तिनीहरूलाई के भनिन्छ ? भन्ने प्रश्न गर्दै छलफललाई अगाडि बढाउने गर्दछु । यो र यस्तै अन्य क्रियाकलापहरूको सहयोगबाट पहिलो चतुर्थांस र तेस्रो चतुर्थांसको मान निकाल्न लगाइसकेपछि, यो चतुर्थांशको विस्तार निकाल्ने औपचारिक तरिकाको खोजी गर्न लगाउने गर्दा यसको धारणा सही ढङ्गले विकास हुने गरेको अनुभव गरेको छु ।

तेस्रो चतुर्थांस (Q_3) र पहिलो चतुर्थांस (Q_1) बीचको अन्तरलाई चतुर्थांसको विस्तार (Inter quartile range) भनिन्छ । चतुर्थांशको विस्तार आधालाई अर्धचतुर्थांशीय विस्तार (Semi interquartile range) अथवा चतुर्थांशीय भिन्नता (Quartile deviation) भनिन्छ ।

चतुर्थांशीय भिन्नता पत्तालगाउन पहिलो चतुर्थांस (Q_1) र तेस्रो चतुर्थांस (Q_3) पत्ता लगाउनु पर्ने हुन्छ । यसका लागि Q_1 र Q_3 निकाल्न व्यक्तिगत र खण्डित श्रेणीमा निम्नअनुसार गरिन्छ ।

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ औ पद

$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ औ पद, यसमा N श्रेणीमा रहेको पदहरूको सङ्ख्या हो ।

त्यस्तै, वर्गीकृत तथ्याङ्क वा निरन्तर श्रेणी (Continous series) मा Q_1 र Q_3 पत्ता लगाउन, Q_1=N/2 औ पद र Q_3=3N/4 औ पद गरी Q_1 र Q_3 पर्ने श्रेणीअन्तर (Class interval) पत्ता लगाई वास्तविक Q_1 र Q_3 निम्न सूत्रको प्रयोग गरी निकाल्ने गरिन्छ :

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

यसमा,

$L=Q_1$ पर्ने श्रेणीअन्तरको तल्लो सीमा (Lower limit)

$c.f.=Q_1$ पर्ने श्रेणीअन्तरभन्दा माथिल्लो श्रेणीअन्तरको सञ्चित बारम्बारता

$f=Q_1$ पर्ने श्रेणी अन्तरको बारम्बारता

$i=$श्रेणीअन्तरको आकार

त्यस्तै,

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

यसमा,

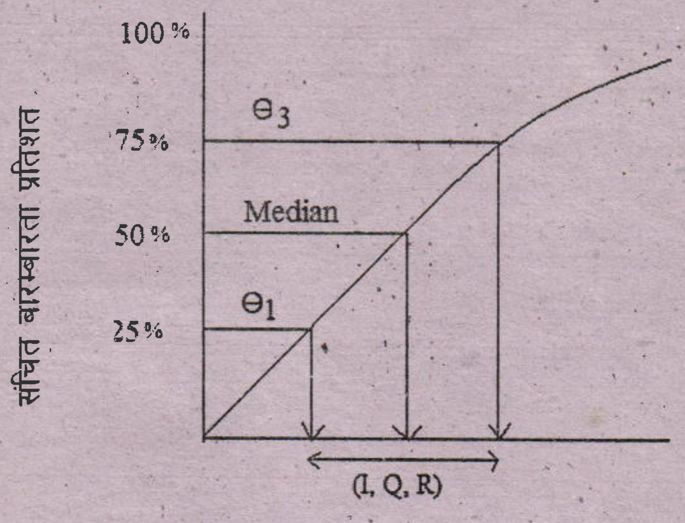
$L=Q_3$ पर्ने श्रेणीअन्तरको तल्लो सीमा (Lower limit)

$c.f.=Q_3$ पर्ने श्रेणीअन्तरभन्दा माथिल्लो श्रेणीअन्तरको सञ्चित बारम्बारता

$f=Q_3$ पर्ने श्रेणी अन्तरको बारम्बारता

$i=$श्रेणीअन्तरको आकार

कुनै पनि तथ्याङ्कबाट यसै प्रकारले Q_1 र Q_3 पत्ता लगाइसकेपछि चतुर्थांशीय भिन्नता (IQR) गरी पत्ता लगाउने 'Q_3-Q_1' निकालिन्छ । यसलाई ग्राफको माध्यमबाट पनि देखाउन सकिन्छ । जस्तै :



चतुर्थांशीय भिन्नता

यहाँ दिइएको ग्राफके आधारमा निम्न निष्कर्षमा पुग्न सकिन्छ :

- Q_1 भनेको तथ्याङ्कको जम्मा बारम्बारताको 25% को पदको मान हो । अर्थात् N/4 औं मान हो । यसलाई तल्लो चतुर्थांस पनि भनिन्छ ।
- Q_2 भनेको कूल बारम्बारताको 50% को पदको मान हो । अर्थात् 2N/4=N/2 औ मान हो । यसरी आउने मान मध्यिका (Medium) नै हो । अर्थात् मध्यिका दोस्रो चतुर्थांस हो ।
- Q_3 भनेको कूल बारम्बारताको 75% पदको मान हो । अर्थात् 3N/4 औ मान हो । यसलाई माथिल्लो चतुर्थांस पनि भनिन्छ ।

यसरी प्राप्त तथ्याङ्कको Q_1 र Q_3 पत्ता लगाइसकेपछि तथ्याङ्कको चतुर्थांश पत्ता लगाउन "Q_3-Q_1" गरी निकाल्ने गरिन्छ । यसको उदाहरणका लागि एउटा वर्गीकृत तथ्याङ्क लिएर चतुर्थांशको विस्तार (Inter-quartile range) निकालेर हेरौं ।

कुनै एउटा कक्षामा गणित विषयमा विद्यार्थीहरूले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क निम्नअनुसार छ :

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या
5-15	8
15-25	12
25-35	15
35-45	9
45-55	6

यस तथ्याङ्कको चतुर्थांशीय विस्तार पत्ता लगाउनका लागि पहिला पहिलो चतुर्थांश (Q_1) र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) पत्ता लगाउनु पर्दछ । यसका लागि सर्वप्रथम प्राप्त तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा परिवर्तन गर्नुपर्दछ ।

प्राप्ताङ्क (Marks)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
5-15	8	8
15-25	12	20
25-35	15	35
35-45	9	44
45-55	6	50

जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या (N)=50

Q_1 =N/4 औं पद

=50/4=12.5 औं पद ।

Q_1 '15-25' को वर्गान्तरमा पर्दछ ।

अब सूत्र प्रयोग गर्दा,