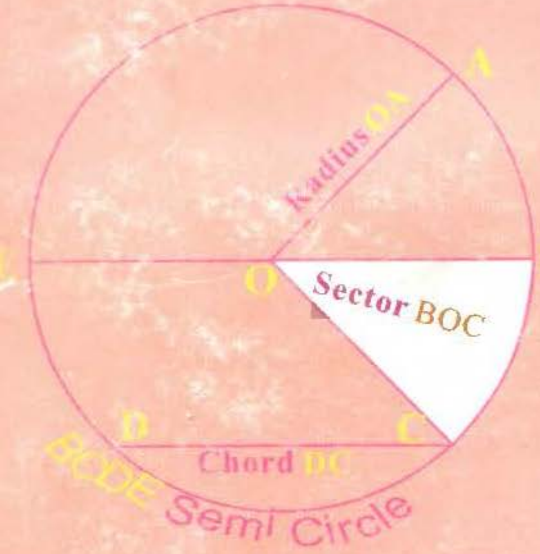
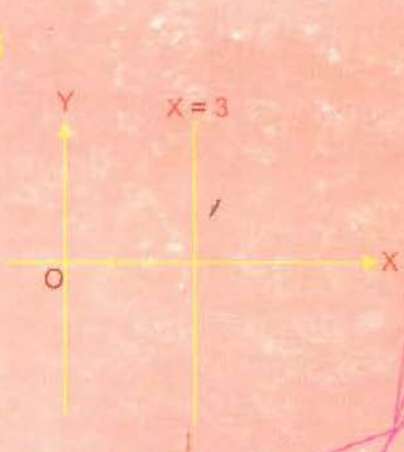
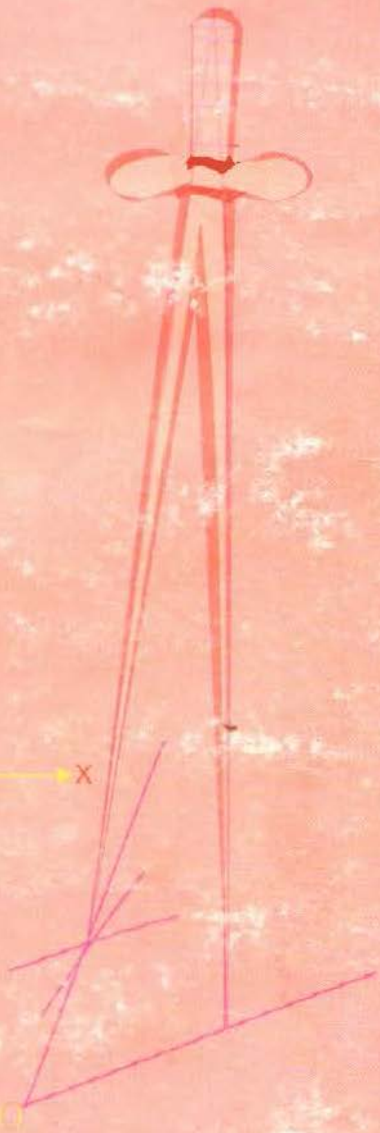
गणित शिक्षण

सक्षमतामा आधारित माध्यमिक शिक्षक तालिम
(५ महिने-दोस्रो मोडुल)

स्वाध्ययन सामग्री







नेपाल सरकार
शिक्षा तथा खेलकुद मन्त्रालय
शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

२०६३

गणित शिक्षण

सक्षमतामा आधारित माध्यमिक शिक्षक तालिम

(५ महिने–दोस्रो मोडुल)

स्वाध्ययन सामग्री

नेपाल सरकार
शिक्षा तथा खेलकुद मन्त्रालय
शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर
२०६३

२५६१ छैटी
G1566

प्रकाशकः
नेपाल सरकार
शिक्षा तथा खेलकुद मन्त्रालय
शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

प्रथम संस्करण - २०६२
दोस्रो संस्करण - २०६३

टेलिफोन - ६-६३०१८०, ६-६३०७६६, ६-६३१२७६
फ्याक्स - ६-६३०१९३, ६-६३०४५७,
पो.ब.नं. - २१४५, ३६५२
E-mail - decedu@wlink.com.np, necd@ntc.net.np

सुझाव एवम् सल्लाह

श्री अर्जुनबहादुर भण्डारी
श्री बुनु श्रेष्ठ
डा. हिरा बहादुर महर्जन
श्री सुनीता मालाकार
श्री कमला पोखरेल
श्री इन्द्रबहादुर श्रेष्ठ
श्री गणेश सिंह

लेखन समूह

श्री तुलसीप्रसाद थपलिया
श्री लेखनाथ शर्मा
श्री इमनारायण श्रेष्ठ
श्री रामचन्द्र पौडेल
श्री दण्डपाणी शर्मा
श्री मुकुन्द क्षेत्री
श्री बरुण वैद्य
श्री राम हाडा

विषयवस्तु सम्पादन

श्री तुलसीप्रसाद थपलिया
श्री लेखनाथ शर्मा
श्री इमनारायण श्रेष्ठ

भाषा सम्पादन

श्री तोया खनाल

आवरण तथा चित्राङ्कन डिजाइन

श्री सुमन बज्राचार्य

कम्प्यूटर टाइप सेटिङ

श्री दीपेन्द्र झा

भूमिका

शिक्षाको गुणस्तर र प्रभावकारी शिक्षणका लागि शिक्षक तालिम अनिवार्य मानिन्छ । शिक्षण सिकाइमा प्रभावकारिता ल्याई गुणस्तरीय शिक्षा हासिल गर्ने पेसागत रूपमा दक्ष र योग्य शिक्षकहरूको खाँचो पर्दछ । निम्नमाध्यमिक तथा माध्यमिक तहको शिक्षामा गुणस्तर अभिवृद्धि गर्ने उद्देश्यले माध्यमिक शिक्षा सहयोग कार्यक्रम कार्यान्वयनमा आएको छ । शिक्षक शिक्षा र विकास यस कार्यक्रमको एउटा महत्त्वपूर्ण अङ्ग हो । शिक्षकहरूको पेसागत दक्षता अभिवृद्धि गरी कक्षाकोठाको सिकाइ वातावरणमा सुधार ल्याउने प्रमुख उद्देश्यका साथ शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्रद्वारा निम्नमाध्यमिक तहका पाँचओटा र माध्यमिक तहका ६ ओटा मुख्य विषयलाई समेटेर सक्षमतामा आधारित १० महिने प्रमाणीकरण शिक्षक तालिमको पाठ्यक्रम तयार गरिएको छ । सोही पाठ्यक्रमअनुसार उक्त शिक्षक तालिमलाई तीन मोडुलमा विभाजन गरिएको छ । तीमध्ये दोस्रो मोडुल दूर शिक्षा पद्धतिमा आधारित छ । दोस्रो मोडुलको गणित शिक्षण विषयको लागि यो सामग्री प्रस्तुत गरिएको छ ।

गणित शिक्षणको यो स्वाध्ययन सामग्री माध्यमिक तहको सक्षमतामा आधारित पाठ्यक्रममा आधारित छ । माध्यमिक तहमा गणित शिक्षणमा देखिएका कमीकमजोरीहरू हटाई शिक्षणमा प्रभावकारिता बढाउन सम्बन्धित शिक्षकमा आवश्यक मात्रामा ज्ञान बढाउने उद्देश्यबाट यो स्वाध्ययन सामग्री तयार गरिएको हो ।

गणित शिक्षणको यस स्वाध्ययन सामग्रीमा एउटा एकाइभित्र एक वा एकभन्दा बढी पाठ छन् । एकाइको सुरुमा सक्षमता र एकाइ परिचय दिइएको छ । त्यसपछि पाठसम्बन्धी विषयवस्तु उल्लेख गरिएका छन् । पाठसम्बन्धी कुरा उल्लेख गर्दा विषय प्रवेशका रूपमा विषयवस्तुको विवरण, परियोजनाकार्य अध्ययनका लागि थप सामग्रीहरूको सूची तथा सन्दर्भसामग्री प्रस्तुत गरिएको छ । स्वाध्ययन सामग्रीलाई हुनेसम्म सरल बनाउन विषयवस्तुको विवरण विस्तृत रूपमा दिइएको छ । यस सामग्रीलाई बोधगम्य बनाउन शिक्षणका समस्या र सिद्धान्तसमेत ख्याल गरेर पाठ तयार पारिएका छन् । यसैले यस स्वाध्ययन सामग्रीले तालिमका सहभागी शिक्षकहरूलाई गणित शिक्षणको सम्बन्धमा पर्याप्त जानकारी दिन सक्छ भन्ने हाम्रो विश्वास छ ।

यस स्वाध्ययन सामग्रीलाई प्रकाशनयोग्य बनाउने कार्यमा संलग्न सबै धन्यवादका पात्र हुनुहुन्छ । यसलाई अझ प्रभावकारी र त्रुटिरहित बनाउन सुझाव प्रदान गर्ने सम्बद्ध सबै पक्षमा शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र आभार व्यक्त गर्दछ ।

२०६३

रामस्वरुप सिन्हा
कार्यकारी निर्देशक

विषयसूची

पाठ	शीर्षक	पृष्ठ
१.	अङ्कगणित शिक्षण	१
२.	बीजगणित शिक्षण	३३
३.	ज्यामिति	५८
४.	नाप	१२१
५.	तथ्याङ्कशास्त्र	१३४
६.	त्रिकोणमिति	१८१
७.	समूह	१९७
८.	भेक्टर	२१२
९.	म्याट्रिक्स	२३२
१०.	फलन	२४५
११.	स्थानान्तरण	२७१
१२.	रेखीय योजना	२९०
	अनुसूची	

एकाइ एक

अङ्क गणित शिक्षण

Competency :	Explain and analyze the historical development of number concepts, number systems, induction and axiomatic as mathematical system development and use in classroom teaching, development of Arithmetic system and application in everyday to commercial phenomena.

पाठ एक : सङ्ख्या र सङ्ख्याप्रणालीको ऐतिहासिक विकास

१. परिचय

यस एकाइमा सङ्ख्याप्रणाली तथा अङ्क गणितका विभिन्न विषयवस्तुहरू समावेश गरिएका छन् । सङ्ख्या र सङ्ख्याप्रणालीको ऐतिहासिक विकासअन्तरगत रोमन सङ्ख्याप्रणाली, द्विआधार सङ्ख्याप्रणाली, पञ्चआधार सङ्ख्याप्रणालीका बारेमा चर्चा गरिएको छ । निम्नमाध्यमिक तथा माध्यमिक तहका गणित शिक्षकहरूको अङ्कगणित तथा सङ्ख्याप्रणालीसम्बन्धी ज्ञान तथा सीप अभिवृध्दि गर्न, दैनिक जीवनमा तथा कक्षा शिक्षणमा प्रयोग गर्न सघाउ पुऱ्याउने अभिप्रायले यस एकाइमा विभिन्न विषयवस्तुहरू प्रस्तुत गरिएका छन् ।

२. विषयवस्तु

२.१ सङ्ख्याप्रणालीको विकास

सङ्ख्याको धारणा र गन्ती प्रक्रियाको विकास मानव सभ्यताको विकाससँगसँगै भएको अनुमान गरिन्छ । गन्तीको आदिम तरिकाद्वारा आदिम समाजका मानिसहरू आफ्नो समूहमा भएका सदस्यहरूको सङ्ख्या र शत्रुहरूको सङ्ख्या पत्तालगाउन सक्थे, धेरै वा थोरै तुलना गर्न सक्दथे । प्राचीन कालका मानिसहरूले सङ्ख्याको ज्ञानको विकास एउटा समूहका वस्तुहरू (सदस्यहरू) को अर्को समूहका वस्तुहरूसँग जोडामिलाउने अभ्यासबाट गरेका हुन् भन्ने कुरा इतिहासमा पाइन्छ । जस्तै : उनीहरूले आफूले पालेका घरपालुवा जनावरहरू चराउन लैजाने क्रममा विहान गोठबाट एउटा पशु बाहिर पठाउँदा एउटा ढुङ्गा र अर्को बाहिर पठाउँदा अर्को ढुङ्गा झोलामा हाल्दथे । त्यसप्रकारले प्रत्येक पशुका लागि एउटा एउटा ढुङ्गा झोलामा हालेर पोको पार्थे । साँझ पशु गोठमा हुल्ने बेलामा पनि प्रत्येक पशु गोठमा भित्र पठाउँदै एउटा एउटा ढुंगा झोलाबाट निकाली बाहिर राख्दथे । यसरी सबै पशु गोठमा हुलिसकेपछि झोलामा एउटा पनि ढुंगा बाँकी रहेन भने सबै पशुहरू फर्के भन्ने थाहा पाउँदथे । उहिलेका मानिसहरूले जङ्गलमा शिकार खेल्न जाँदा कति जनावर मारियो भन्ने थाहा पाउनका लागि लट्ठीमा चिन्ह लगाउने गर्थे । यसरी हेर्दा आदिम कालका मानिसहरू पनि सङ्ख्याको अवधारणा

समूहको गुणको रूपमा समूहमा भएका सदस्यहरूको गन्ती मात्रा (एउटा, दुईओटा, तीनओटा आदि) को भावात्मक पक्षमा देखिन्छन् । यसरी सङ्ख्याप्रणालीको विकास क्रममा समूह र समूहका सदस्यहरूको एक एक संगतता (One to one correspondence) को प्रयोग सङ्ख्याको अवधारणा र गन्ती कार्यमा भएको पाइन्छ । गन्ती गर्ने प्रक्रियालाई सजिलो बनाउने उद्देश्यले प्राचीन समयदेखि नै विभिन्न सङ्ख्या आधारहरू प्रयोग गरिएको पाइन्छ । जस्तै २ आधार, ३ आधार, ४ आधार, ५ आधार, ८ आधार, १० आधार (दशमलव प्रणाली), १२ आधार, २० आधार, ६० आधार प्रणालीहरूको प्रयोग विभिन्न सभ्यताका मानिसहरूले विभिन्न समयमा गरेको पाइन्छ । हाम्रो देशमा पनि प्राचीन समयमा २० आधार प्रयोग भएको पाइन्छ जसको प्रभाव स्वरूप गाउँघरका केही बूढापाका मानिसहरू अझसम्म पनि एक बीस, दुई बीस,.....गरी गन्ती गरेको पाइन्छ ।

संसारका विभिन्न सभ्यतामा सङ्ख्यालाई जनाउने सङ्केतहरू मात्र फरकफरक भएका होइनन्, ती सङ्केतबाट सङ्ख्या निर्माणको पद्धति र ती सङ्ख्याहरूका क्रिया गर्ने तरिकासमेत फरकफरक पाइन्छन् । जोडमा आधारित, गुणनमा आधारित, स्थानमानमा आधारित र दश बाहेक अन्य आधार भएका विभिन्न प्रणालीहरू हाम्रो प्रयोगमा रहेको हिन्दुअरेबिक सङ्ख्याप्रणालीका अतिरिक्त प्राचीन कालदेखि नै प्रयोगमा रहेको देखिन्छ । केही प्राचीन सङ्ख्याप्रणालीहरूको छोटो परिचय यस प्रकार प्रस्तुत गरिन्छ ।

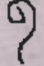
सङ्ख्याप्रणालीको कुरा गर्दा सङ्ख्या जनाउन प्रयोग गरिने आधारभूत सङ्केतहरू (Numerals), सङ्ख्यालाई लेख्ने तरिका, द्विपदीय क्रिया (Binary operation) का गुणहरू पर्छन् । यिनै आधारभूत तत्वहरूको मिलनबाट सङ्ख्याप्रणाली बनेको हुन्छ । सङ्ख्याप्रणालीको अध्ययन क्षेत्रहरू यिनीहरू नै हुन् ।

२.२ जोडमा आधारित सङ्ख्याप्रणाली

मिश्र (Egypt) को सङ्ख्याप्रणाली

प्राचीन इजिप्टमा लेखिएका हस्तलेखहरू, घरका भित्ताहरू, माटाका भाँडाकुँडाहरू, ढुङ्गा, काठ र पातमा लेखेर छोडिएका लिखतको अध्ययनबाट यो सङ्ख्याप्रणाली ५००० वर्ष पुरानो हो भन्ने कुरा अनुमान गरिएको छ ।

यस सङ्ख्याप्रणालीका सङ्ख्याहरू र तिनले जनाउने मान तलको तालिकामा प्रस्तुत गरिएको छ ।

गणनाङ्क	सङ्ख्याको नाम	सङ्केतको अर्थ
	1	तरवार प्रहारको डोब
	10	गोरुको जुवा
	100	तारको क्वाइल

गणनाङ्क	सङ्ख्याको नाम	सङ्केतको अर्थ
	1000	कमलको बिरुवा
	10,000	बाङ्गो औंला
	100,000	चेपागाँडा
	1,000,000	आश्चर्य चकित व्यक्ति

माथिको तालिकाबाट स्पष्ट हुन्छ कि इजिप्सीएन सङ्ख्याप्रणाली पनि दशमलव सङ्ख्याप्रणाली जस्तै हो । यो पुनरावृत्ति हुने (Repetitive) सङ्ख्याप्रणाली हो । कुनै पनि अंक (Numerals) नौ पटकसम्म दोहोरिनसक्छ । सङ्ख्याको कूल मान निकाल्नका लागि त्यस सङ्ख्यामा प्रयोग भएका सबै अंकहरूको मान जोडिन्छ । सानो सङ्ख्यालाई बाँयाबाट दाँयातिर लेखेको देखिन्छ .
जस्तै :

37 ||||∩∩ (अर्थात 7 जोड 30)
|||∩

372 ||∩∩∩∩𓍢𓍢 (अर्थात 2 जोड 70 जोड 300)
∩∩∩𓍢

यस सङ्ख्याप्रणालीका विशेषताहरू यस प्रकार छन् :

- सङ्ख्या निर्माण गर्ने खास सङ्केतहरू हुन्छन् ।
- प्रत्येक सङ्केतको एउटा मान हुन्छ ।
- जोडमा आधारित सङ्ख्याप्रणाली हो ।
- कुनै सङ्ख्याको मान थाहा पाउन ती सबै सङ्केतहरूको मान जोड्नु पर्छ ।
- शुन्यको निमित्त कुनै सङ्केतको प्रयोग भएको छैन ।
- यस प्रणालीमा स्थानमानको प्रयोग भएको छैन ।
- ठूला ठूला सङ्ख्याहरू लेख्न अप्ठ्यारो हुन्छ ।

रोमन सङ्ख्याप्रणाली

रोमनहरूले शुरुमा सङ्ख्याहरू जनाउने सङ्केतका रूपमा हातका औंलाहरूको चित्र, हातको पञ्जाको चित्र प्रयोग गर्दथे ।पछि आएर 5 जनाउन प्रयोग गरिएको हातको पञ्जाको सट्टा V को प्रयोग गरे । 10 जनाउन प्रयोग भएका दुईओटा हातका पञ्जाको सट्टा X (दुईओटा V मिलेर बनेको) को प्रयोग गरे ।

रोमन सङ्ख्याप्रणालीमा प्रयोग हुने आधारभूत सङ्केतहरू तलको तालिकामा दिइएको छ ।

रोमन गणनाङ्क	सङ्ख्या
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

सङ्ख्या निर्माणका नियमहरू

अ) कुनै सङ्केतलाई जति पटक लेखेको छ, त्यति पटक जोड्ने जस्तै : CC=100+100=200, (तर LL हुँदैन, VV हुँदैन) अर्थात् यो जोड सिध्दान्तमा आधारित छ ।

यसरी लेख्दा ३ पटकभन्दा बढी एउटै सङ्केतलाई प्रयोग गरेको पाइन्न । जस्तै : 3 = III तर 4 लाई IIII लेखिन्न ।

त्यस्तै I, X, C जस्ता 1, 10, 100 जनाउने सङ्केतलाई दोहोऱ्याएको पाइन्छ भने 5, 50, 500 जनाउने V, L, D लाई दोहोऱ्याएर लेखेको पाइन्न ।

आ) सामान्यतया, पहिला ठूलो अनि सानो मान भएको सङ्केत बाँयाबाट दायाँतिर लेखेको पाइन्छ । यसो गर्दा पछिल्लो मान जोडिन्छ ।

जस्तै :

CX - 100+10 = 110

VI - 5+1 = 6

इ) ठूलो सङ्केतको बाँयातिर सानो सङ्केत लेख्दा ठूलो सङ्केतले जनाउने सङ्ख्यात्मक मानमा सानो सङ्केतले जनाउने सङ्ख्यात्मक मानले मूल्य घट्छ, अर्थात् यो घटाउ सिध्दान्तमा आधारित छ ।

जस्तै :

IV = 5-1=4

IX = 10-1=9

XL = 50-10=40

I	M	(V)	X	(L)	C	(D)

तर

I लाई V र X बाट मात्र घटाइन्छ (IL वा IC लेखिन्न)

X लाई L र C बाट मात्र घटाइन्छ (XD वा XM लेखिन्न)

C लाई D र M बाट मात्रै घटाइन्छ ।

5, 50 वा 500 जनाउने सङ्केतहरू जस्तै : V, L र D लाई घटाइन्न । (95 लेख्न VC लेख्न सकिन्न बरु XCV लेखिन्छ ।)

ई) कुनै सङ्केत समूहको माथि धर्को (जस्तै : $\overline{XXV}$) लेखेमा मानमा 1000 गुणा बढ्छ । XXV=25 र $\overline{XXV}$ =25,000 MMM लेख्दा 3000 हुन्छ, त्योभन्दा ठूलो सङ्ख्या लेख्न सङ्केतमाथि धर्को (Bar) को प्रयोग गरेको देखिन्छ ।

रोमन सङ्ख्याप्रणालीका विशेषताहरू यस प्रकार छन् :

- सातओटा सङ्केतहरूको प्रयोग
- दोहोरिने प्रणाली
- जोड तथा घटाउ सिध्दान्तमा आधारित
- ठूला सङ्ख्या लेख्न गुणन सिध्दान्तको प्रयोग

२.३ गुणनमा आधारित सङ्ख्याप्रणाली (Multiplicative system)

परम्परागत चिनीयाँ/जापानी सङ्ख्याप्रणाली गुणनमा आधारित भएको पाइन्छ ।

चिनीयाँ/जापानी सङ्ख्याप्रणालीका सङ्ख्या सङ्केतहरू तल तालिकामा दिइएको छ ।

सङ्ख्या	सङ्केत	सङ्ख्या	सङ्केत
1	一	7	七
2	二	8	八
3	三	9	九
4	四	10	十
5	五	100	百
6	六	1000	千

यस प्रणालीमा सङ्ख्या लेख्दा ठाडो लेखिन्छ (माथिबाट तल) । जस्तै: 2581 यसरी लेखिन्छ ।

2	二
1000	千
5	五
100	百

8 八

10 十

1 一

अर्थात् 2 × 1000 जोड 5 × 100 जोड 8 × 10 जोड 1) ।

२.४ स्थानमानमा आधारित सङ्ख्याप्रणाली

कुनै सङ्केत रहेको स्थानअनुसार फरकफरक मान हुने प्रणालीलाई स्थानमानमा आधारित सङ्ख्याप्रणाली भनिन्छ । प्रचलनमा रहेको हिन्दुअरेबिक सङ्ख्याप्रणालीका अतिरिक्त अन्य आधार (Base) भएका प्रणाली(आधार दुई, पाँच, आठ, दश, सोह्र आदि) मा स्थानमानको गुण प्रयोग हुन्छ ।

द्वि-आधार सङ्ख्याप्रणाली (Binary number system)

एउटा व्यवहारिक उदाहरण अध्ययन गरौं :

सुमन र संगिताले आफूसँग भएको गुच्चालाई समूहमा राख्ने र पोको पार्ने विशेष नियम बनाएछन् ।

जस्तै :

एउटा मात्र भए खुल्ला राख्ने ।

2 ओटा भए थैलीमा हाल्ने । अर्थात 1 थैली बराबर 2 गुच्चा ।

3 ओटा गुच्चा हुँदा 1 थैली र 1 खुल्ला ।

4 ओटा गुच्चा भए, 2 थैली भयो । 2 ओटा थैली भएपछि झोलामा हालेर 1 झोला बनाएछ । अर्थात् 1 झोला = 2 थैली = 4 गुच्चा ।

यसैगरी 2 झोलाको एक बाकस र 2 बाकसको 1 बोरा भएछ ।

1	1	1	1
बाकस	झोला	थैली	

यसै गरेर आफूसँग भएका गुच्चालाई जनाएछन् । उनीहरूसँग जम्मा कतिओटा गुच्चा रहेछन्?

तलको तालिकामा यो नयाँ प्रणालीमा कसरी सङ्ख्या लेखिन्छ भन्ने देखाइएको छ ।

गुच्चाको सङ्ख्या	बाकस (8)	झोला (4)	थैली (2)	खुल्ला (1)	सङ्ख्या लेख्ने तरिका
1.				1	1 खुल्ला = 1
2.			1	0	1 थैली, 0 खुल्ला = 10
3.			1	1	1 थैली, 1 खुल्ला = 11
4.		1	0	0	1 झोला, 0 थैली, 0 खुल्ला = 100
5.		1	0	1	1 झोला, 0 थैली, 1 खुल्ला = 101
6.		1	1	0	1 झोला, 1 थैली, 0 खुल्ला = 110
7.		1	1	1	.... = 111
8.	1	0	0	0	.... = 1000
9.	1	0	0	1	.... = 1001
10.	1	0	1	0	.... = 1010
11.	1	0	1	1	.... = 1011
12.	1	1	0	0	.... = 1100
13.	1	1	0	1	.... = 1101
14.	1	1	1	0	.... = 1110
15.	1	1	1	1	.... = 1111

अर्थात्

1 बाकस = 8

1 झोला = 4

1 थैली = 2

1 खुल्ला = 1

जम्मा 15

तसर्थ, 1111=15

ऊसँग 15 ओटा गुच्चा रहेछन् ।

दशमलव प्रणालीमा 325 को अर्थ के हो ?

$325=3\times10^2+2\times10^1+5\times10^0$

त्यसैगरी त्यस केटाले लेखेको सङ्ख्या द्वि-आधार प्रणालीमा छ, जहाँ 0 र 1 गरी जम्मा 2 ओटा सङ्केत छन् ।

अनि,

$1111_2 = 1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$

$= 8+4+2+1$

$= 15$ ओटा गुच्चा ।

त्यस प्रणालीमा 11001_2 लेख्दमा त्यसको अर्थ कति हुन्छ ? यो सङ्केतले जनाउने सङ्ख्याको दशमलव सङ्ख्याप्रणालीमा कति हुन्छ भन्ने कुरा माथि जस्तै विस्तारित रूपलाई रूपान्तरण गरेर पाउन सकिन्छ ।

अब,

दशमलव प्रणालीको 47 लाई द्वि-आधारमा कसरी लेखिन्छ हेरौं :

- 2 ले भाग गर्दै जाने
- भागफल तल र शेष दायाँ लेख्दै जाने ।

2	47	1
2	23	1
2	11	1
2	5	1
2	2	0
2	1	1
		0

धेरै पटक भाग गर्नुको मतलब, थैली, झोला, बाकस हुँदै ठूलो सङ्ख्यातिर अघि बढछ ।

त्यसकारण तलबाट लेख्दै जाँदा 101111

$47 = 101111_2$

जाँचेर हेरौ

$101111_2 = 1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$

$= 32+0+8+4+2+1$

$= 47$

पञ्च आधार सङ्ख्याप्रणाली (Quinary number system)

पञ्च आधार सङ्ख्याप्रणालीमा 0,1,2,3 र 4 गरी जम्मा पाँचओटा सङ्केतको प्रयोग गरिन्छ ।

दशमलव Notation	पञ्चआधार Notation	दशमलव Notation	पञ्चआधार Notation
1	1	9	14
2	2	10	20
3	3	11	21
4	4	12	22
5	10	13	23
6	11	14	24
7	12	15	30
8	13		

पञ्चआधारबाट दशमलव पद्धतिमा रूपान्तर :

$4023_5 = 4\times5^3+0\times5^2+2\times5^1+3\times5^0$

$= (4\times125)+0+10+3$

$= 513$

त्यसैगरी दशमलवबाट पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तरण

278 लाई पञ्चआधार पद्धतिमा लैजाँदा :

भाजक	भाज्य	शेष
5	278	3
5	55	0
5	11	1
5	2	2
	0	

त्यसैले $278 = 2103_5$

तलको तालिका पूरा गर्नुहोस् :

क)

<table>
<tr><th>हिन्दु अरेबिक</th><th>मिश्र</th><th>रोमन</th></tr>
<tr><td>2308</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>|||∩∩</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>MCDXLIV</td></tr>
</table>

ख)

हिन्दु अरेबिक	द्विआधार	पञ्चआधार
179		
	110010	
		1032

सङ्ख्याप्रणाली र क्रिया

केही समस्याहरू :

क) कुनै आधार (base) 'b' हुँदा, 25 (पढ्दा दुई पाँच भनी पढिन्छ) को दुई गुणा 52 (पाँच दुई) हुन्छ । 'b' को मान कति होला ?

$25_b = b^1 \times 2 + 5$

$= 2b+5$ (दश आधारमा)

$52_b = 5b+2$

अब, $5b+2 = 2(2b+5)$

वा, $b = 8$ (आधार 8 रहेछ) ।

जाँचेर हेरौं,

$25_8 = 2\times8+5$

$=21$

$52_8 = 5\times8+2$

$=42$

अनि,

$42=2\times21$ (मिल्यो)

ख) कति आधार प्रणालीमा 413 ले सोही प्रणालीको 204 को दोब्बर जनाउँछ ?

मानौं, त्यो आधार = b,

तब, 413 लाई b आधार प्रणालीमा विस्तार गर्दा,

$413_b = 4b^2+1b+3$

त्यसरी नै 204 लाई पनि b आधारमा विस्तारित गर्दा

$204_b = 2b^2+0+4$

फेरि, दिइएको दोब्बर हुन्छ भन्ने शर्तबाट

$4b^2+b+3 = 2(2b^2+4)$

or, $b+3 = 8$

$b = 5$

आधार 5 हुँदा 204 को दोब्बर 413 हुन्छ ।

जाचौँ :

$204_5=2\times5^2+0+4$

$=50+4$

$=54$

$413_5=4\times5^2+1\times5+3$

$=100+5+3$

$=108$

$108=2\times54$ (मिल्यो) ।

हिन्दु अरेबिक सङ्ख्याप्रणाली

हामीहरूले लेख्ने गरेका गणनाङ्क सर्वप्रथम हिन्दुहरूले विकास गरेका हुन् ।पछि अरेवियनहरूले युरोपतिर लगी प्रचारप्रसार गरे । अनि यस सङ्ख्याप्रणालीको नाम हिन्दु अरेविक सङ्ख्याप्रणाली रह्यो । यस प्रणालीमा सङ्ख्याहरूलाई दश दशको समूहमा राखिने भएकाले यसलाई दशमलव सङ्ख्याप्रणाली पनि भनिन्छ । दशमलव (deci) शब्द ल्याटिन भाषाबाट आएको हो जसको अर्थ हुन्छ दश । हिन्दुअरेविक सङ्ख्यासङ्केत सर्वप्रथम इशापूर्व २५० मा सम्राट अशोकद्वारा निर्मित स्तम्भमा भेटिएको थियो । इशापूर्व १०० मा भारतको पुना तथा नासिकका गुफाहरूमा पनि यी सङ्ख्यासङ्केतहरू पाइएका थिए । त्यस बेला पाइएका नमूनाहरूमा शुन्यको प्रयोग भएको पाइदैन । आठौं , नवौं शताब्दितिर मात्र शुन्यको प्रयोग शुरु भयो । इश्वी सम्वत् ८२५ मा पर्सियाका गणितज्ञ Al-Khowarizmi ले शुन्यसहितको पूर्ण हिन्दुअरेविक सङ्ख्याप्रणालीका बारेमा व्याख्या गरेका थिए ।

हिन्दुअरेविक सङ्ख्याप्रणालीका विशेषताहरू यस प्रकार छन् ।

- यस प्रणालीमा जम्मा दशओटा अङ्कहरू छन् ।
- यसको आधार दश हो ।
- यो सङ्ख्याप्रणाली स्थानमानमा आधारित छ ।
- सङ्ख्यामा अंकका विभिन्न मानहरू हुन्छन् ।
  जस्तै देख्ने मान, स्थानमान र कुलमान । जस्तै 365 मा 3 को देख्नेमान 3 हो, स्थानमान 100 हो भने कुलमान 300 हो ।
- कुनै पनि गणनाङ्कको मान त्यसमा भएका विभिन्न अङ्कहरूको कुलमानहरूको योगफल बराबर हुन्छ ।
- दुई वा सोभन्दा बढी अंकहरूबाट बनेका गणनाङ्कहरूको स्थानमानअनुसार विस्तार गरी देखाउन सकिन्छ ।

जस्तै $365 = 3 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

हिन्दु अङ्क गणितमा क्रियाहरू

देवनागरी सङ्केतहरू	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
हिन्दु अरेबिक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

हिन्दुहरूको जोड्ने तरिका

भारतीय गणितज्ञ भाष्कर (Bhaskara, 1150) द्वारा लिखित पुस्तकमा दुई खाले जोड्ने तरिका प्रस्तुत गरिएको पाइन्छ, बाँयाबाट दाँयातिर र दाँयाबाट बाँयातिर ।

जस्तै 6537 र 886 जोडौ (बाँयाबाट दाँयातिर) ।

7 3 ~~6~~~~5~~ 3 7 8 8 6	⟶	7 4 ~~7~~~~3~~ 1 ~~6~~~~5~~~~3~~ 7 8 8 6	⟶	7 4 2 ~~7~~ ~~3~~ ~~1~~ 3 ~~6~~ ~~5~~ ~~3~~ ~~7~~ 8 8 6
सयको स्थान जोडेको		दशको स्थान जोडेको		एकको स्थान जोडेको

- 8 र 5 जोड्दा 13
- 5 काटेर माथि 3 लेख्ने
- हाता लागि जोड्दा 6 काटेर माथि 7 लेख्ने ।

फेरि

- 8 र 3 जोडदा 11
- 3 को माथि 1 लेख्ने
- हातलागी 1 लगेर 4 बनाउने
- 7 र 6 जोडने र हात लागि 1 लाई 1 मा जोड्ने र 2 बनाउने र एक काट्ने ।

तसर्थ, योगफल = 7423

घटाउने तरिका

घटाउँदा पनि बाँयाबाट बाँयातिर, जस्तै : 531 बाट 245 घटाउँदा,

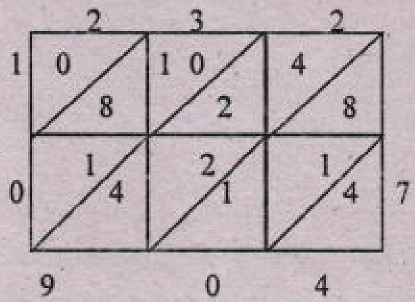
3 ~~5~~ 3 1 -~~2~~ 4 5	⟶	2 ~~3~~ 9 6 ~~5~~ ¹~~3~~ ¹~~1~~ -~~2~~ ~~4~~ ~~5~~	⟶	2 8 ~~3~~ ~~9~~ 6 ~~5~~ ¹~~3~~ ¹~~1~~ -~~2~~ ~~4~~ ~~5~~

त्यसैले 531 - 245 = 286

गुणन गर्ने तरिका

गुणन गर्ने यो तरिकालाई Gelosia अथवा Grating method भनिन्छ । यस तरिकाको शुरुआत पन्ध्रौं र सोह्रौं शताब्दी तिर भारतबाट शुरुभएको मानिन्छ ।

उदाहरणका लागि 232 × 47 लिऔं ।



त्यसैले 232 × 47 = 10904

२.५ आगमनात्मक र निगमनात्मक विचार पद्धति (Inductive and Deductive logic)

गणितीय ज्ञान निर्माण गर्ने दुईओटा विचार पद्धति छन् : आगमनात्मक (Inductive reasoning) र निगमनात्मक विचार (Deductive reasoning) । यी दुई पद्धतिले नै गणितको निर्माण र विकास भएको छ । विचार पद्धति (System of logic) का जन्मदाता ग्रिक दार्शनिक एवम् सिद्धान्तकारहरू हुन् र पहिलो नाम अरस्तुको नै आउँछ । उनी logic का पिता मानिन्छन् । १९ औ शताब्दीमा अरस्तुको तर्क (विचार) गर्ने तरिकाले गणितीय तर्क वा साङ्केतिक तर्क पद्धतिका रूपमा विकास हुने मौका पायो । यही तर्क पद्धतिबाट प्राचीन गणितज्ञका गणितीय प्रस्तावनाहरू/भनाइहरूलाई ठीक (सत्य) वा बेठीक (असत्य) सावित गर्न थालियो । यही तर्क पद्धति नै गणितीय स्वरूपको विकासको मुख्य आधार बन्यो ।

परम्परागत रूपमा तर्क (Logic) लाई दुई भागमा बाँड्ने गरिन्थ्यो : आगमनात्मक (Inductive) र निगमनात्मक (Deductive logic) तर्क विधि । निगमनात्मक तर्क विधिमा विचार गर्ने प्रक्रिया स्वीकृत मान्यता/सिद्धान्तका आधारबाट गरिन्छ र निष्कर्षलाई सत्य/असत्य सावित गराइन्छ । गणितीय सिध्दान्त र साध्यहरू प्रमाणित गर्न यही पद्धतिको प्रयोग गरिन्छ । वैज्ञानिकहरूले कुनै सामान्यीकरण वा परिकल्पना तयार पार्न आगमन पद्धतिको प्रयोग गर्छन् । खासखास तर यथेस्ट उदाहरणहरूका आधारमा वा तथ्यहरू/अवलोकनहरूका आधारमा एउटा सामान्यीकरण/नियम बनाइन्छ ।

सामान्यतया गणितमा तर्क (Logic) भन्नाले निगमनात्मक तर्क (Deductive logic) भन्ने बुझिन्छ । यसको मुख्य सरोकार गणितीय भनाइहरूको सत्यतालाई खोजीगर्ने तरिकासँग हुन्छ । गणितमा गणितीय भनाइहरूलाई स्थापित मान्यता, स्वयम् सिद्ध तथ्यहरूका आधारमा सत्यता पुष्टि गर्ने कार्यलाई प्रमाण (Proof) भनेर चिनिन्छ । कसरी निगमनात्मक पद्धतिको चिन्तन प्रक्रिया अगाडि बढाइन्छ भन्ने कुरालाई तल एउटा उदाहरणबाट हेरौं ।

कथन : यदि समूह B, समूह A को उपसमूह हो भने समूह $A \cup B$, समूह B को उपसमूह हुन्छ ।

तह प्रथम : सर्वप्रथम यो भनाइलाई पुष्टि गर्न चाहिने परिकल्पनाहरू (Hypothesis) अर्थात् स्वीकृत मान्यताहरूको सूची बनाई विचार गरौं ।

i. दुईओटा समूह X र Y छन् भने $X \cup Y \supseteq Y$, र $X \cup Y \supseteq X$

ii. यदि X एउटा समूह हो भने, $X \supseteq X$

iii. यदि X, Y र Z तीनओटा समूहहरूमा $Z \supseteq X$ र $Z \supseteq Y$, छन् भने $Z \supseteq X \cup Y$

iv. यदि X र Y दुई समूहहरू छन्, $X \supseteq Y$, र $Y \supseteq X$ छन् भने $X = Y$ हुन्छ ।

उल्लिखित गणितीय तथ्यहरू दिइएको भनाइलाई पुष्टि गर्न चाहिन्छ भनेर कसरी जान्ने भन्ने विषय नै निगमनात्मक (Deductive) प्रमाणका लागि असजिलो कुरा मानिन्छ । माध्यमिक तहका विद्यार्थीहरूले ज्यामितीक साध्यहरू प्रमाणित गर्न गाह्रो मान्ने कारण पनि आवश्यक स्वीकृत सिद्धान्तहरू, परिभाषाहरू र प्रमाणित गर्नुपर्ने प्रस्तावनाबीचको सम्बन्ध देख्न नसक्नु हो ।

माथिका स्वीकृत तथ्य वा सिद्धान्तहरूको प्रयोगबाट दिइएका समस्याको प्रमाण यसरी दिइन्छ ।

1. $A \supseteq B$, दिइएको परिकल्पना

2. $A \supseteq B$, (माथि ii मा X को सट्टा A राख्दा)

3. माथि 1 र 2 बाट

$A \supseteq A \cup B$ (माथि iii मा X र Z को सट्टा A र Y को सट्टा B राख्दा)

4. फेरि $A \cup B \supseteq A$ (माथि i मा $X = A$ र $Y = B$ राखेर विचार गर्दा)

5. माथि 3 र 4 बाट,

$A \cup B = A$ (माथि iv को तथ्यअनुसार)

माथिको उदाहरणबाट निगमनात्मक तर्क पद्धतिले गणितीय साध्यहरूको प्रमाणित गर्न कसरी मद्दत गर्छ र प्रक्रिया कसरी शुरु हुन्छ भन्ने जानकारी प्राप्त गर्न सकिन्छ । गणितमा साध्यहरूको प्रमाणमा जानुअघि त्यसका लागि आवश्यक पर्ने सम्पूर्ण स्वीकृत तथ्यहरू र सिद्धान्तहरूको पहिचान गर्नसक्ने सीप अनिवार्य हुन्छ र यी सीपहरू Connection र Reasoning दुईओटा प्रकृयासँग सम्बन्धित छ ।

निगमनात्मक तर्क (Deductive reasoning) मा प्रमाण दिने कार्य परिकल्पनाहरू (Hypothesis) र स्वीकृत परिभाषाहरू/तथ्यहरूबाट सुरु गरिन्छ र यसलाई Premises भनिन्छ । यिनै Premises का आधारमा तार्किक सम्बन्ध कायम गरी साध्य प्रमाणित गरिन्छ । यसको मान्यता भनेको Premises ठीक छन् भने निष्कर्ष पनि ठीक हुन्छ भन्ने हो ।

आगमनात्मक तर्क निगमनात्मक तर्क गर्ने तरिकाभन्दा भिन्न छ । दर्शनशास्त्रीहरू र वैज्ञानिकहरूले वैज्ञानिक सम्बन्धहरू र परिकल्पनाहरूलाई दार्शनिक हिसाबले स्थापित गरी परिकल्पनाहरू निर्माण गर्न यसको प्रयोग गर्छन् ।

गणितीय निष्कर्षहरू जस्तै : सबै पूर्ण सङ्ख्या x र y का लागि, x×y = y×x हुन्छ ।

त्रिभुजका मध्यिकाहरू समविन्दुगामी हुन्छन् ।

यी निष्कर्षहरूको स्थापना शुरुमा प्रयाप्त उदाहरणहरूमा देखिने समानता (जसलाई गणितमा Pattern भनिन्छ) को आधारमा गरिन्छ । निगमनात्मक प्रमाणको लागि आगमनात्मक तर्क आधार हो । गणितमा आगमनात्मक तर्कको प्रक्रिया गणितीय संरचना वा ढाँचाको खोज कार्यसँग सम्बन्धित हुन्छ । कसरी नयाँ गणितीय नतिजाहरूको खोजी गरिन्छ ? गणितीय नतिजाहरूको प्रमाण कसरी दिइन्छ ? जस्ता प्रश्नहरूको समाधान आगमन पद्धतिबाट गरिन्छ । आगमनात्मक तर्क प्रणालीको शुरु उदाहरणहरूबाट हुन्छ र धेरैभन्दा धेरै उदाहरणहरूमा पाइने समान गुणहरूका आधारमा एउटा निष्कर्ष निकालिन्छ । यो निष्कर्ष नै निगमनात्मक तर्क प्रणालीका लागि गणितीय सिद्धान्त बन्छ रपछि यसलाई प्रमाणित गरिसकेपछि गणितीय सिद्धान्त वा पूर्ण गणितको रूप लिन्छ । आज विकसित गणित शुरुमा आगमन पद्धतिबाट सिर्जना गरी निगमनद्वारा प्रमाणित भएपछि पूर्ण गणित बनेको हो ।

३. परियोजना कार्य

- विभिन्न सङ्ख्याप्रणालीको विकासले वर्तमान गणित शिक्षणमा पारेको प्रभावको विवेचना गरी निबन्ध लेख्नुहोस् ।
- द्विआधार र पञ्चआधार सङ्ख्याप्रणाली शिक्षणका लागि सिकाइ मोडुल तयार गर्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- Wally 'Wallyop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philipines, National Institutes for Science and Mathematics Education Development.
- Howard Eves, An Introduction to the History of Mathematics, Saunders College Publishing
- Morgan Ward, et. al., Modern Elementary Mathematics, Addison- Wesley Publishing Company, Inc.
- SATA, त्रि. वि. वि., गणित शिक्षण विधि ।

पाठ दुई : प्रतिशत, ऐकिक नियम, घरायसी बिल, कमिशन, नाफानोक्सान र ब्याज

१. परिचय

हाम्रो दैनिक जीवनमा प्रतिशत, ऐकिक नियम, घरायसी बिल, कमिशन, नाफानोक्सान तथा ब्याज जस्ता अङ्कगणितसम्बन्धी विषयवस्तुहरूले ठूलो महत्व राखेको हुन्छ । विद्यार्थीको आफ्नो पढाइ सम्बन्धमा होस् वा दैनिक जीवनका अन्य समस्या समाधानमा होस्, प्रतिशतको आधार मानी वस्तुहरूको तुलना गरिएको हुन्छ । प्रतिशतको प्रयोग घरायसी अङ्कगणितका एकाइहरू जस्तै बिल, बजेट, कर तथा लाभांश, नाफानोक्सान, कमिशन, छुट, कर दरका साथै ब्याजहरू निकाल्नसमेत व्यापक रूपमा गरिएको हुन्छ । प्रतिशतविना कुनै वस्तुहरूको बीच तुलना गर्न गाह्रो हुन्छ । यस पाठमा हामी प्रतिशत ऐकिक नियम, घरायसी बिल, कमिशन, नाफानोक्सान तथा साधारण, चक्रीय ब्याज जस्ता विषयवस्तुसम्बन्धी व्यवहारिक समस्याहरू कसरी हल गर्ने भन्ने बारे छलफल गर्नेछौं ।

२. विषयवस्तु

२.१ प्रतिशत

शिक्षक हरिजीले प्रतिशतको महत्व दर्शाउन कक्षामा एउटा उदाहरण निम्नअनुसार प्रदर्शन गर्नुभयो - कुनै विद्यालयको गत सालको एस.एल.सी. परीक्षामा कूल परीक्षार्थी ४० मध्ये ६०% उत्तीर्ण भएछन् । त्यस्तै अर्को विद्यालयको ५० परीक्षार्थीमध्ये ५०% उत्तीर्ण भएछन् भने कुन विद्यालयको नतिजा राम्रो होला ? हिसाब नगरी अनुमान गर्न लगाउनुभयो, तर धेरैंजसोले "पहिलो विद्यालयको नतिजा राम्रो" भने किनभने प्रतिशत बढी देखिन्छ । विद्यार्थीले दुवै विद्यालयमा उत्तीर्ण परीक्षार्थी सङ्ख्या निकाले । पहिलो विद्यालयको उत्तीर्ण परीक्षार्थी २४ र दोस्रोको २५ निकाले । हरिजीले यसको व्याख्या गर्दै (प्रतिशत बढी हुँदैमा परिणाम बढी नहुने तर्क दिँदै) आजको पाठ अगाडि बढाउनुभयो ।

कुनै परिमाणको केही प्रतिशत निकाल्न सो परिमाणलाई त्यस प्रतिशतले गुणा गर्नुपर्छ भन्ने तर्कलाई विद्यार्थीद्वारा आफैले प्रश्न बनाउन लगाई हलसमेत प्रस्तुत गर्न लगाउनुभयो । जस्तै : एकजना विद्यार्थीले यस प्रकारको प्रश्न बनाए रु २००० मा १५% रकम बचत भए कति रकम बचत भएछ ? कति रकम खर्च भएछ ?

यससम्बन्धी अरु समस्याहरू हरिजीले उदाहरणसहित यस प्रकार प्रस्तुत गर्नुभयो । कुनै विद्यालयका कूल विद्यार्थीमध्ये ४०% छात्रा छन् । यदि छात्राको सङ्ख्या ३६० जना भए कूल विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाऊ । यस्ता प्रकारको प्रश्नको उत्तर अनुमान गर्न लगाउनुभयो । के उत्तर ३६० जनाभन्दा बढी हुन्छ वा घटी ? यदि बढी निकालेको छ भने सो उत्तरलाई x मान्नु पर्ने र समीकरण बनाई हल गर्नु पर्ने बारे छलफल गर्नुभयो ।

यहाँ कूल विद्यार्थी सङ्ख्यालाई x मान्दा,

x को 40 % = 360 हुन्छ ।

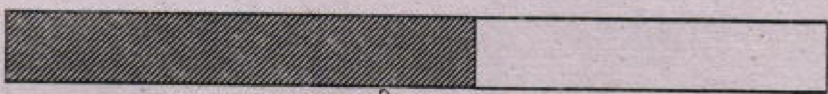
त्यसैले $x \times \frac{40}{100} = 360$

$x = 900$ हुन्छ ।

त्यस्तै गरी उहाँले अर्को प्रश्न राख्नुभयो "गणेश आफ्नो आम्दानीको 60% खर्च गरेर रु 3600 बचाउँछ भने उसको आम्दानी कति होला ?

यस प्रश्नको उत्तरमा विद्यार्थीले, $x \times \frac{60}{100} = 3600$ बनाई हल गरेछ । जुन गलत थियो । यसका लागि उहाँले चित्रद्वारा निम्नअनुसार स्पष्ट पार्नुभयो ।

60 % खर्च रु. 3600 बचत



आम्दानी

यहाँ दिइएको रकम रु 3600 को बराबर कति % हो सो स्पष्ट हुनै पर्छ । अघिल्लो उदाहरणमा 40% छात्रा र सङ्ख्या 360 पनि छात्रा नै भएकोले समस्या समाधान गर्न सकियो । तर यस उदाहरणमा रु 3600 को बराबर 60% छैन, त्यसैले,

खर्च = 60%, बचत = 100% - 60% = 40 %

अब,

$x \times 40\% =$ रु. 3600

$\therefore x =$ रु. 9000

हरिजीले अर्को तरिका पनि प्रदर्शन गराउनुभयो ।

पहिलो उदाहरणमा कूल विद्यार्थी सङ्ख्या = 100% हुन्छ ।

40% = 3 60

1% = 3 60/40

100% = (360/40)×100

= 900

त्यस्तै दोस्रो उदाहरणमा, उसको आम्दानी =100% हुन्छ ।

त्यसैले,

खर्च = 60%

बचत= 100% - 60% = 40%

अब,

40% = 3600

1% = 3600/40

100% = (3600/40) × 100

= 9000

उहाँले यस्ता प्रकारका प्रश्नहरू विद्यार्थी स्वयम्‌लाई दुईदुईओटा बनाउन लगाई हल पनि गर्न लगाउनुभयो र प्रत्येकको समाधान नजिकको साथीलाई जाँच्न लगाउनुभयो ।

२.२ प्रतिशतका समस्या समाधान गर्ने तरिकाहरू

विद्यार्थीहरूले प्रायजसो प्रतिशतका समस्याहरू समाधान गर्न नसक्नुका कारणहरूमध्ये एउटा कारण समस्या राम्ररी नबुझ्नु हो । यसका लागि सर्वप्रथम दिइएका प्रश्नहरूको मर्म बुझी छोटो रूपमा त्यसलाई व्यक्त गर्नुपर्दछ । उदाहरणका लागि निम्नलिखित प्रश्नहरूको समाधान हेरौं ।

१. एउटा परीक्षामा 50 जना विद्यार्थीहरूमध्ये 25 जना उत्तीर्ण भएछन् भने कति प्रतिशत उत्तीर्ण भए ?

   यसलाई छोटो रूपमा लेख्दा,

   50 को -----% बराबर 25 हुन्छ ।

२. गणितमा 60 जना विद्यार्थीहरूमध्ये 75% उत्तीर्ण भएछन् भने कति जना विद्यार्थीहरू उत्तीर्ण भएछन् ?

   यसलाई छोटो रूपमा लेख्दा,

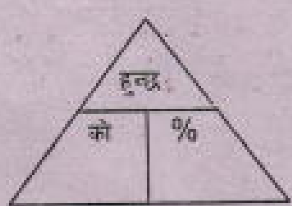
   60 को 75% बराबर ----- हुन्छ ।

३. कुनै विद्यालयबाट गतसालको SLC परीक्षामा 60% उत्तीर्ण भएछन् , यदि जम्मा उत्तीर्ण विद्यार्थी 120 जना भए कति विद्यार्थीहरूले परीक्षा दिएका रहेछन् ।

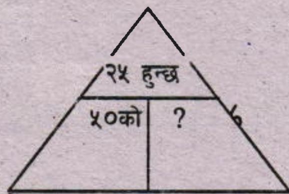
   यसलाई छोटो रूपमा लेख्दा,

   ----- को 60% बराबर 120 हुन्छ ।

यस प्रकार दिइएका प्रश्नहरूलाई छोटो रूपमा लेख्न जानेपछि मात्र ती प्रश्नहरूको समाधानका लागि निम्नलिखित "त्रिभुज तरिका" को प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

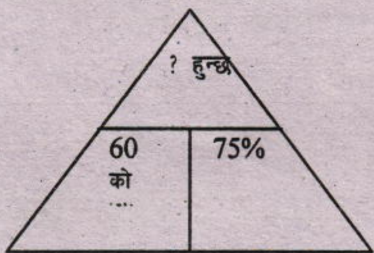


त्रिभुजलाई चित्रमा झैं तीन भागमा विभाजन गर्ने । माथिल्लो भागमा "हुन्छ" राख्ने, तल्लो भागमा बायाँपट्टि " को "र दायाँपट्टि % राख्ने । अव प्रश्न नम्बर १ को समाधानका लागि त्रिभुजका खण्डहरू भरौं ।



% बराबर 25/50 हुन्छ । यसलाई दशमलवमा लेख्दा 0.5 हुन्छ । % मा लेख्दा 50% हुन्छ । त्यसैले 50 को 50% बराबर 25 हुन्छ ।

त्यसैगरी प्रश्न नं. २ को लागि



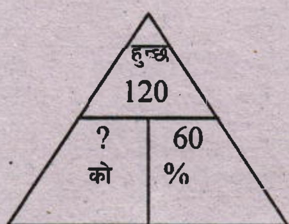
60 को 75% बराबर ----- हुन्छ । यसका लागि % खण्डमा 75 र "को " खण्डमा 60 लेखी "हुन्छ " खण्डमा ? लेखिएको छ । अघिल्लो समाधानमा जस्तो यहाँ भिन्न आउँदैन । यहाँ 75% र 60 को गुणनफल निकाले पुग्छ ।

अर्थात् 60 को 75% $= 60 \times \frac{75}{100} = 45$

त्यसैले, 60 जनाको 75 बराबर 45 हुन्छ ।

त्यसैगरी प्रश्न नं ३ का लागि पनि त्रिभुज बनाई खण्डहरूमा सङ्ख्याहरू भरौं ।

----- को.60% बराबर 120 हुन्छ ।



यहाँ % को खण्डमा 60 % बराबर 0.6 लेख्नुपर्छ । "को" खण्डको उत्तर निकाल्न पनि अंशको भागलाई हरको भागले भाग गर्नुपर्छ ।

अर्थात्

$$? = \frac{120}{0.6} = 200$$

त्यसैले जम्मा 200 विद्यार्थीहरुले SLC परीक्षा दिएका रहेछन् ।

२.३ ऐकिक नियम

ऐकिक नियमको पाठ शुरु गर्नुभन्दा अगाडि हरिजीले प्रत्यक्ष र अप्रत्यक्ष विचरण लेखिएको निम्नअनुसारको चार्ट प्रदर्शन गर्नुभयो ।

चार्ट नं. १

15 कलमको मूल्य बराबर रु 225 पर्छ भने 10 ओटाको कति पर्ला ?	
15 कलमको मूल्य = रु 225	↓÷
1 कलमको मूल्य = रु 225/15	
15 कलमको मूल्य = रु (225/15)×10	↑×

यस उदाहरणमा उहाँले परिमाण घट्दा मूल्य पनि घट्छ र परिमाण बढ्दा मूल्य पनि बढ्छ भन्ने धारणा दिन चार्टमा वाण चिन्ह (Arrows) ले स्पष्ट पार्नुभएको छ । यसका साथै यस्ता परिमाणमा थोरै निकाल्न भाग र धेरै निकाल्न गुणन गर्नु पर्ने बारे पनि छलफल गर्नुभयो । यस्तै उदाहरण विद्यार्थीलाई बताउन लगाई हल गर्न लगाउनुभयो । तर 1 भन्दा सानो भिन्नको परिमाणबाट बढी वा घटी परिमाण निकाल्न के गर्नु पर्छ भन्ने कुरा निम्नअनुसारका उदाहरणद्वारा छलफल गर्नुभयो ।

एक बोरा चामलको 3/5 भागको मूल्य रु 540 पर्छ भने 3/4 भागको मूल्य कति पर्ला ?

यस प्रश्नको उत्तर निकाल्न उहाँले एकजना विद्यार्थीलाई बोर्डमा हल गर्न लगाउनुभयो । जुन यस प्रकार थियो ।

3/5 भाग बराबर रु 540

1 भाग बराबर रु $540 \times \frac{3}{5} = 324$

3/4 भाग बराबर रु 324/(3/4) = रु 486

यसमा 3/5 भागको मूल्यभन्दा 3/4 भागको मूल्य घटेकोछ । त्यसैले यहाँ बढी मूल्य निकाल्न भाग गर्नुपर्छ ।

अर्थात्

3/5 भाग बराबर रु 540

1 बराबर रु 540/(3/5) = 900

3/4 भाग बराबर रु 900 × (3/4) = रु 600 हुन्छ ।

यसैगरी उहाँले यस्ता प्रत्यक्ष विचरणसम्बन्धी समस्याहरू एकएकओटा विद्यार्थीलाई बनाउन लगाउनुभयो र समाधान गरेपछि उत्तरहरू नजीकको साथीलाई जाँच्न लगाउनुभयो ।

हरिजीले अप्रत्यक्ष विचरणका समस्याहरू एकजना विद्यार्थीलाई बोर्डमा लेख्न लगाउनुभयो । उसले यस प्रकार लेखेको थियो ।

10 जना मानिसले 15 दिनमा एउटा टहरा निर्माण गर्न सक्छन् भने 10 दिनमा सिध्याउन कति ज्यामी चाहिएलान् ?

यो प्रश्न किन अप्रत्यक्ष विचरणको हो ? छलफल गर्नुभयो । एउटा परिमाण बढ्यो भने अर्को परिमाण घट्छ, पहिलो परिमाण घट्यो भने दोस्रो परिमाण बढ्छ । त्यसैले यस्ता समस्याहरू अप्रत्यक्ष विचरणका हुन् भनी छलफल गर्नुभयो ।

यहाँ,

15 दिनमा सो टहरो बनाउन 10 ज्यामी चाहिन्छ ।

1 दिनमा सो टहरा बनाउन 10×15 ज्यामी चाहिन्छ ।

10 दिनमा सो टहरा बनाउन (10×15)/10=15 ज्यामी चाहिन्छ ।

यसलाई उहाँले वाण चिन्हद्वारा यस प्रकार प्रष्ट्याउनुभयो ।

↓ ↑

↑ ↓

यसैगरी तीनओटा परिमाण भएका ऐकिक नियम तथा समानुपातसम्बन्धी समस्याहरू हल गर्दा अपनाउनुपर्ने सतर्कतासम्बन्धी छलफल गर्नुभयो । दुई परिमाणहरूबीचको सम्बन्धबारे क्रियाहरू भइसकेपछि मात्र तेस्रो परिमाणसँग क्रिया गर्नुपर्छ, जुन दिइएको समस्यामा भर पर्छ । त्यसैले उहाँले निम्नअनुसार एउटा उदाहरण प्रस्तुत गरी छलफल गर्नुभयो ।

यदि 8 ज्यामीलाई 1/3 खेत खन्न 20 दिन लाग्छ भने 10 ज्यामीलाई 2/3 खेत खन्न कति दिन लाग्ला ?

यस प्रश्नको उत्तर निकाल्न हरिजीले पहिले यस प्रकार गरी छोटकरीमा लेख्नुभयो,

ज्यामी	खेत	दिन
8	1/3	20
10	2/3	?

ऐकिक नियमद्वारा यसरी समाधान गर्नुभयो :

8 ज्यामीलाई 1/3 खेत खन्न 20 दिन लाग्छ ।

1 ज्यामीलाई 1/3 खेत खन्न 20×8 दिन लाग्छ ।

10 ज्यामीलाई 1/3 खेत खन्न (20×8)/10 दिन लाग्छ ।

10 ज्यामीलाई 1 खेत खन्न (20×8)×3/10 दिन लाग्छ ।

8 ज्यामीलाई 2/3 खेत खन्न (20×8)×(2/3)×3/10 दिन लाग्छ ।

= 32 दिन ।

यसलाई chain rule अनुसार लेख्दा,

ज्यामी	दिन	खेत
8	1/3	20
10	2/3	? (x) मानौ

त्यसैले,

$8\times(2/3)\times20 = 10\times(1/3)\times x$ हुन्छ ।

$x = \dfrac{8\times2\times20\times3}{10\times3} = 32$ दिन ।

उहाँले ज्यामी, खेत र दिनको परस्पर सम्बन्ध प्रत्यक्ष वा अप्रत्यक्ष कस्तो हुन्छ सो बारे छलफल गर्नुभयो । यस्तै प्रश्नहरू विद्यार्थीलाई बनाउन लगाई उत्तरहरू छलफल गर्नुभयो ।

२.४ घरायशी बिलसम्बन्धी धारणा

हरिजीले अघिल्लो दिन विद्याथीलाई आआफ्नो घरको बिजुलीको महशुल बिल ल्याउन भन्नु भएको थियो । आजको कक्षामा त्यहाँ ल्याइएका बिलहरू प्रत्येक बेन्चमा कम्तीमा एउटा एउटा पुग्ने गरी बाँड्नुभयो र सो बिल पूरा अध्ययन गर्न लगाउनुभयो । अनि प्रश्नहरू गर्नुभयो ।

- खपत यूनिट कसरी निकालियो ?
- कति यूनिटसम्म न्यूनतम मूल्य लाग्ने रहेछ ?
- न्यूनतम मूल्य कति रहेछ ?
- न्यूनतम यूनिटभन्दा बढी यूनिटको महसुल कुन दरले लिने रहेछ ?
- छुट र जरिवानाका नियमहरू केके रहेछन् ?

यी प्रश्नहरूको उत्तर विद्यार्थीबाट लिइसकेपछि उहाँले एउटा बिलको महसुलको निर्धारण कसरी गरेको रहेछ भन्ने बारे छलफल गर्नुभयो ।

जम्मा खपत युनिट = हालको अङ्क - अघिल्लो महिनाको अङ्क

न्यूनतम युनिटसम्मको मूल्य =

बाँकी युनिटको मूल्य =

जम्मा महसुल =

त्यसपछि उहाँले त्यहाँ वितरित विद्युत बिलको रकम ठीक छ वा छैन जाँच्न लगाउनुभयो । उहाँले केही टेलिफोनका बिलहरू समूहमा वितरण गर्नुभयो र विद्यार्थीलाई अध्ययन गर्न लगाउनुभयो र निम्न प्रश्न गर्नुभयो :

- जम्मा खपत कल कति छ ?
- Rental कल कति छ ?

- न्युनतम महसुल कति छ ?
- बढी कलको महसुल कसरी निकालियो ?
- कुनकुन कलहरू कसरी लिइएको रहेछ ?
- जरिवाना कसरी लिइन्छ ?

त्यसपछि उहाँले एउटा बिलको महसुल उदाहरणका रूपमा बोर्डमा गर्नुभयो । यसको छलफलपछि समूहगत रूपमा वितरित टेलिफोन बिलको महसुल निकाल्न लगाउनुभयो र उत्तर जाँच्न लगाउनुभयो । त्यसैगरी उहाँले पानीको महसुल बिलको नमूना चार्टमा लेखी विद्यार्थीहरूलाई अध्ययन गर्न लगाउनुभयो र निम्न प्रश्न गर्नुभयो :

- कति हजार लिटरको एक यूनिट रहेछ ?
- कति यूनिट खपत भएछ ?
- न्यूनतम यूनिट र महसुल कतिकति रहेछ ?
- कुनकुन कर लिइएको रहेछ ?
- कति % कर लिइएको रहेछ ?
- न्यूनतम यूनिटभन्दा बढी यूनिटको कुन दरले महसुल लगाइएको रहेछ ?
- छुट कसरी रहेछ ?

उहाँले कुनै एउटा बिलको महसुल निकाल्ने तरिकाको छलफल गरेपछि वितरित बिलको महसुल निकाल्न लगाउनुभयो । उत्तर र बिलको महसुल ठीक छ वा छैन जाँच्न लगाउनुभयो ।

- एक हजार लिटर पानीको 1 यूनिट हुन्छ ।
- न्यूनतम 10 यूनिटको रु 40 पर्छ ।
- न्यूनतम युनिटभन्दा माथि प्रति युनिटको रु 25 को दरले थपिन्छ ।
- ढल निकास कर 50% लिइन्छ ।
- मिटर रिडिङ्ग भएको 2 हप्ताभित्र महसुल बुझाएमा 3% छुट दिइन्छ ।

हरिजीले विद्यार्थीलाई प्रश्न गर्नुभयो “कर शब्द कहाँकहाँ सुन्ने गरिएका छन् ?” विद्यार्थीले उत्तर दिए कि सवारी कर, मनोरञ्जन कर, आय कर, मूल्य अभिवृद्धि कर आदि । यी करहरू किन लिइएका हुन् ? कसरी लिइन्छ ? कोसँग लिइन्छ ? आदि प्रश्नहरू गर्नु भई उहाँले कथा शुरु गर्नुभयो ।

राजुले राज्य विकास तथा निर्माण कार्य गर्न आवश्यक रकम त्यस राष्ट्रका जनताबाट कार्यको प्रकृति हेरी निश्चित रकम लिने गर्दछ । त्यही रकमलाई कर भनिन्छ । उहाँले एउटा उदाहरण यस प्रकार दिनुभयो ।

सविर प्रति महिना रु 7500 कमाउँछ । प्रति वर्ष वार्षिक आम्दानी रु 7500 भन्दा बढी कमाउने व्यक्तिले सो बढी रकमको 15% को दरले आयकर तिर्नु पर्छ भने उसले कति रकम कर तिर्छ होला ?

यहाँ, सविरको वार्षिक तलब =रु 7500×12

=रु 90000

करयोग्य रकम =रु 90000 - रु 75000 = रु 15000

तिर्नु पर्ने कर = रु 15000×15/100 = रु 2250

त्यसैगरी नगरपालिकाभित्रका बासिन्दाले घर बहाल कर पनि तिर्नुपर्छ । सिनेमाहलको टिकटमा मनोरञ्जन कर लिइएको हुन्छ । मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) हाल वृद्धि भएर 13% पुगेकोछ । कुनै सामान किन्दा त्यसमा VAT समावेश गरिएको हुन्छ । जस्तै : एकजना मानिसले रु 5400 मा एउटा TV किनेछ । सो रकममा VAT पनि जोडिएको हुन्छ । त्यसैगरी सवारी साधनको पनि कर तिर्नुपर्दछ । जुन निश्चित प्रतिशतका आधारमा लिइन्छ भनी छलफल गर्नुभयो । उहाँले निम्न प्रश्नको उत्तर निकाल्ने तरिकाबाट कक्षामा यस प्रकार छलफल गर्नुभयो । एउटा कमीजको मू.अ.क. सहित मूल्य रु 226 पर्छ । यदि 13% मू.अ.क. लाग्दछ भने यसको शुरु मूल्य तथा मू.अ.क. निकाल ।

यहाँ,

मू.अ.क. सहितको मूल्य = रु 226

शुरुको मूल्य = रु x मानौं ,

प्रश्नअनुसार,

$x + x \times 13/100 =$ रु 226

$x =$ रु 200

मू.अ.क. = रु $200 \times 13/100 =$ रु 26

त्यसैले अङ्कित मूल्य रु 200 र मू.अ.क. रु 25 पर्छ ।

त्यसपछि हरिजीले केही दैनिक पत्रिकाहरू विद्यार्थीलाई समूहगत रूपमा अध्ययन गर्न लगाउनुभयो । जसमा भएका मू.अ.क. सम्बन्धी सूचनाहरू, वर्गीकृत विज्ञापनहरूमा रहेका सामानहरूको मूल्य मू.अ.क. सहित वा मू.अ.क समावेश नगरिएका मूल्यहरू आदिको मूल्यहरू निकाल्न लगाउनुभयो । जस्तै : एउटा विज्ञापनमा "रङ्गीन TV को मूल्य रु 17500, यसमा VAT जोडिएको छैन् ।" VAT जोडेपछि सो TV को मूल्य कति पर्ला ? छलफल गर्नुभयो ।

२.५ कमिशन, छुट र लाभांस

हरिजीले कक्षामा एउटा नाटक देखाउनुभयो । एक जना विद्यार्थीलाई उसको झोलासहित आगडि राख्नुभयो । उसको झोलामा 5% छुट भन्ने लेखिएको कागजको टुक्रा र रु 350 लेखिएको अर्को टुक्रा पनि टाँस्नुभयो ।

अर्को एकजना विद्यार्थीलाई सो झोला किन्न लगाउनुभयो । उसले कति रकम तिरी सो झोला किन्छ होला ? प्रश्न गर्नुभयो । यस प्रश्नको उत्तर सोही विद्यार्थीलाई बोर्डमा गर्न लगाउनु भयो ।

अङ्कित मूल्य =रु 350

छुट =रु 5%

छुटपछिको मूल्य =रु 350 -रु 350×5/100

=रु 350 - 17.5

=रु 332.5

उहाँले यही समस्यामा, छुटपछिको मूल्य रु 332.5 दिइएको झोलाको अङ्कित मूल्य निकाल्न लगाउनुभयो । यहाँ छुट 5% छ । यस बारे छलफल उहाँले निम्नअनुसार गर्नुभयो ।

अङ्कित मूल्य-अङ्कित मूल्यको 5% = छुटपछिको मूल्य

अथवा,

x-x×5/100= रु 332.5

95x= रु 332.5/95 = रु 350

एउटा कारखाना वा थोक बिक्रेताले पसलपसलमा गएर सामानहरू बेचेवापत बिक्रेतालाई केही रकम परिमाणअनुसार दिन्छ भने त्यसलाई कमिशन भनिन्छ । जस्तै : एउटा दालमोट कम्पनीले पसलमा गई कुनै व्यक्तिले सो सामान पसलेलाई बिक्री गर्छ भने उसले कम्पनीबाट 2% कमिशन पाउँछ ।

अर्थात्,

प्रति कि.ग्रा. दालमोटको मूल्य रु 80 पर्छ भने उसले रु 80×2/100= रु 1.60 कमिशन पाउँछ । यस्तै उदाहरणहरू उहाँले विद्यार्थीलाई बनाउन दिई समस्याहरू समाधान गर्न लगाउनुभयो र उत्तरहरू विद्यार्थीबीच एक आपसमा जाँच्न लगाउनुभयो ।

त्यसैगरी यदि कुनै कारखानाले आफूले कमाएको नाफाको केही हिस्सा प्रत्येक कामदारलाई उनीहरूको तलबमानको आधारमा वितरण गर्छ भने त्यो वितरित हिस्सालाई लाभाँश भनिन्छ । जस्तै : एउटा सिमेन्ट कारखाना गत वर्ष रु १ करोड नाफामा थियो । त्यहाँ पाँच तहका कर्मचारीहरू कार्यरत छन् । कुनै तहको कर्मचारीले प्रति महिना रु 3200 कमाउँछ । उसले गत वर्षको लाभांश 0.12% पाउँछ भने उसले रु 1,00,00,000×0.12/100 = रु 12,000 लाभाँश पाउँछ ।

२.६ नाफानोक्सान

हरिजीले नाफानोक्सानसम्बन्धी क्रय मूल्य र नाफानोक्सान प्रतिशत दिएमा विक्रय मूल्य निकाल्ने तथा विक्रय मूल्य र नाफानोक्सान प्रतिशत दिएमा क्रय मूल्य निकाल्ने बारे निम्न

प्रश्नद्वारा छलफल गर्नुभयो । एउटा रेडियो रु 3600 मा बेच्दा 10% नोक्सान हुन्छ भने कतिमा बेच्दा 15% नाफा होला ?

यो प्रश्न विद्यार्थीलाई अध्ययन गर्न लगाएपछि उहाँले विक्रय मूल्य दिएरपछि फेरि विक्रय मूल्य नै सोधेको हुनाले सर्वप्रथम विक्रय मूल्य र नोक्सान प्रतिशतबाट क्रय मूल्य निकाल्नै पर्ने र त्यस क्रयमूल्य र नाफा प्रतिशतबाट विक्रय मूल्य निकाल्नु पर्ने बारे छलफल गर्नुभयो । उहाँले ऐकिक नियमबाट यो प्रश्नको समाधान गरिसकेपछि पहिले क्रय मूल्य निकाल्ने सूत्र रपछि विक्रय मूल्य निकाल्ने सूत्र प्रतिपादन गर्नुभयो ।

यदि विक्रय मूल्य = रु 100 - रु 10 = रु 90 भए क्रय मूल्य = रु 100 हुन्छ ।

यदि विक्रय मूल्य = रु 1 भए क्रय मूल्य = रु 100/90 हुन्छ ।

यदि विक्रय मूल्य = रु 3500 भए क्रय मूल्य = रु (100/90)×3600 हुन्छ ।

= रु 4000 हुन्छ ।

विक्रय मूल्य निकाल्दा,

यदि क्रय मूल्य रु 100 भए विक्रय मूल्य = रु 100+15=115 हुन्छ ।

यदि क्रय मूल्य रु 1 भए विक्रय मूल्य = 115/100 हुन्छ ।

यदि क्रय मूल्य रु 4000 भए विक्रय मूल्य = (115/100)×4000 हुन्छ ।

= रु 4600

त्यसैले अब रेडियो रु 4600 मा बेच्दा 15% नाफा हुन्छ ।

यसलाई अर्को तरिकाबाट हेर्दा

पहिलो चरणबाट,

क्रय मूल्य =100×वि.मू. ⁄ 100+नाफा %

=100×वि.मू. ⁄ 100 - नोक्सान %

त्यसैगरी,

दोस्रो चरणबाट,

विक्रय मूल्य =(100+नाफा %/100)×क्रय मूल्य

=(100-नोक्सान %/100)×क्रय मूल्य

उहाँले यी सूत्रहरूको प्रतिपादन बारे छलफल गर्नुभयो ।

अर्को उदाहरण पनि उहाँले निम्नअनुसार दिनुभयो।

एउटा पंखाको अङ्कित मूल्यमा 5% छुट दिई 10% VAT लगाएर बेच्दा क्रय मूल्यको 5% नाफा हुन्छ । यदि छुट नदिई VAT 10% मात्र लगाउँदा रु 220 नाफा हुन्छ भने उक्त पंखाको अङ्कित मूल्य र क्रय मूल्य निकाल ।

यो प्रश्न विद्यार्थीलाई अध्ययन गर्न लगाइसकेपछि हरिजीले प्रश्नका मुख्यमुख्य बुँदाहरू टिप्न लगाउनुभयो ।

पहिलो चरण,

छुट = अङ्कित मूल्यको 5%

VAT = छुटपछिको मूल्यमा 10%

नाफा = क्रय मूल्यको 5%

दोस्रो चरण,

VAT = अङ्कित मूल्यमा 10%

नाफा = रु 220

दुवै चरणका लागि अङ्कित मूल्य =रु x मानौ

अङ्कित मूल्य (x)=?,

क्रय मूल्य = ?

प्रश्नअनुसार,

छुट = रु x×5/100 = x/20

छुटपछिको मूल्य = x - x/20 = रु 19x/20

VAT = छुटपछिको मूल्य × 10/100= रु 19x/200

VAT पछिको मूल्य = रु (19x/20)+(19x/200)=209x/200

रु (209x/200) - क्रय मूल्य = क्रय मूल्य × 5/100

अथवा,

209x/200=(21/20) × क्रय मूल्य

अथवा,

209x-210 क्रय मूल्य =0............................(i)

फेरि,

दोस्रो चरणका लागि,

VAT = अङ्कित मूल्यको 10% = (x×10)/100

VAT पछिको मूल्य = रु x+(x/10)=11x/10

प्रश्नअनुसार,

VAT पछिको मूल्य - क्रय मूल्य = रु 220

अथवा,

11x/10-क्रय मूल्य =रु 220

11x - 10क्रय मूल्य =रु 2200..........................(ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई हल गर्दा,

209x-210 क्रय मूल्य =0

<u>11x -10 क्रय मूल्य =2200</u>

209x-210 क्रय मूल्य =0

231x-210 क्रय मूल्य =46200

-　　+　　　　　-

-22x=-46200

x=रु 2100

अङ्कित मूल्य = रु 2100

फेरि, क्रय मूल्य निकाल्दा,

11×2100-2200=10 क्रम मूल्य

क्रय मूल्य = रु 2090

उहाँले यस्तै प्रकारका अरु समस्याहरू विद्यार्थीलाई नै बनाउन लगाई समाधान पनि गर्न लगाउनुभयो ।

२.७ साधारण ब्याज, चक्रीयब्याज, जनसङ्ख्या वृद्धि र ह्रास

हरिजीले एउटा कागजको बाकसमा बैक लेखेर ल्याउनुभएको रहेछ र उहाँले एउटा उदाहरण भन्नुभएछ । विजयले बैकमा रु 1000 जम्मा गरेछ भनी कागजको टुक्रामा रु 1000 लेखेर खसाल्नुभएछ । 2 वर्षपछि बैकले कति रकम थपेर दिन्छ ? भनी प्रश्न गर्नुभयो तर विद्यार्थीले यति हो भनेर भन्न सकेनन् तर अवश्य पनि केही रकम थपेर दिन्छ भन्नेमा सहमत भए । रकम थपेर दिन पनि निश्चित नियमको दर हुनैपर्छ र समय पनि तोकिएको हुनैपर्छ नत्र आजको भोलि नै पूरा रकम थपेर दिँदैन् । त्यसैले उहाँले बाकसमा दर 5% पनि लेख्नुभयो । व्याख्या गर्नुभयो कि दर 5% भनेको प्रति रु 100 मा 1 वर्षपछि रु 5 थपेर दिन्छ वा रु 100 मा 1 वर्षपछि रु 5 ब्याज दिन्छ ।

त्यसैले,

रु 100 मा 1 वर्षपछि रु 5 ब्याज दिन्छ ।

रु 1 मा 1 वर्षपछि रु 5/100 ब्याज दिन्छ ।

रु 1000 मा 1 वर्षपछि रु (5/100)×1000 ब्याज दिन्छ ।

= रु 100

अर्थात्

साँवा　= रु 1000,

समय　= रु 2 वर्ष,

दर　= रु 5%

ब्याज = (5×1000×2)/100

= (साँवा × दर × समय) / 100

बाकसमा एकवर्षपछि रु (1000+100) = रु 1100 जम्मा हुन्छ । अर्थात् मिश्रधन = साँवा + ब्याज हुन्छ भनी छलफल गर्नुभयो । त्यसपछि ब्याज निकाल्ने सूत्रबाट अरु परिवर्तित सूत्रहरू प्रतिपादन गर्नुभयो ।

जस्तै :

दर = (100×ब्याज)/ (समय×साँवा)

साँवा = (100×ब्याज)/ (समय×दर)

समय = (100×ब्याज)/ (साँवा×दर)

मिश्रधन दिइएका साँवा निकाल्ने सूत्र पत्ता लगाउने कार्य उहाँले विद्यार्थीलाई दिनुभयो।

जस्तै :

$A = P+I$

$A = P+(PTR/100)$

$P = (A\times100)/(100+TR)$

जहाँ, साँवा (P), समय (T), दर (R), मिश्रधन (A) जनाइएको छ ।

यस प्रकार उहाँले साधारण ब्याजबारे छलफल गर्नुभएपछि चक्रीयब्याज निकाल्ने बारे छलफल गर्नुभयो ।

बैंकको नियमअनुसार यदि प्रति 1 वर्ष ब्याज दिइन्छ भने दोस्रो वर्षको शुरुमा सो ब्याजसमेत जोडी साँवा हुन्छ अर्थात् दोस्रो वर्षको साँवा पहिलो वर्षको मिश्रधन हुन्छ । यसरी ब्याजको ब्याज पनि पाइने हुनाले यसलाई चक्रीयब्याज भनिन्छ । यसको लागि उहाँले निम्नअनुसारका उदारहण दिनुभयो ।

वर्षेनी चक्रीय ब्याज दिने बैंकले रु 10,000 को दुई वर्षपछि 10% को दरले कति मिश्रधन होला ?

पहिलो वर्ष पाउने ब्याज निकाल्दा,

ब्याज =(10000×1×10)/100= रु 1,000

त्यसैले 2 वर्षपछि मिश्रधन रु 11,000 + रु 1,000 = रु 12,100 हुन्छ ।

यस समस्यालाई सूत्र प्रयोग गरेर पनि देखाउनुभयो ।

चक्रीय मिश्रधन $(A) = P(1+R/100)^T$

$=$ रु $10000(1+10/100)^2$

$=$ रु $10,000\times11/10\times11/10$

$=$ रु 12,100

चक्रीय ब्याज $I = P[(1+R/100)^T-1]$ बारे पनि छलफल गर्नुभयो । यदि बैंकले अर्धवार्षिक रूपमा ब्याज दिन्छ भने १ वर्षमा २ पटक ब्याज पाइन्छ । दोस्रो पटकमा चक्रीय ब्याज पाइन्छ । त्यसैले समय १ वर्षको २ अर्धवार्षिक वा २ वर्षको ४ अर्धवार्षिक हुन्छ भने दर पनि आधा हुन्छ ।

जस्तै :

$P = $ रु 10,000

$T = 2$ वर्ष $= 4$ अर्धवार्षिक

$R = 10/2\ \% = 5\%$ (अर्धवार्षिक रूपमा चक्रीय ब्याज दिने भएकोले)

$A = ?$

सूत्रअनुसार,

$A = P(1+R/100)^T$

$= 10,000(1+5/100)^4$

$= 10,000\times21/20\times21/20\times21/20\times21/20$

$=$ रु 12155.06

यसपछि उहाँले यस्ता उदाहरणहरू विद्यार्थीलाई बनाउन दिई अभ्यस्त गराउनुभयो । यसका साथै R, P, T निकाल्ने समस्याहरू पनि गराउनुभयो ।

यसैगरी कुनै ठाउँको जनसङ्ख्या पनि वर्षेनी बढ्दै जान्छ भने दोस्रो वर्ष पहिलो वर्ष झैं वृद्धि हुने भएकोले जनसङ्ख्या निकाल्न पनि चक्रीयब्याजको सूत्र प्रयोग गरिन्छ,। यसका लागि उहाँले निम्न उदाहरण प्रस्तुत गर्नुभयो ।

कुनै ठाउँको जनसङ्ख्या 20,000 छ । यदि जनसङ्ख्या वृद्धिदर 2% भए 2 वर्षपछि सो ठाउँको जनसङ्ख्या कति होला ?

यहाँ,

अहिलेको जनसङ्ख्या $(P)=20,000$

वृद्धि दर $(R) = 2\%$

समय $(T)=2$ वर्ष

दुई वर्षपछिको जनसङ्ख्या $(P_T)=?$

सूत्रअनुसार,

$P_T=P(1+R/100)^T$

$=20,000\times5/50\times5/50$

$=20,808$

यसप्रकार अघिल्लो वर्षमा बढदो जनसङ्ख्या पनि निकाल्न सकिन्छ ।

जम्मा बढेको जनसङ्ख्या = 20,808 - 20,000 = 808 जना हुन्छ ।

यस सूत्रबाट पहिलेको जनसङ्ख्या, दर र समय पनि निकाल्न सकिने बार पनि उदाहरण सहित छलफल गर्नुभयो ।

हरिजीले आफ्नो घडी विद्यार्थीलाई देखाएर शुरुमा यसको मूल्य कति थियो होला भनेर सोध्नु भयो । विद्यार्थीले रु 2000 भने । उहाँले फेरि प्रश्न गर्नुभयो अहिले बेच्दा कति रकम आउँछ होला ? विद्यार्थीले यसको मूल्य अवश्य घट्छ भने । त्यसैगरी उहाँले दैनिक पत्रिकाको वर्गीकृत

विज्ञापन देखाउनुभयो । जसमा नयाँ मोटरसाइकलको मूल्य रु 1,05,000 थियो र वर्गीकृत विज्ञापनमा सोही कम्पनीको सोही मोटरसाइकलको मूल्य रु 68,000 मा बिक्रीका लागि राखिएको रहेछ । त्यसैले मेशीनरी सामानको मूल्य घट्दै जान्छ । यसैगरी उहाँले अरु उदाहरणहरू विद्यार्थीबाट लिएर छलफल गर्नुभयो । उहाँले निम्न समस्यामा छलफल गर्नुभयो ।
एउटा लुगा सिउने मेशीन शुरुमा रु 5600 मा किनेछ । वर्षेनी 5% का दरले मेशिनमा ह्रास आउँछ भने 3 वर्षपछि सो मेशीन बेच्नु पर्‍यो भने कति मूल्य होला ?

पहिलेको मूल्य (P) = रु 5600

ह्रास दर (R) = 5%

समय (T) = 3 वर्ष

हालको मूल्य (D_T) = ?

सूत्रअनुसार,

D_T = $P(1-R/T)^T$

= रु $5600\,(1-5/100)^3$

= रु $5600 \times 19/20 \times 19/20 \times 19/20$

= रु 4801.30

यसै सूत्रद्वारा पहिलेको मूल्य, ह्रास दर वा समय निकाल्ने उदाहरणहरू विद्यार्थीलाई बताउन लगाउनुभयो र समाधान पनि गर्न लगाउनुभयो ।

३. परियोजना कार्य

निम्नलिखित क्रियाकलापहरू विद्यार्थीहरूलाई गराउनुहोस् र यसबाट विद्यार्थीहरूको सिकाइमा परेको प्रभावको बारेमा प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस् ।

- घर निर्माण गरिएको ठाउँमा गई कति ज्यामी, कति समय प्रतिदिन काम गर्दा पूरा काम सिध्याउन कति दिन लाग्छ ? आदि कुरा ठेकेदार वा सम्बन्धित ज्यामीलाई सोधी त्यसको लागत मूल्य निर्धारण गर्न विद्यार्थीहरूलाई लगाउनुहोस् ।
- गत महिनाको विजुलीको विलमा लेखिएको रकम जाँच्न लगाउनुहोस् ।
- 100 वाटका हिटर 10 मिनेट बाल्न लगाई कति युनिट खपत हुन्छ, हेर्न लगाउनुहोस् ।
- बैंक, नागरिक लगानी कोष, राष्ट्रिय बीमा संस्थान आदि संस्थाहरूले व्याज कसरी निर्धारण गर्दछ ? अर्धवार्षिकी चक्रीयव्याज भनेको के हो ? तिमीले बैंकमा राखेको रकम कहिले दोब्बर होला ? उल्लिखित संस्थाहरूमा गई उत्तर लेख्न लगाउनुहोस् ।
- आफ्ना क्षेत्रमा लगाइएका करहरू के के हुन् ? आफ्नो वडा / गा.वि.स. मा गई लेख्न लगाउनुहोस् । ती रकमहरू कहाँ कसरी प्रयोग भएका छन् ? सोधेर लेख्न लगाउनुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री

- डा. हिराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण
- डा. हरिप्रसाद उपाध्याय, गणित शिक्षण
- K.S. Sidhu ,Teaching of Mathematics,
- NCERT, Content cum Methodology of Teaching Mathematics for B.Ed. Students

एकाइ दुई
बीजगणित शिक्षण

Competency : Understand algebra as language of Mathematics and used it in interpreting everyday discourse into mathematical language.

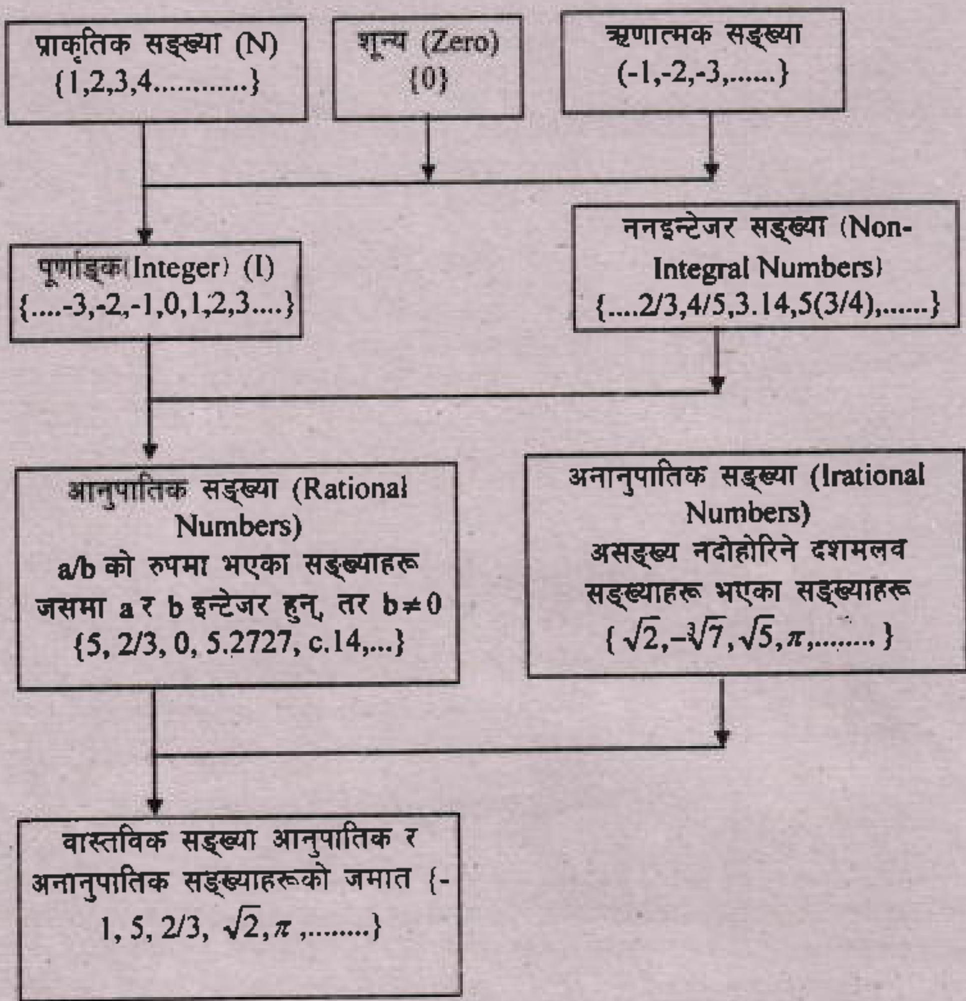
१. परिचय :

यस एकाइमा बीजगणितका आधारभूत धारणाहरू, बहुपदीय (Polynomial) तथा तिनका खण्डीकरणहरू, रेखीय तथा वर्ग समीकरणहरू तथा शाब्दिक समस्याहरूसँग सम्बन्धित पक्षमा चर्चा गरिएको छ । वास्तविक जीवनसंग सम्बन्धित समस्याहरूलाई गणितीय भाषामा अनुवाद, समीकरण अथवा असमानताहरू (Inequations) सँग सम्बन्धित समस्याहरूको समाधान यस एकाइमा समावेश गरिएको छ । बीजगणितलाई खास गरी "Classical Algebra" (समीकरणको हल अथवा थाहा नभएको सङ्ख्याको मान पत्ता लगाउनेसम्बन्धी समस्याहरू) र "Abstract Algebra" or "Modern Algebra" (Groups, Rings र Fields सम्बन्धी) गरी दुई किसिमबाट हेर्ने गरिन्छ । Classical Algebra को विकास भएको ५००० वर्षभन्दा पनि बढी भइसकेको मानिन्छ भने Abstract Algebra आजभन्दा २०० वर्ष अगाडि मात्र देखा परेको मानिन्छ । त्यसैले बीज गणितको इतिहासलाई पल्टाउने हो भने Egyptian, Babylonian Algebra, Greek Geometric Algebra, Diophantine Algebra, Hindu Algebra, Arabic Algebra, सन् १५०० देखिका European Algebra र Modern algebra जस्ता विविध समय र क्षेत्रका रोचक प्रस्तुतिहरू पढ्न पाइन्छ ।

२. विषयवस्तु :

२.१ बीजगणित सिकाइको प्रारम्भ (Begining to learn algebra)

बीजगणित अङ्कगणितको सामान्यीकरण गरिएको रूप हो । यो वास्तविक सङ्ख्या पद्धति (Real number system) बाट विकास गरिएको सामन्यीकृत अङ्कगणित (Generalized arithmetic) हो । यसैले बीजगणितले वास्तविक सङ्ख्या पद्धतिमा गरिने आधारभूत क्रियाहरू जोड र गुणनसँग सम्बन्धित गुणहरूको अध्ययन गर्दछ । सङ्ख्याप्रणालीका विस्तृत अध्ययन पहिलेका एकाइहरूमा भइसकेको हुँदा यहाँ त्यसैको केही पुनरावृत्ति मात्र गरिएको छ । विभिन्न सङ्ख्या समूहहरूको सम्बन्धलाई यहाँ प्रस्तुत गरिएको छ ।



बीजगणितले यिनै विभिन्न सङ्ख्याप्रणालीका प्रकृतिहरूको अध्ययन गर्छ । चाहे हामीले अभिव्यञ्जकको कुरा गरौं, चाहे असमानता र समीकरण सबैमा कार्य समूह (Working set) परिभाषित गरेर मात्रै काम गरिन्छ । बीजगणितले भाष्य अभिव्यक्तिलाई सङ्केतहरूका माध्यमबाट अभिव्यक्त गर्छ । यसर्थ बीजगणित एउटा भाषा पनि हो जसले संसारका वस्तु एवम् घटनाहरूलाई व्यक्त गर्न र समस्याहरूको समाधानको नमूना पनि दिन्छ ।

२.२ बीजगणितीय अभिव्यञ्जक :

एउटा भनाइ लिऔं, एउटा आयताकार जमिनको परिमिति लम्बाइ र चौडाइको जोडको दुई गुणा हुन्छ । यो भनाइलाई साङ्केतीकरण गरी आधारभूत गणितीय क्रिया प्रयोग गरेर लेख्दा,

परिमिति = p, लम्बाइ = a, चौडाइ = b मान्दा,

$p = 2(a+b) = 2a+2b$ हुन्छ ।

यहाँ 2a+2b ले जे अर्थ दिन्छ, त्यो अर्थ अघिको भनाइले दिने अर्थसँग समान/एउटै छ । यो भनाइ 2a+2b जुनसुकै किसिमको आयताकार वस्तुको परिमितिका लागि सत्य हुन्छ । यो 2a+2b नै बीजगणितीय अभिव्यञ्जक हो ।

यो अभिव्यञ्जकमा p, a र b चल राशी मानिन्छन् । विभिन्न नापका आयातहरूको लागि p, a र b सबै भिन्नभिन्न हुन्छन् । p, a र b ले वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई लिन्छ र यो एकभन्दा बढी वास्तविक सङ्ख्याहरूको स्थानग्राहकका रूपमा रहेको हुन्छ । तर २ अचल हो । यसले एउटा मात्र सङ्ख्या जनाउँछ ।

एउटा मात्र सङ्ख्यात्मक मान लिने सङ्केत वा अङ्क अचल र एकभन्दा बढी सङ्ख्यात्मक मानहरू लिने सङ्केत वा अक्षरहरूलाई चल राशी भनिन्छ ।

बीजगणितीय अभिव्यञ्जक सङ्केतिक रूप हो जसमा चल, अचल, गणितीय क्रियाहरू जोड, घटाउ, गुणा र भागहरू सम्मिलित भएका हुन्छन् । साथै समूहकृत गर्ने चिन्हहरू जस्तै कोष्ठहरू ( ), { } र [ ] पनि समावेश गरिएको हुन्छ ।

२.३ अभिव्यञ्जकहरूको समता (Equality of expressions) :

समता (बराबर) को अर्थ तार्किक सर्वसमिका (Logical identity) हो । दुईओटा अभिव्यञ्जक जुनसुकै अवस्थामा पनि एउटै हो भन्ने अर्थमा मात्र (=) सङ्केत प्रयोग गरिन्छ । दुईओटा अभिव्यञ्जकलाई बराबरी सङ्केतले जोडेमा त्यो विजीय समीकरण (Algebraic equation) वा सर्वसमिका (Algebraic identity) हुन्छ । तलका दुई उदाहरण हेरौं :

i. $3x+5 = (2x+3)+(x+2)$

ii. $2x+3 = 7$

यी दुईमा फरक छ, (i) मा x को जुनसुकै वास्तविक सङ्ख्याहरू राखेमा पनि सङ्ख्यात्मक मान बराबर आउँछ, तर (ii) मा x को मान २ हुँदा मात्र बराबरी तथ्यलाई मान्य गर्छ । यस्तो किन हुन्छ ? पहिलो अर्थात् (i) को गणितीय भनाइ सर्वसमिका (Identity) हो, र (ii) को समीकरण हो । यो प्रस्तुतिपछि मात्र विद्यार्थीहरूलाई सर्वसमिका र समीकरणको परिभाषा गराउन सकिन्छ ।

२.४ समानताका गुणहरू (Properties of equality)

a, b र c तीनओटा वस्तुहरू हुन् भने

i. a = a हुन्छ, (Reflective property)

ii. यदि a = b, छ भने b = a हुन्छ (Symetric property)

iii. यदि a = b र b = c छ भने a = c हुन्छ, (Transitive property)

iv. यदि a = b, छ भने दुवैमध्ये कुनै एकलाई कुनै पनि अभिव्यञ्जकमा प्रतिस्थापन गर्न सकिन्छ र यसबाट गणितीय वाक्यको सत्यतामा कुनै फरक पर्दैन (Substitution principle)

यी माथिका नियमहरूलाई अभिव्यञ्जक र समीकरण हल गर्ने काममा प्रयोग गरिरहेका हुन्छौं। यो कुराको अनुभव विद्यार्थीहरूले काम गर्दा मात्र लिन सक्छन्। तसर्थ रहेक समस्याको समाधान गर्ने बेला कुन नियम किन प्रयोग भएको भन्ने अर्थ बुझ्नु जरुरी हुन्छ। जस्तै एउटा समस्या लिऔं,

यदि $a = 2$, र $b = 4$ छ भने अभिव्यञ्जक $4b - 3a$ को मान निकाल्नुहोस्।

यो समाधान गर्न $4b - 3a$ मा b र a को मान प्रतिस्थापन गरी उत्तर निकाल्न लगाइन्छ। तर किन यसरी गरेको भन्ने प्रश्नको उत्तर विद्यार्थीहरूले दिन सक्दैनन्। यहाँ माथिको नियम ii. र iv प्रयोग भएको छ।

२.५ वास्तविक सङ्ख्या र बीजगणितका नियमहरू (Real numbers and rules of algebra):

माथि हामीले विजीय अभिव्यञ्जकको मान निकाल्ने बारेमा छलफल गऱ्यौ। बीजगणितमा यी कुराहरूको प्रयोगले मात्र यसको उपयोगिता देखिदैन। सबैभन्दा महत्वपूर्ण सीप त अभिव्यञ्जकहरूलाई बराबरी बनाउने र समीकरण हल गर्ने कार्य हुन्। यी कार्यका लागि केही स्वयम्सिद्ध तथ्यहरू आवश्यक पर्दछन्। वास्तविक सङ्ख्याहरूका लागि केही स्वयम्सिद्ध तथ्यहरू यहाँ उल्लेख गरिन्छ। यिनै तथ्यका आधारमा "बीजगणितका खेलहरू" चल्छन्।

आधारभूत (क्षेत्र) गुणहरू :

यी गुणहरू जोड र गुणन क्रियाका लागि लागू हुन्छन् र यी गुणहरू वास्तविक सङ्ख्याप्रणालीमा जोड र गुणन क्रियामा संरक्षित हुनाले वास्तविक सङ्ख्यालाई क्षेत्र (Field) भनिन्छ। यी क्षेत्र गुणहरू (Field property) अङ्कगणितमा शुरुका कक्षाहरूदेखि नै प्रयोगमा आएका हुन्छन्। अङ्कगणित आफैमा क्षेत्र गुणहरू (Field property) का आधारमा सञ्चालित हुने गणितीय विद्या हो।

वास्तविक सङ्ख्याका आधारभूत गुणहरू :

तीन वास्तविक सङ्ख्याहरू a, b, र c छन् भने

जोडका गुणहरू :

बन्धनी गुण (Closure property)

$a+b$ ले एक अद्वितीय वास्तविक सङ्ख्या दिन्छ।

क्रमविनियम गुण (Commutative property)

$a+b = b+a$ हुन्छ।

सङ्घीय गुण (Associative property)

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$ हुन्छ।

एकात्मक गुण (Identity property)

$0 + a = a + 0 = a$ हुन्छ। यहाँ 0 जोडको एकात्मक वास्तविक सङ्ख्या हो।

विपरीत गुण (Inverse property)

कुनै वास्तविक सङ्ख्या a का लागि अर्को एउटा वास्तविक सङ्ख्या -a हुन्छ, जहाँ a + (-a) = 0 हुन्छ । अर्थात् a + (-a) = 0 हुन्छ भने a र -a एका अर्काका लागि विपरीत (inverse) सङ्ख्या हुन् ।

गुणन क्रियाका गुणहरू :

बन्धनी· गुण (Closure property)

ab ले एक अद्वितीय वास्तविक सङ्ख्या दिन्छ ।

क्रमविनिमय गुण (Commutative property)

ab = ba हुन्छ ।

सङ्घीय गुण (Associative property)

(ab)c = b(ca) हुन्छ ।

एकात्मक गुण (Identity property)

$a\times1=1\times a=a$, यहाँ 1 लाई गुणक Identity सङ्ख्या भनिन्छ ।

विपरीत गुण (Inverse property)

कुनै वास्तविक सङ्ख्या a का लागि अर्को एक सङ्ख्या $\frac{1}{a}$ हुन्छ, जहाँ $a\times\frac{1}{a}=1$ हुन्छ । यो अवस्थामा a र 1/a एकअर्काका लागि गुणक Identity सङ्ख्या हुन्छन् ।

पद विच्छेदक / वितरण गुण (Distributive property)

जोड र गुणन क्रियालाई सङ्युक्त रूपमा प्रयोग भएर बनेको गुण वास्तविक सङ्ख्या पद्धतिमा हुन्छ । यो गुणअनुसार गुणन क्रियालाई दुई वास्तविक सङ्ख्याहरूको जोडमा वितरण गरिएको हुन्छ । यहाँ, a,b,c तीनओटा वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् भने

a (b+c) = ab + ca हुन्छ ।

अथवा, (b+c) a = ab + ca हुन्छ ।

अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण क्रिया गर्दा र दुईओटा अभिव्यञ्जकहरूबीचको गुणन क्रियामा यो गुण प्रयोग गरिन्छ । साथै समीकरण वा असमानताको हल गर्ने वा अभिव्यञ्जकका सरलीकरण क्रियामा पनि यी माथि उल्लेख गरिएका गुणहरू प्रयोग गरिन्छ । यी माथिका सबै गुणहरू (जोड र गुणनक्रिया) मान्य हुने सङ्ख्या समूहमा वास्तविक सङ्ख्या पर्छ र वास्तविक सङ्ख्यालाई क्षेत्र (Field) भन्ने गरिन्छ ।

अन्य कुनकुन सङ्ख्या समूहहरूमा यी गुणहरू मान्य हुन्छन् ? के घटाउ र भाग क्रियाका लागि पनि यी गुणहरू मान्य हुन्छन् ?

क्षेत्र गुणहरूको प्रयोग

तपाईंको विद्यार्थीले सोधे, -3×-9 = -27 किन भएन ? यसको जवाफ कसरी दिनुहुन्छ ? के माथि छलफल गरिएका क्षेत्र गुणहरू यो प्रश्नको समाधान दिन उपयुक्त हुन्छन् ?

यस्ता प्रश्नहरूको समाधान गर्न धनात्मक र ऋणात्मक सङ्ख्याहरूको क्रियामा ध्यान दिनुपर्छ ।

+5 + (+3) = +8 किन ? कसरी ?

-5 + (-3) = -8 किन ? कसरी ?

+5 + (-3) = +2 किन ? कसरी ?

-5+ (+3) = -2 किन ? कसरी ?

+5 × (+3) = +15 किन ? कसरी ?

+5 × (-3) = -15 किन ? कसरी ?

-5 × (-3) = +15 किन ? कसरी ?

तलको सङ्ख्याहरूबीचको क्रियाको ढाँचा हेर्नुहोस् र खाली ठाउँ पूरा गर्नुहोस् ।

(क)

5×3 = 15
5×2 = 10
5×1 = 5
5×0 = ?
5×-1 = ?
5×-2 = ?

तपाईंसँग अग्रिम भएको धारणा + ले - लाई गुन्दा - हुन्छ भन्ने कुरालाई बिर्सेर, नतिजामा आएको सङ्ख्याको ढाँचालाई विचार गरी "?" चिन्ह भएको ठाउँमा लेख्नुहोस् ।

(ख)

-5×3 = ?
-5×2 = ?
-5×1 = ?
-5×0 = ?
-5×-1 = ?

ढाँचाबाट नै नतिजा लेख्नुहोस् । यी ढाँचाहरूमा सङ्ख्या भर्नु भएमा - × – = + किन हुन्छ भन्ने जवाफ वा - × – = - किन हुन्न भन्ने जवाफ विद्यार्थीका लागि चित्त बुझ्ने रुपमा दिन सकिन्छ

(+2).(-7)=?

माथिको दुईओटा सङ्ख्याहरूको गुणनफलमा कुन सङ्ख्या राख्ने भन्ने समस्या समाधान गर्न क्षेत्र गुणलाई प्रयोगमा ल्याउनु पर्छ । यसका लागि सर्वप्रथम a.0 = 0 लाई मान्नु पर्छ ।

(+7) + (-7) = 0 जोड क्रियामा विपरीत गुण

+2{(+7)+(-7)} = 0 बराबरी तथ्य

(+2) × (+7) + (+2) × (-7) = 0 पद विच्छेदक गुण

$14 + (+2).(-7) = 0$ प्रतिस्थापन गुण $\{(+2) \times (+7) = 14\}$

$-14 + 14 + (+2).(-7) = -14 + 0$ बराबरी तथ्य

$(+2).(-7) = -14$ किन ?

यसरी नै अरु क्रियाहरूमा पनि विचार गर्नुहोस् ।

विचार गर्नुहोस् :

$i)\ \frac{0}{a} = 0$

$ii)\ \frac{a}{0} = ?$

$iii)\ \frac{0}{0} = ?$

(दुई सङ्ख्या a र b मा a|b (a ले b लाई भाग जान्छ), यदि त्यहाँ अर्को सङ्ख्या c हुन्छ र b = a.c हुन्छ) ।

वास्तविक सङ्ख्या a ले सङ्ख्या b लाई ठ्याक्कै भाग जानुको अर्थ अर्को एउटा अद्वितीय वास्तविक सङ्ख्या c का लागि b = a.c हुन्छ । यही परिभाषाअनुसार,

$\frac{0}{a}$ को अर्थ a|0 हो र यहाँ कुनै अद्वितीय वास्तविक सङ्ख्या c खोज्नुपर्छ जहाँ 0 =a.c मान्य हुनुपर्छ । तर c को मान 0 बाहेक अन्य अवस्थामा a.c को गुणनफल 0 x'g\ सक्दैन । तसर्थ,

$\frac{0}{a} = 0$ हुन्छ ।

तर

$\frac{a}{0} = ?$

0|a, यदि a = 0.c हुन्छ । तर a.0 = 0 हुने हुँदा माथिको समानता मान्य हुँदैन । त्यसैले 0|a अनिश्चित हुन्छ ।

२.६ बहुपदीय (Polynomials) :

बीजगणितमा बहुपदीयको कुरा गर्नुअघि घाताङ्कसम्बन्धी नियमहरू र अभिव्यञ्जक बारे जान्नु जरुरी हुन्छ । बहुपदीय पनि विजीय अभिव्यञ्जकहरू नै हुन् । तलका उदाहरण हेरौं :

i. x,

ii. $3x^2$

iii. $2x-1$

iv. $3x^2+2x-5$

v. $\frac{2x-7}{3x+y}$

vi. $x^2-2\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}$

(i) देखि (iv) सम्मका उदाहरण बहुपदीय (Polynomial) हुन् तर (v) र (vi) होइनन् । सरसर्ती हेर्दा (v) र (vi) मा पनि पदहरू छन् । यसका लागि यी दुई समूहका अभिव्यञ्जकहरूले लिएका गुणहरूलाई केलाउनु पर्छ ।

(i) देखि (iv) सम्मका अभिव्यञ्जकहरूको जोड, घटाउ र गुणन क्रियाहरूले चलहरू र अचलबीचमा सम्बन्ध स्थापित गरेर बनेका छन् तर (v) र (vi) मा यीभन्दा बाहेक क्रियाहरू पनि छन् ।

यी गुणहरूका आधारमा विद्यार्थीहरूलाई बहुपदीयको परिभाषा र तिनीहरूको प्रकार छुट्याउन लगाउन सकिन्छ ।

२.७ घाताङ्क

म विद्यालयबाट घर फर्कंदै थिएँ । दुईजना विद्यार्थीहरूले मलाई भेटेर 2x र x^2 को बारेमा छलफल गर्न चाहे । गणित पढाउने सरले 2x र x^2 भनेको एउटै होइन फरक हो भन्नुभयो । यी दुई कसरी फरक भए होला ? विद्यार्थीहरूको जिज्ञासा थियो । मैले ती विद्यार्थीहरूको जिज्ञासा शान्त गर्न यसरी उदाहरण दिन थालेँ :

तिमीहरूलाई जोड, गुणन त राम्ररी आउँछ नि ?

2+2 कति हुन्छ ? 4

2×2 कति हुन्छ ? 4

यदि 2=x भए माथिको समस्यालाई यसरी लेख्नुपर्‍यो :

x+x कति हुन्छ ?

x×x कति हुन्छ ?

यसको उत्तर भन्न सक्छौ ?

उनीहरूले भने हाम्रो सर ले x+x=2x हुन्छ र $x \times x = x^2$ हुन्छ भनेर सिकाउनु त भयो तर कसरी भयो त्योचाहिँ हामीले बुझेनौं ।

ल हेर त ?

3+3 कति हुन्छ ? 6

3×3 कति हुन्छ ? 9

यदि 3 = x भए माथिको समस्यालाई यसरी लेख्नुपर्‍यो :

x+x = 2x = 2×(3) = 6 हुन्छ ?

$x \times x = x^2 = (3)^2 = 9$ हुन्छ ?

त्यस्तै,

$4+4 = 8 = 2\times(4)$

• $4\times4 = 16 = (4)^2$

केही फरक थाहा पायौ ? अलिअलि त थाहा भयो तर अझ राम्ररी बुझ्न सकिएन सर । मैले नजिकैको एउटा झाड्बाट केही मसिना हाँगा भाँचेर त्यसबाट एकै नापका ससाना सिन्काहरूको एक मुठो बनाएँ । ती सिन्काहरूको प्रयोग गरेर देखाउँदै भने - "अब फेरि हेर त" !

x + x = दुईओटा x भयो ।

x + x + x = तीनओटा x भयो ।

यो त राम्ररी नै बुझियो । अब $x\times x = x^2$ सम्बन्धी उदाहरण हेरौं न त ।

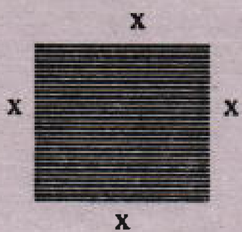
x + x = $2\times x$

x + x + x = $3\times x$

....

....

x + x + ... + x = $x\times x$



$= x^2$

ओहो ! अब भने हामीले बुझयौं । 2x भनेको 2 ओटा x हुँदोरहेछ तर x^2 भनेको चाहिँ x ओटा नै x राखेमा x^2 हुँदो रहेछ ।

एकाएक मेरो मनमा घाताङ्क (Indices) का नियमहरू सम्झनामा आए । आफूले अध्ययन गर्दा " a बराबरका m ओटा खण्डहरूको गुणन गर्दा a^m हुन्छ " भन्ने पढेको आफूलाई थाहा

छ । अब घाताङ्कसम्बन्धी नियम र तथ्यहरू जस्तै : $a^m \times a^n = a^{m+n}$ हुन्छ भन्ने कुराको धारणा विद्यार्थीहरूलाई कसरी अर्थपूर्ण रूपमा दिने यसै विषयमा म मेरा केही उदाहरण यहाँ सम्झँदैछु । जस्तै :

$a^2 = a.a$

$a^3 = a.a.a$

....

....

$a^m = a.a$........................m ओटा a हरू ।

$a^n = a.a$.......................n ओटा a हरू ।

त्यसैले, $a^m \times a^n$ = (a.a........m ओटा a हरू)× (a.a........n ओटा a हरू)

=(a.a........(m+n) ओटा a हरू)

$= a^{m+n}$

त्यसैगरी,

$a^m \times a^n \times a^b = a^{m+n} \times a^b = a^{m+n+b}$

यस्तै प्रकारका विभिन्न उदाहरणहरूको प्रयोग गरेर देखाउँदा के विद्यार्थीहरूले बुझ्दछन् त ? थप अभ्यास गराउने सन्दर्भमा प्रयोग भएका केही उदाहरणहरू निम्नअनुसार थिए :

क) $(a^m)^n = a^m.a^m.a^m$........ n ओटा

$= a^{m+m+m+ \ldots\ldots n \text{ ओटा}}$

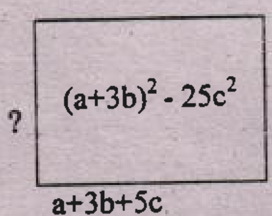
$= a^{mn}$

ख) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, किनकि $a^{m-n} \times a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$

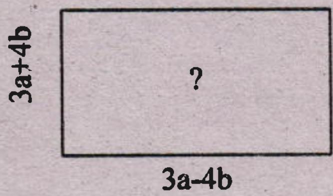
२.८ खण्डीकरण

अर्को दिन कक्षा ९ मा बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरणसम्बन्धी शिक्षण गर्नुपर्ने भएकाले मैले केही कागजका टुक्राहरूमा आयताकार आकृतिहरू कोरी विद्यार्थीहरूको पूर्व ज्ञान कति छ थाहा पाउन निम्न समस्याहरू कक्षामा प्रस्तुत गर्दै छलफल गरेँ :

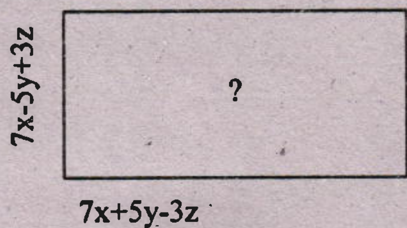
(a).



(b).



(c).



आयताकार सतहको क्षेत्रफल = लम्बाइ×चौडाइ हुन्छ भन्ने आधारमा खाली रहेका भागको उत्तर खोज्न लगाएँ केही विद्यार्थीहरूले हल गरी देखाए ।

त्यसपछि एक जना विद्यार्थीले प्रश्न गरे - सर x^2-6x-55 जस्ता वर्ग अभिव्यञ्जकका (Quadratic expression) को गुणनखण्ड निकाल्ने आधारहरू के हुन्, अलि समस्या पर्छ मलाई ! मैले भने त्यसो भए ल हेर सबैले ।

सङ्ख्यालाई टुक्रयाउने :

गुणन गर्दा	जोड्दा	घटाउँदा	कुन दुई सङ्ख्या ?
12	8	4	6 र 2
	7	1	4 र 3
	13	11	12 र 1
24	14	10	12 र 2
	10	2	6 र 4
	11	5	8 र 3

यो तालिकाबाट के थाहा पायौं ? यहाँ कुनै पनि सङ्ख्यालाई विभिन्न सर्तअनुसार टुक्रा पार्ने जस्तै : कुन दुई सङ्ख्या हुन् जसलाई गुणन गर्दा र जोड्दा .... हुन्छ ? अथवा घटाउँदा .... हुन्छ ? यसरी हेर्दा गुणनफल 12 आउने जोड गर्दा 8 आउने सङ्ख्याहरू 6 र 2 हुन् । त्यसैले प्रश्नको मागअनुसार जोड अथवा घटाउमध्ये एउटा अवस्था हुनसक्छ । जस्तै : अघि विद्यार्थी विमलाले दिएको समस्या x^2-6x-55 लाई हेरौं न । यहाँ गुणाङ्कहरूको सम्बन्ध हेर्दा गुणन गर्दा 55 र घटाउ गर्दा 6 आउने दुई सङ्ख्याहरूको खोजी गर्नु पर्दछ । ती केके

हुनसक्छन् ? ती दुई सङ्ख्याहरू अवश्य नै 11 र 5 हुन् । त्यसैले यसको खण्डीकरण गर्ने पहिलो चरण $x^2-(11-5)x-55$ अथवा $x^2-11x+5x-55$ हुन्छ । अब पदहरू जोडा अर्थात् 4 ओटा भए यी 4 पदहरू दुई समूहमा राख्ने जस्तै : $(x^2-11x)+(5x-55)$ यी प्रत्येक समूहभित्र साझा रूपमा रहेका सङ्ख्या वा चलराशीलाई बाहिर झिक्ने जस्तै : x^2-11x बाट x बाहिर झिक्दा $x(x-11)$ हुन्छ भने $5x-55$ बाट 5 बाहिर झिक्दा $5(x-11)$ हुन्छ । त्यसैले $(x^2-11x)+5(x-11)$ हुन्छ । अब हामीसँग दुई पदमात्र देखियो । यसबाट फेरि दुबैमा भएको साझा $(x-11)$ लाई झिक्दा $(x-11)(x+5)$ हुन्छ । जुन एक पदीय रूपमा आउँछ । यो नै $x^2-6x-55$ का गुणन खण्डहरू छन् ।

यति गरिसकेपछि मैले केही सङ्ख्यालाई माथिको उदाहरणमा झैं टुक्रा पारेर देखाउन लगाएँ । कक्षाको अन्तमा एकजना विद्यार्थीले उठेर प्रश्न गरे सर ! अरु त सबै राम्ररी बुझियो तर अङ्क टुक्रयाउँदा जोड गर्ने कि घटाऊ गर्ने भन्ने कुरा छुट्याउन भने अलि अलमलिनेजस्तो लाग्यो । मैले केही उदाहरण दिँदै भने यी उदाहरणहरू हेर त :

(i) $2x^2+3x-14$,

(ii) x^2-4x+4,

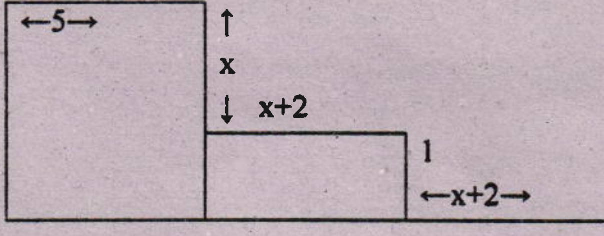
(iii) $3a^2-7a-10$

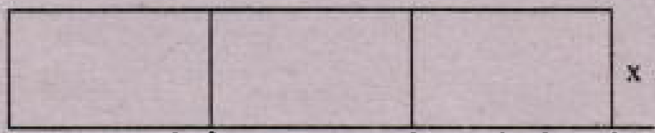
यी तीन उदाहरणहरूमा गुणन गर्दा आउनुपर्ने सङ्ख्याहरू क्रमशः 28, 4 र 30 हुन् । किन कि पहिलोमा x^2 को गुणाङ्क 2 र (14) को गुणनफल र तेस्रोमा 3 र 10 को गुणन फल ।

अब, पहिलोमा 14 को अगाडि (-) चिन्ह छ । त्यसैले घटाउँदा 3 चाहियो, दोस्रोमा 4(+ve) छ त्यसैले जोड्दा 4 चाहियो भने तेस्रोमा 10 को अगाडि (-ve) चिन्ह छ त्यसैले घटाउँदा 7 चाहियो । ल अब तिमीहरूले केही उदाहरणहरू बनाऊ र गुणन गर्दा, जोड अथवा घटाउ गर्दा कतिकति आउनुपर्छ एक आपसमा छलफल गर । विद्यार्थीहरूले आफैले निष्कर्ष निकाले कि तेस्रो पदको चिन्ह ऋणात्मक भए घटाउने र धनात्मक भए जोड्ने ।

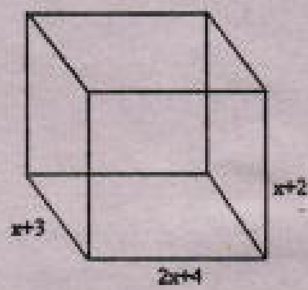
मैले विद्यार्थीहरूलाई निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गराएँ ।

(क) तलको चित्रले एउटा विद्यालयको खेल मैदानका आकृति देखाएको छ । यो आकृतिलाई तारबारले घेर्ने योजना तयार पारिँदैछ । अब यसको वरिपरि तीनपटक बेर्न कति लामो तार चाहिएला ? त्यसरी नै यस चउरको क्षेत्रफल कति छ होला ?

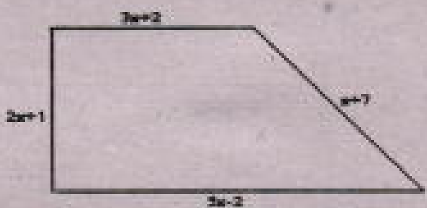




(ख) तलको चित्र एउटा चकको बट्टाको हो । यो चकको बट्टाको बाहिर सबैतिर एउटा कागजले ढाक्नु परेको छ र बट्टाभित्र चकको धुलोले टम्म भर्नुपरेको छ । अब यसका लागि आवश्यक कागजको क्षेत्रफल तथा चकको धुलोको आयतन कति होला ?



(ग) तलको आकार र नापको कागजको टुक्राको क्षेत्रफल निकाल्न के उपाय गर्नु पर्ला ?



२.९ समीकरण

अब आउने पाठहरूमा समीकरणअन्तर्गतका विषयवस्तुहरूको स्पष्ट धारणा दिन केकस्ता क्रियाकलापहरू उपयुक्त हुन्छन् भनी सोध्दै थिएँ । त्यसै बेला गोबर्धन सर टुप्लुक्क आइपुग्नुभयो । मैले पनि अवसर छोप्दै प्रश्न राखें-गोबर्धन सर मैले आउँदो सातादेखि कक्षामा विद्यार्थीहरूलाई रेखीय समीकरण (Linear equation), वर्गसमीकरण (Quadratic equation) तथा असमानता (Inequalities) सम्बन्धी पाठहरू पढाउन सुरु गर्ने मेरो योजना छ । यी पाठहरूबाट प्राप्त हुनुपर्ने धारणागत उपलब्धि एवम् सीप पक्षका उद्देश्यहरू पूरा गर्न कस्ता क्रियाकलापहरू गर्दा बेस होला ? मेरो जिज्ञासामा सहमति जनाउँदै उहाँले भन्नुभयो - ठीक छ नि अब यसै विषयमा छलफल गरौं न हुन्न ?

कक्षाको प्रारम्भमा सुरु गर्न लागिएको पाठ सम्बन्धमा विद्यार्थीहरूको पूर्व ज्ञानको आँकलन गर्न केही मौखिक प्रश्न गर्ने जस्तै :

- तलका गणितीय वाक्यहरूमा कुनकुन समीकरण हुन् ?

  $5x-8=7$,

  $4x-8$,

$3x \neq 2x-10$,

$2x+5>10$,

$5x-3=2x$,

- एक रेखीय समीकरण कुनकुन हुन् ?

$-4x+5=0$

$9x^2-81=0$

$4x^2=12-3x^3$

$5x^2+4x-10=8x^2$

आदि प्रश्नहरू गर्दै विषय प्रवेश गर्ने । यदि यसबाट समीकरणको धारणा स्पष्ट भएको नपाइएमा तराजुको प्रयोगबाट यसको धारणा प्रष्ट्याउने ।

एक चलराशीको साथ साथै दुई चल राशीयुक्त रेखीय समीकारणसम्बन्धी चर्चा गर्नु पर्ला कि ? मैले फेरि थपें यस्ता समीकरणको शिक्षणका क्रममा प्रयोग गरिएका समीकरणहरूको आधारमा सँगसँगै ग्राफको प्रयोगसमेत गर्दै जाँदा कस्तो होला ?

यसमा सिक्षक गोबर्धनले भने - यो त अझ राम्रो हुन्छ, किन कि यसबाट विद्यार्थीलाई समीकरण हलबाट प्राप्त उत्तर ठीक छ कि छैन भन्ने कुराको सङ्केत ग्राफबाट प्राप्त गर्न सकिन्छ ।

हामी छलफल गर्दै थियौं त्यही बाटो गरेर शिक्षक उर्मिला आइपुगिन् । हाम्रो छलफलको प्रसङ्ग सुनिसकेपछि त्यही पाठ पढाउने क्रममा आफ्नो अनुभव यसरी व्यक्त गरिन् -

उनीसँग $x^2-12x+32=0$ जस्ता वर्ग समीकरणहरूको हल गर्ने तरिका सम्बन्धमा छलफल भए । मचाहिँ $x^2+6x+4=0$ जस्ता वर्ग समीकरणहरूको समाधान गर्ने तरिका शिक्षण गर्न चाहन्थें । यसका लागि मैले वास्तविक जीवनसँग सम्बन्धित समस्याहरूलाई वर्ग समीकरणका हल निकाल्ने अभ्यासबाट सुरु गर्न चाहन्थे किन कि यसबाट विद्यार्थीहरूमा वर्ग समीकरणहरूको हल गर्नुको आवश्यकताको अनुभव हुन्छ भन्ने मेरो मान्यता छ ।

वर्ग पूरा गर्ने तरिकाको प्रयोगका अनुभवहरूका आधार लिएर वर्ग समीकरणको हल पत्तालगाउने सूत्रको सामान्यीकरण गर्न लगाएँ । अन्तमा सूत्रको प्रयोगबाट हिसाव गर्ने सीप (Algorithmic skill) विकासका लागि अभ्यासहरू गराएँ ।

गणितका हरेक क्षेत्रलाई सकेसम्म व्यवहारिक जीवनसँग सान्दर्भिक बनाउँदै लान सकिएमा सिकाइ अर्थपूर्ण र उपयोगी हुने कुरामा कसैको दुईमत हुँदैन । यहाँले गर्नुभएका क्रियाकलापहरू तथा वर्गसमीकरणको हलका केही उदाहरणहरूलाई ग्राफको माध्यमबाट समेत प्रस्तुत गर्ने अभ्यास गराउन पाए अझैं राम्रो हुन्थ्यो कि ? शिक्षक उर्मिलाले सहमति जनाइन् ।

आज वर्ग समीकरणहरूको शिक्षण सुरु गर्ने दिन थियो । म कक्षामा जान तयारी गर्दै थिएँ । विद्यालय निरीक्षक टुप्लुक्क आइपुग्नुभयो । मेरो कक्षाको विषयवस्तुका सम्बन्धमा जानकारी

लिई मसँगै मेरो गणित कक्षामा जाने हुनुभयो । कक्षामा मैले पाठलाई निम्न उदाहरण प्रस्तुत गर्दै सुरु गरें :

तलका समीकरणहरूमा वर्ग समीकरणहरू कुनकुन हुन् ?

- $3x^2+7x = 0$
- $2x^2-7x = 0$
- $x^3+6x^2+2x-1 = 0$
- $2x^2+\frac{1}{x^2} = 0$
- $x+ \frac{3}{x} = x^2$
- $3x^2-5x+8 = 3x^2$

विद्यार्थीहरूबाट प्रतिक्रिया बुझेपछि पहिलो र दोस्रो वर्ग समीकरण भएको कुराको छलफल गर्दै केही थप उदाहरणहरू जस्तै : $x^2 = 9$, $2x^2-3x-2=0$ का बारेमा छलफल भए ।

यहाँ, चलराशीको सबैभन्दा ठूलो घात २ भएका समीकरणलाई वर्ग समीकरण भनिने कुराको निस्कर्ष दिँदै वर्ग समीकरणको सामान्य रूप $ax^2+bx+c=0$ को परिचय गराएँ । त्यसपछि वर्ग समीकरण हल गर्ने फरकफरक तरिकाहरू निम्नअनुसार प्रस्तुत गरें :

$3x^2-8x+5=0$ को हल गर्दा :

(क) गुणनखण्ड विधिबाट :

$3x^2-8x+5=0$

or $(x-1)(3x-5)=0$

$x=1$ or $x=\frac{5}{3}$

(ख) वर्ग पूरा गरेर :

$3x^2-8x+5 = 0$

or, $3x^2-8x = -5$

or, $x^2 - \frac{8}{3}x = -\frac{5}{3}$

or, $x^2 - 2.x.\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{5}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2$

or, $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{5}{3}+\frac{16}{9} = \frac{-15+16}{9} = \frac{1}{9}$

$$x-\frac{4}{3}=\pm\frac{1}{3}$$

$$x = 1 \text{ or } x = \frac{5}{3}$$

(ग) सूत्र प्रयोग गरेर वर्ग समीकरणको हल :

यहाँ,

$ax^2+bx+c = 0$

or, $ax^2+bx = -c$

or, $4a^2x^2+4abx = -4ac$

or, $(2ax)^2+2.2a.x.b+b^2 = b^2-4ac$

or, $(2ax+b)^2 = (\pm\sqrt{b^2-4ac})^2$

or, $2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$

or, $2ax = -b \pm\sqrt{b^2-4ac}$

or, $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

यो नै वर्ग समीकरणको हल गर्ने सूत्र हो । यसको प्रयोग गरी पाठ्यपुस्तकका त्यस किसिमका अभ्यासबाट केही उदाहरणका रूपमा अभ्यास गराएँ ।

निर्मल सरले गणित पढाउँदै गरेको कक्षामा अवलोकन गर्ने अवसर पाएको थिएँ । उनले दुई लयुक्त रेखीय समीकरण शिक्षणका क्रममा निम्न प्रकारका उदाहरणहरू प्रस्तुत गर्दै हुनुहुन्थ्यो ।

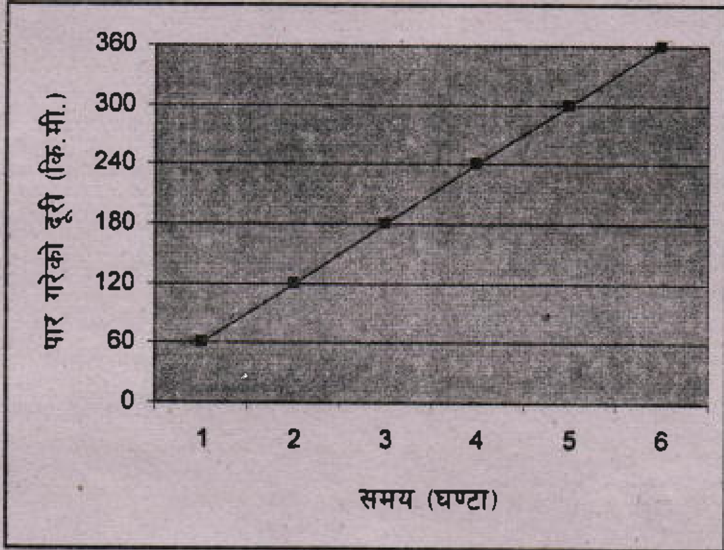
उदाहरण :

- एउटा बस 60 km/hr को समान गति (Uniform velocity) ले गुडिरहेको छ । यसका आधारमा समय-दूरी (Time-distance) ग्राफ कोर्नुहोस् साथै उक्त ग्राफबाट 3.5hrs मा पार गरेको दूरी निकाल्नुहोस् ।

  यहाँ, समय र दूरीको तालिका प्रश्नोत्तरबाट तयार पारी ग्राफ खिचेर यसरी देखाए :

x समय (घण्टामा)	1	2	3	4	5	6
y दूरी (कि.मी.मा)	60	120	180	240	300	360

यसका आधारमा ग्राफ कोर्दा :



यहाँ,

$$Speed = \frac{Distance}{Time}$$

$$60 = \frac{y}{x}$$

$$y = 60x$$

$x = 3.5$ hrs हुँदा, $y = 60 \times 3.5 = 210$ km हुन्छ ।

त्यसपछि उनले दुई चलराशीयुक्त रेखीय समीकरण प्रणालीका केही उदाहरणहरू कालोपाटीमा लेखी यसका आधारमा ग्राफ खिच्दा कस्तोकस्तो बन्छ भनी प्रश्न गर्दै विद्यार्थीहरूलाई ग्राफ खिच्न अभिप्रेरित गर्दै यसरी प्रस्तुत गरे ।

उदाहरण :

- $2x-3y=2$ र $x+2y=8$
- $3x-5y+4=0$ र $9x=15y-12$
- $2x+4y=7$ र $3x+6y=10$

यिनलाई ग्राफमा देखाई सकेपछि निम्न निस्कर्ष लेखे :

- रेखाहरू परस्परमा काटिए ।
- रेखाहरू एकै ठाउँमा मिले ।

- रेखाहरू समानान्तर (Parallel) भए ।

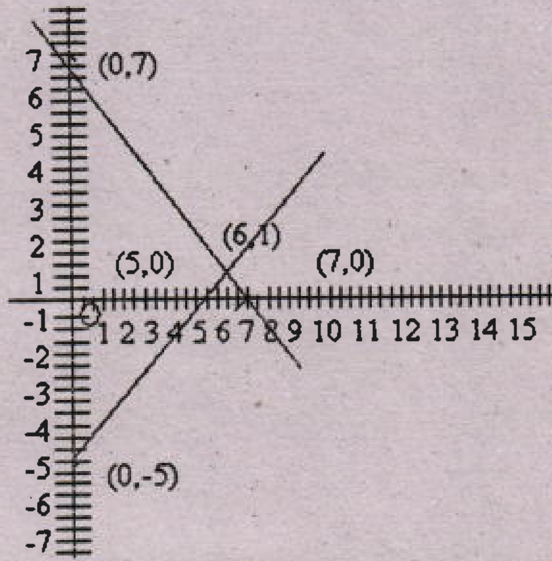
यी उदाहरणहरूका आधारमा उनले सरल रेखीय समीकरणको हल सम्बन्धमा छलफल गरी यस्तो निष्कर्ष दिए :

सरल रेखीय समीकरणको हल गर्नु भनेको x र y को त्यस्तो मान पत्ता लगाउनु हो, जसलाई समीकरणमा प्रतिस्थापन गर्दा दुवै समीकरणहरू अलगअलग रूपले सन्तुष्ट (Satisfied) वा मान्य हुन्छन् । सरल रेखीय जोडा समीकरणले दुईओटा सरल रेखाको लेखाचित्र दिन्छन् । यस्ता दुईओटा रेखाहरू प्रतिच्छेदन भएको बिन्दुको निर्देशाङ्क नै ती दुई जोडा समीकरणको साझा हल हो । यदि लेखाचित्र खिँच्दा दुईओटा सरल रेखाहरू आपसमा काटिँदैनन् भने त्यस्ता रेखाहरूको साझा हल हुँदैन । उनले यिनै उदाहरणको आधार लिई चित्र र समीकरणको सम्बन्धका बारेमा बताउँदै गए । उनले भने जोडा सरलरेखीय समीकरणको हल सिकाउँदा सुरुमा लेखा चित्रबाट सिकाउँदा यसको हलको अर्थ र भविष्यमा प्रयोगको क्षेत्र पहिचान गर्न सकिन्छ । जोडा सरल रेखीय समीकरणको लेखाचित्र खिच्ने आधारभूत सीपअर्न्तगत सरल रेखाले x र y अक्षमा काट्छ भने x र y अक्षका दुई बिन्दुहरू पत्तालगाई लेखाचित्र खिँच्न सजिलो हुन्छ । जस्तै : उनले उदाहरण दिए :

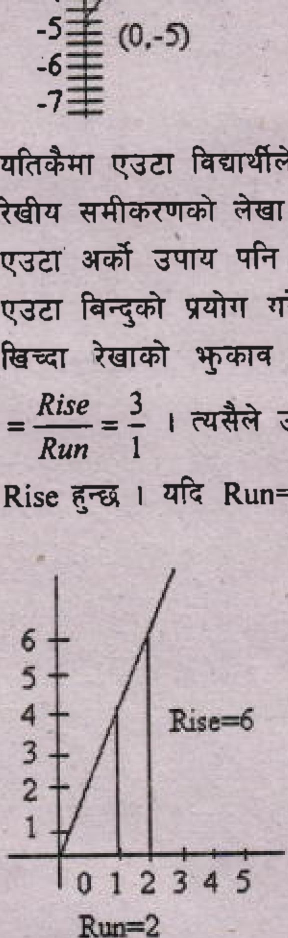
x+y=7.......................(i)

x-y=5........................(ii)

यी दुई समीकरणका आधारमा विद्यार्थीहरूलाई ग्राफ कोर्न लगाए र आफूले पनि काटेर देखाई यस प्रकार स्पष्ट गर्दै भने यी दुई समीकरणलाई लेखाचित्रमा कोर्दा, (i) मा y=0 हुँदा x=7 हुन्छ, त्यसैले (7,0), x-अक्षको एउटा बिन्दु हो । त्यसैगरी x=0 हुँदा y=7 हुन्छ । त्यसैले (0,7), y-अक्षको एउटा बिन्दु हो । अब, (7,0) र (0,7) भएर जाने रेखाको लेखाचित्र खिचिएको छ । त्यसरी नै समीकरण (ii) मा (5,0) र (0,-5) क्रमशः x र y अक्षका बिन्दुहरू छन् । त्यसैले यी दुई समीकरणको हल (6,1) सजिलैसँग लेखाचित्रबाट देखाउन र देख्न सकिन्छ । उनले खिचेको लेखाचित्र यस्तो थियो :



यतिकैमा एउटा विद्यार्थीले उनलाई प्रश्न गरे सर यो त मैले राम्ररी बुझेँ । योबाहेक सरल रेखीय समीकरणको लेखा चित्र खिच्ने अर्को उपाय पनि छ कि सर ? उनले भने छ । ल ! एउटा अर्को उपाय पनि म तिमीहरूलाई बताउँछु, उनले भने दिइएको रेखाको झुकाव र एउटा बिन्दुको प्रयोग गरेर पनि खिच्न सकिन्छ । जस्तै : समीकरण $y=3x$ को लेखाचित्र खिच्दा रेखाको झुकाव =3 हुन्छ । रेखा उद्गम बिन्दुबाट जान्छ । रेखाको झुकाव $=\frac{Rise}{Run}=\frac{3}{1}$ । त्यसैले उद्गम बिन्दुबाट एक एकाइ x अक्षमा Run हुँदा, y अक्षमा 3 एकाई Rise हुन्छ । यदि Run=4 एकाई भए Rise=12 हुन्छ । यी जानकारीबाट लेखाचित्र खिच्दा



यस्तो चित्र बन्छ, भन्दै चित्र कोरेर देखाए :

लौ आज तिमीहरूले लेखाचित्रबाट रेखीय जोडा समीकरणको हल गर्ने आधारभूत सीपहरू थाहा पायौ । अब अर्को कक्षामा म तिमीहरूलाई समीकरणको हल प्रतिस्थापन विधि

(Substitution method) र हटाउने विधि (Elimination method) तथा क्रश गुणा विधिबाट सिकाउँछु । यति भन्दै उनले आफ्नो कक्षा टुङ्ग्याए ।

२.१० असमानताहरू (Inequations)

असमानताहरूसम्बन्धी पाठहरूलाई व्यावहारिक रूपमा सिकाउने तरिकाका सम्बन्धमा छलफल गर्न म गोबर्धन सरको घरमा गएँ । उनीसँगको छलफलबाट असमानताका बारेमा धेरै कुराहरू स्पष्ट भए । यो विषयवस्तुको प्रारम्भमा हाम्रा दैनिक जीवनका प्रचलित क्रियाकलापहरूका केही उदाहरणबाट सुरु गर्दा बेस हुन्छ । जस्तै :

- उमेशले २ ओटा पाइन्ट र ३ ओटा सर्ट किन्नका लागि रु २००० लिएर बजारमा गए । उनले किन्ने एउटा पाइन्टको मोल रु x पर्छ र सर्टको रु y पर्छ भने उनको खरिदको सम्भावना स्थिति यस्तो हुन्छ :

  $2x+3y \leq 2000$

- त्यस्तै २ ओटा भेडा र २ ओटा खसीको मोल रु २०,००० भन्दा कम पर्छ भने भेडा र खसीको खरीदको अवस्थालाई यसरी देखाउन सकिन्छ :

  $2s+2g < 20,000$

  जहाँ s = भेडा र g = खसी

यिनै उदाहरणहरूलाई ग्राफमा समेत देखाएमा अझ स्पष्ट होला कि ? मैले थपें । हो, तपाईंले ठीक भन्नुभयो । यस्तै प्रकारका उदाहरणहरू विद्यार्थीहरू स्वयम्लाई बनाउन लगाउने र त्यसको गणितीय वाक्य र ग्राफसमेत खिच्न लगाउने गर्दा धारणा स्पष्ट हुन् अझ मद्दत पुग्छ जस्तो लाग्छ, उनले भने ।

२.११ समीकरणका शाब्दिक समस्या र तिनको समाधान

माथिको शीर्षकमा शिक्षण गर्ने क्रममा मैले निम्न केही उदाहरणहरू बनाएँ र सोको समाधानका लागि कक्षामा विद्यार्थीहरूसँग अन्तरक्रिया गरें ।

उदाहरण १

चार वर्षअघि मेरो छिमेकी कृष्णको नातिको उमेर उनको उमेरको $\frac{1}{13}$ गुणा थियो । चार वर्षपछि नातिको उमेर कृष्णको उमेरको $\frac{1}{6}$ गुणा हुन्छ भने अहिले कृष्ण र उनको नातिको उमेर कतिकति होला ?

उदाहरण २

दुई सङ्ख्याले बनेको एउटा सङ्ख्या छ जसमा अङ्कहरूको योगफल त्यो सङ्ख्याको $\frac{1}{7}$ गुणा हुन्छ । यदि त्यो सङ्ख्याका अङ्कहरूको स्थान उल्ट्याउने हो भने त्यो नयाँ सङ्ख्या पहिलेको भन्दा 18 अङ्कले कम हुन्छ भने त्यो सङ्ख्या कुन हो ?

उदाहरण ३

मसँग भएको केही रूपैयाँमध्ये $\frac{1}{2}$ भाग छोरीलाई दिएँ । बाँकी रकममा फेरि रु ३०० थपेर त्यसको $\frac{1}{5}$ भाग छोरालाई दिएँ । बाँकीको $\frac{1}{2}$ खर्च गर्दा अन्तमा मसँग रु ६५० बाँकी रह्यो भने सुरुमा मसँग कति रूपैया थियो ?

यी माथिका समस्याहरूको समाधान गर्न कुन गणितीय क्षेत्रको सहायता लिंदा बढी उपयुक्त हुन्छ, भन्ने प्रश्न गर्दै बीजगणित क्षेत्रका आधारमा शाब्दिक समस्यालाई गणितीय वाक्यमा लेख्न विद्यार्थीहरूलाई प्रेरित गर्दै मैले पनि साथ साथै गर्दै देखाएँ -

माथिको उदाहरणबाट :

यहाँ,

कृष्णको अहिलेको उमेर = x वर्ष र

उनको नातिको अहिलेको उमेर = y वर्ष भए, प्रश्नअनुसार,

$y-4=\frac{1}{13}(x-4)$....................(i)

$y+4=\frac{1}{6}(x+4)$....................(ii)

दोस्रो उदाहरण (२) बाट-

यहाँ,

आवश्यक सङ्ख्या =10x+y, भए प्रश्नअनुसार,

$x+y=\frac{1}{7}(10x+y)$........................(i)

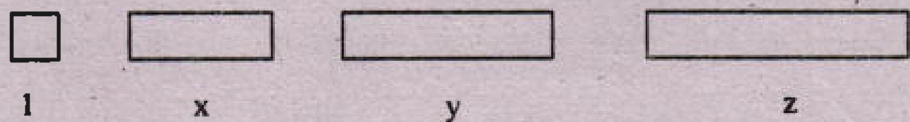
$10y+x=(10x+y)-18$...................(ii)

यस्तै प्रकारका विभिन्न उदाहरणहरू बनाई त्यसलाई गणितीय भाषामा व्यक्त गर्ने अभ्यास गराएँ र उनीहरू स्वयम्लाई पनि यस्ता शाब्दिक समस्याहरू बनाउन र त्यसलाई गणितीय वाक्यमा लेख्न प्रोत्साहित गर्दै अभ्यास गराएँ ।

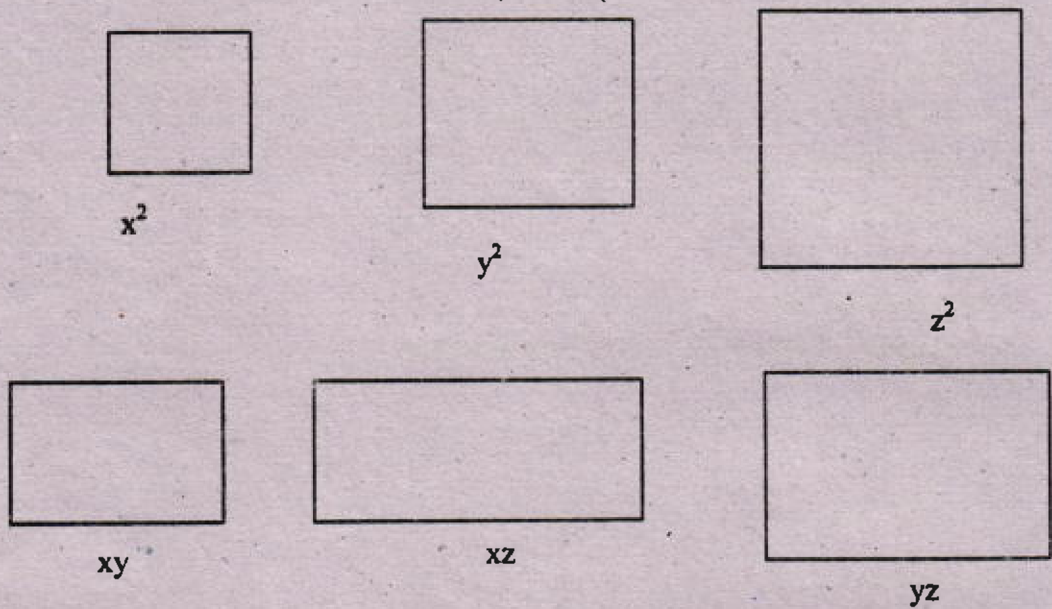
२.१२ बीजगणितीय पत्तीहरूको प्रयोगबाट बीजगणित शिक्षण

बीजगणितीय पत्तीहरू प्रयोग गरी बीजगणित शिक्षणलाई प्रभावकारी बनाउन सकिन्छ । यसका लागि कार्डबोर्ड , रुलर, पेन्सिल, साइनपेन, कैंची इत्यादि सामग्रीहरू आवश्यक पर्दछ । सर्वप्रथम कार्डबोर्ड पेपरहरूबाट निम्नबमोजिमका पत्तीहरू तयार पार्न सकिन्छ ।

(x = 2 इन्च वा सोभन्दा बढी, y = 3 इन्च वा सोभन्दा बढी, z = 4 इन्च वा सो भन्दा बढी)



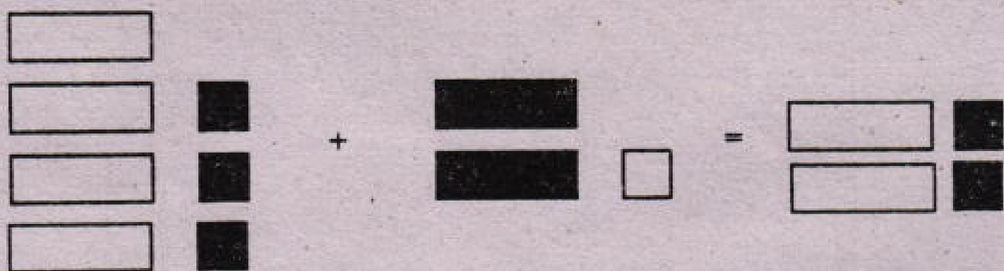
(सबै पत्तीहरूका चौडाइ १ एकाइ छन् ।)



यी पत्तीहरूलाई एकापट्टि सेतो नै छोडेर अर्कोपट्टि कालो रङ् लगाउनु पर्दछ । सेतोपट्टिका भागले धनात्मक र कालोपट्टिका भागले ऋणात्मक जनाउँछ । यी पत्तीहरू एकभन्दा बढी सङ्ख्यामा बनाउन लगाउनु पर्दछ । यी पत्तीहरूको प्रयोगसम्बन्धी उदाहरणहरू यस प्रकार छन् ।

अभिव्यन्जकहरूको जोड/घटाउ

$(4x - 3) + (-2x + 1) = ?$

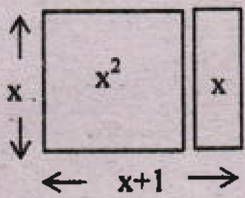


यसै गरी $(3x^2 + 2x - 1) - (2x^2 - x + 3) = ?$ जस्ता अभिव्यन्जकहरूको सरलीकरणको धारणा पनि यी बीजगणितीय पत्तीहरूको माध्यमबाट दिन सकिन्छ ।

अभिव्यन्जकहरूको गुणन

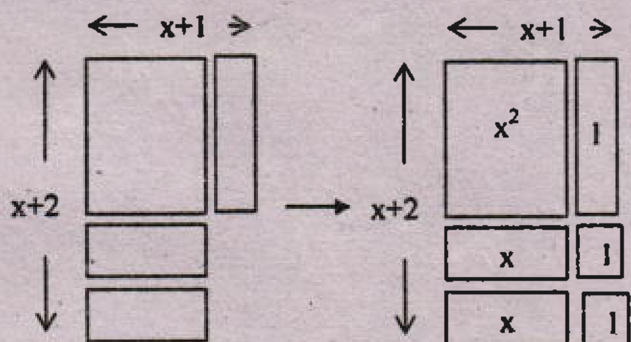
$x(x+1) = ?$

माथि निर्माण गरिएका पत्तीहरूमध्येबाट मिलाएर एउटा साइड x र अर्को साइड x + 1 भएको आयात कसरी बनाउन सकिन्छ, र आयात बनेपछि सो आयातको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? विद्यार्थीहरूलाई सोच्न/पत्तालगाउन दिनुपर्छ ।



$(x+1)(x+2) = ?$

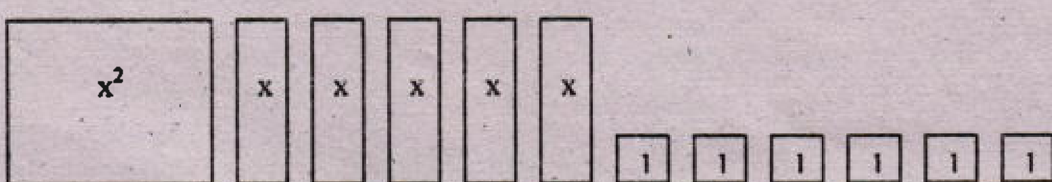
पत्तीहरू मिलाएर एउटा साइड (x + 1) र अर्को साइड (x + 2) भएको आयात बनेपछि सो आयातको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? विद्यार्थीहरूलाई सोच्न दिनुपर्छ ।

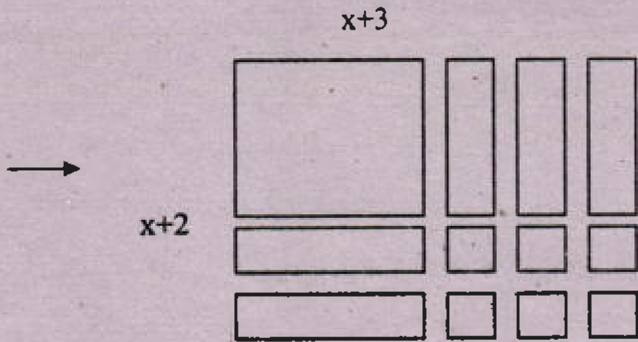


यी बीजगणितीय पत्तीहरूको सहायताबाट $(a+b)^2 = ?$, $a^2 - b^2 = ?$ $(a-b)^2 = ?$ जस्ता सूत्रहरू निकाल्ने तरिका पनि सजिलै सिकाउन सकिन्छ ।

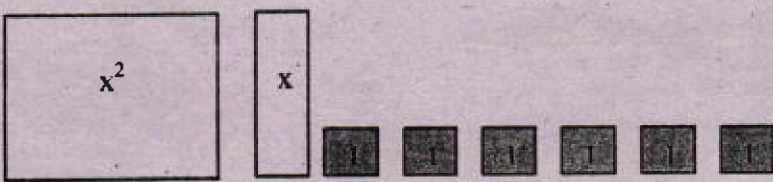
अभिव्यन्जकहरूको खण्डीकरण

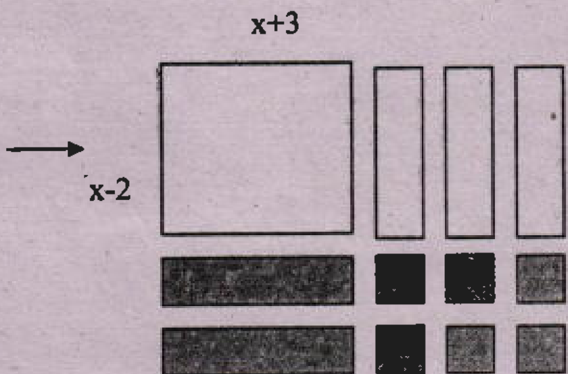
$x^2 + 5x + 6$ को खण्डीकरण



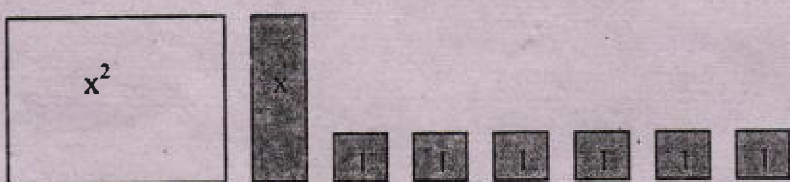


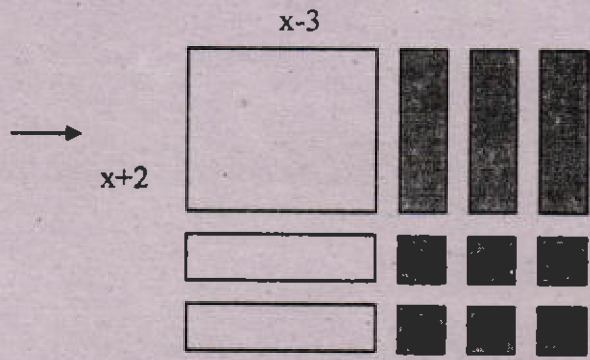
$x^2 + x - 6$ को खण्डीकरण मोडेल





$x^2 - x - 6$ को खण्डीकरण मोडेल





३. परियोजना कार्य :

- माध्यमिक तहको बीजगणित शिक्षणका लागि उपयोगी सिकाइ मोडुलहरू तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्रीहरू :

- डा. हीराबहादुर महर्जन, हरिनारायण उपाध्याय, लेखनाथ पौडेल, माध्यमिक गणित शिक्षण
- The Soundess Series, An Introduction to the History of Mathematics,
- James S. language. (An interactive approach), Teaching Mathematics in Secondary and Middle School,
- Indira Gandhi National Open University, School of Education, Teaching Algebra and Computing.

एकाइ तीन
ज्यामिति

Competency : Explain geometry as a as a system and apply geometrical ideas in everyday problem solving and the other disciplines

पाठ १ : ज्यामितिका आधारभूत धारणाहरू

१. परिचय :

मिश्रमा ६००० वर्ष पहिले नाइल नदीले बगाएर बाँकी रहेको भूभागलाई नाप्ने कार्यमा ज्यामितिको प्रयोग भएको पाइन्छ । समतल ज्यामिति र ठोस ज्यामिति दुवै नाइल उपत्यका र युफ्रेटस उपत्याकामा ४००० वर्षपहिले नै विकास भएको मानिन्छ । उनीहरूको ज्यामिति नाप, अवलोकन तथा अनुभवमा आधारित थियो । उनीहरूको ज्यामिति प्रयोगात्मक रूपमा मात्र थियो ।पछि गएर ग्रीकहरूले पनि ज्यामितिको प्रयोग प्रशस्त मात्रामा गरे । शुरुमा उनीहरूको ज्यामितिको प्रयोगको प्रकृति पनि प्रयोगात्मक नै थियो । Geometry शब्द पनि ग्रीक भाषाबाट नै आएको हो जसको अर्थ हुन्छ पृथ्वी (जमीन) को नाप । ग्रीकहरूको ज्ञानको खोजी गर्ने बानीको कारणले गर्दा ज्यामितिको रूप प्रयोगात्मकबाट क्रमशः सैध्दान्तिक हुन् पुग्यो । प्रमाणको खोजी गर्न लागियो । इशापूर्व ६०० वर्षदेखि ३०० वर्षको बीचमा ग्रीकहरूले निगमनात्मक तर्क (Deductive Reasoning) को माध्यमबाट ज्यामितिलाई शुध्द गणितको रूपमा विकास गरे । ज्यामितिको विकासमा Thales, Pythagorus, Euclid को योगदान निकै महत्वपूर्ण मानिन्छ । ज्यामितिको विकास क्रममा हिन्दुहरूको योगदान पनि महत्वपूर्ण मानिन्छ । उनीहरूको ज्यामिति विशेष गरी प्रयोग र नापमा आधारित थियो । प्राचीन शास्त्र Sulvasutra का अनुसार वेदी तथा मण्डपहरू निर्माण गर्दा ज्यामितिको प्रयोग गर्दथे (विशेष गरी पाइथागोरस साध्य तथा वृत्तसम्बन्धी साध्यहरू)। ब्रह्मगुप्त र माहावीरले त्रिभुजको क्षेत्रफल र चक्रीय चतुर्भुजको क्षेत्रफल निकाल्ने विधि पत्तालगाएका थिए । त्यसैगरी आर्यभट्टले पिरामीडको आयतनं निकाल्ने तरिका पत्तालगाएका थिए । भाष्करले पाइथागोरस साध्य प्रमाणित गर्ने नयाँ तरिका निकालेका थिए । यसरी ज्यामितिको विकास क्रमलाई हेर्दा ज्यामितीय धारणाहरू आगमनबाट विकास भई क्रमश निगमनतिर गएको पाइन्छ । त्यसैले विधालय तहको ज्यामिति शिक्षणमा पनि निगमन विधि मात्र प्रयोग नगरी आगमन विधिलाई पनि सँगसँगै लैजानु पर्ने हुन्छ । विद्यार्थीहरूका अनुभवहरूलाई ज्यामिति शिक्षणमा प्रयोग गर्नुपर्दछ । ज्यामिति शिक्षणमा वास्तविक वस्तुहरूको प्रयोगलाई बढी जोड दिनुपर्दछ । यस एकाइमा ज्यामितिका आधारभूत धारणाहरू, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्तसम्बन्धी सैध्दान्तिक, प्रयोगात्मक तथा व्याहारिक समस्याहरू समावेश गरिएका छन् ।

२. विषयवस्तु

२.१ युक्लिडीयन ज्यामिति

अलेक्जान्ड्रीया विश्वविद्यालयका प्राध्यापक युक्लिडले इशापूर्व ३०० वर्षतिर Element नामक पुस्तक मार्फत् युक्लिडीयन ज्यामितिको आधार तयार पारे । उनले त्यसभन्दा अगाडि विकास भएका ज्यामितीय धारणाहरू सबैलाई आफ्नो पुस्तकमा समेटेका थिए । उक्त पुस्तकमा समेटिएका ज्यामिति उन्नाइसौं शताब्दीसम्म पनि अकाट्य ज्यामितीय प्रणालीको रूपमा रह्यो । उनका पुस्तकमा जम्मा १३ भागहरू थिए । जसमध्ये पहिलोदेखि छैठौं भागसम्म समतलीय ज्यामिति (Plane geometry) सँग सम्बन्धित विषयवस्तुहरू थिए भने नवौंदेखि तेह्रौं भाग ठोस ज्यामिति (Solid geometry) सँग सम्बन्धित विषयवस्तुहरू थिए । युक्लिडले निगमनात्मक तार्किक प्रणाली (Deductive logical system) को विकास गरे । उनले सबै साध्यहरूलाई परिभाषा तथा स्वयम्सिध्द तथ्यहरू (Postulates) प्रयोग गरी प्रमाणित गरे । युक्लिडको समतलीय ज्यामिति र ठोस ज्यामिति अझै पनि विश्वका कैयन मुलुकका विद्यालय पाठ्यक्रममा युक्लिडीयन ज्यामितिका रूपमा रहेको पाइन्छ ।

वास्तवमा ज्यामिति भनेको हाम्रो सामान्य Space अनुभवहरूको Idealization र Systematization हो । Space Science को रूपमा ज्यामितिका दुई पक्षहरू छन्, तार्किक (Logical) पक्ष (जुन युक्लिडको Element मा पाइन्छ) र भौतिक पक्ष जुन हाम्रो वास्तविक Space अनुभवहरूको उपयोगितासँग सम्बन्धित छ । युक्लिडीएन ज्यामितिका आधारभूत धारणाहरू, विन्दु, रेखा, समतल, ज्यामितीय आकृति हाम्रो Space intution सँग आवध्द छन् । यी धारणाहरू अमूर्त भएपनि Visualize गर्न सकिन्छ र हाम्रो भौतिक Space सँग सम्बन्धित नभएका परिस्थितिको सोचाइका लागि शक्तिशाली उपाय भएको छ । केटाकटीहरूको ज्यामितीय कल्पना विकास एउटा महत्वपूर्ण पक्ष भएकाले शिक्षाविद्हरू विद्यालय पाठ्यक्रममा युक्लिडीयन ज्यामिति समावेश गर्नमा जोड दिएका छन् ।

निगमनात्मक प्रणालीमा कुनै पनि Statement अघिल्लो Statement को प्रयोगबाट निकालिन्छ (Derived) भने सो Statement बाट अर्को नयाँ Statement निकालिन्छ । कुनै तह (Stage)मा पुगेपछि वृत्तीय तर्क (Circular reasoning) को अवस्था पनि आउँछ । जस्तै p बाट q निकालिन्छ भने q बाट p निकालिन्छ । यही नै युक्लिडीएन ज्यामितिको विशेषता हो । युक्लिडले निगमनात्मक प्रमाणका लागि Definition, Postulates, Axiom (Common notion) र Theorem को प्रयोग गरेका थिए । उनले आफ्नो पुस्तक Element को भाग १ मा २३ ओटा Definitions, ५ ओटा Postulates, ५ ओटा Axioms र ४८ ओटा Propositions प्रस्तुत गरेका छन् (थप अध्ययनको लागि अनुसूची हेर्नुहोस्) । युक्लिडको ज्यामितिमा केही कमजोरीहरू रहेको कुरा उनीपछिका गणितज्ञहरूले कैयन वर्षपछि मात्र पत्तालगाए । युक्लिडले साध्य प्रमाणित गर्नको लागि प्रयोग गरेका केही Postulate र Axiom

हरू उनको पुस्तक Element मा उल्लेख गरिएको थिएन ।पछि Pasch, Peano र Hilbert ले Euclidean Geometry का Logical defects हरूलाई हटाए । David Hilbert (1862-1943) ले The Foundation of Geometry नामक पुस्तक मार्फत समतल र ठोस युक्लिडीएन ज्यामितिसँग सम्बन्धित २१ ओटा Axiom अर्थात् Postulste (युक्लिडले Axiom र postulste बीच फरक देखाएका थिए भने उनीपछिका गणितज्ञहरूले यी दुवै उही हुन् भन्ने कुरा स्वीकारेका छन्) र ६ ओटा अपरिभाषित पदावली (Undefined terms) अर्थात् Primitives प्रस्तुत गरे । Hilbert का समतलीय ज्यामितिसँग सम्बन्धित Primitives अन्तरगत विन्दु, रेखा, Incidence र Congruence पर्दछन् । युक्लिडको पाँचौं Postulate लाई प्रमाणित गर्ने २००० वर्षको व्यर्थको अथक प्रयाशको फलस्वरूप Non-Eucledean Geometry को विकास भयो । Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Bolyai, Lobachevsky जस्ता गणितज्ञहरूले युक्लिडको पाँचौं Postulate प्रमाणित गर्न सकिदैन बरु उक्त Postulate को प्रयोगविना अर्को नयाँ ज्यामितीय प्रणाली (Non-Euclidean Geometry) को विकास गर्न सकिने निष्कर्षमा पुगे ।

२.२ आधारभूत शब्दावलीहरू

विन्दु, रेखा, समतल जस्ता आधारभूत शब्दावलीहरू युक्लिडीएन ज्यामितिमा निकै प्रचलित छन् तर यी शब्दहरूको परिभाषा विवादस्पद पनि मानिन्छन् । आजभन्दा २५०० वर्षपहिले पाइथागोरिएनहरूले विन्दुलाई स्थानमा एकात्मकता (Unity in position) को रूपमा परिभाषित गरेका थिए । अहिले पनि विन्दुलाई स्थानसहितको तर परिमाणविनाको वस्तु (An object having position but no magnitude) को रूपमा परिभाषित गरेको पाइन्छ । अर्थात् A point is location in space . यी परिभाषाहरू अपूर्ण छन् किन कि गणितीय नमूना (mathematical model) निर्माणमा सूर्य, चन्द्रमा, पृथ्वीलाई पनि विन्दुको रूपमा लिइन्छ । विन्दुलाई अपरिभाषित (Undefined) शब्दका रूपमा पनि लिइन्छ । विद्यार्थीहरूलाई विन्दुको धारणा दिनका लागि विभिन्न क्रियाकलापहरू गराउन सकिन्छ । तिखो सिसाकलमले कागजमा लगाएको चिन्ह, सियोको टुप्पोले कागजमा लगाएको चिन्ह विन्दु हो । यसरी सिसाकलम र सियोको टुप्पोले लगाएको चिन्हमा आयाम हुन्छ तर विन्दुको कुनै आयाम हुँदैन । विन्दुलाई हेर्न वा छुन सकिदैन । यसलाई बुझ्न वा बुझाउनका लागि भौतिक सङ्केतको आवश्यकता पर्दछ तसर्थ सिसाकलम वा सियोको टुप्पोले दिएको आकार प्रयोग गर्दछौं । सङ्ख्या र सङ्ख्यासङ्केत जस्तै विन्दु र थोप्लाको सम्बन्ध रहेको हुन्छ । सामान्यत दुईओटा रेखाहरू काटिने ठाउँलाई विन्दु भनिन्छ ।

रेखाखण्डलाई परिभाषित गर्न पनि निकै गाह्रो छ । दुईजना विद्यार्थीहरूलाई एउटा डोरी वा धागो तन्काउन लगाएर रेखाखण्डको धारणा दिन सकिन्छ । रेखाखण्डलाई पनि देख्न वा लेख्न सकिदैन तर सजिलोसँग बुझाउनका लागि भौतिक सङ्केतको रूपमा सिसाकलमले कागजमा

कोरेको धर्कोलाई प्रयोग गर्छौं । रेखाखण्डको एउटामात्र आयाम हुन्छ । दुईओटा विन्दुहरूलाई रुलरले जोडेर आएको धर्कोलाई रेखाखण्ड भनिन्छ । रेखाखण्डलाई कतिसम्म बनाउन सकिएला भन्ने छलफलबाट रेखाको धारणा दिन सकिन्छ । यसरी रेखाको केही भाग रेखाखण्ड हो । रेखालाई दुवैतिर जति पनि बढाउन सकिन्छ भने रेखाखण्डको निश्चित नाप हुन्छ । कुनै निश्चित विन्दुहरू जोड्ने विन्दुहरूको विन्दुपथको रूपमा पनि रेखालाई परिभाषित गरिएको पाइन्छ ।

रेखालाई बक्ररेखा, सीधारेखा, टुटेको रेखा (Broken line) गरी विभिन्न किसिमले वर्गीकरण गर्न सकिन्छ । कुनै दुई निश्चित विन्दुहरू जोड्ने सबैभन्दा छोटो विन्दुपथ नै सीधा रेखा हो भने कुनै दुईओटा निश्चित विन्दुहरू जोड्ने लामो विन्दुपथ नै बक्र रेखा हो । बक्र रेखा कुनै निश्चित दिशामा जादैन । रेखाको आधा भाग किरण (Ray) हो । आँखाको हेराइ, सूर्यको प्रकाश, बत्तीको प्रकाश सबै किरणका उदाहरण हुन् । यसबाट स्पस्ट हुन्छ कि विन्दु, रेखा र समतल जटिल अर्थात् अमूर्त धारणाहरू हुन् त्यसैले यी शब्दहरूको अर्थ बुझाउनका लागि काल्पनिक ज्यामितीय आकार/चित्रहरूको प्रयोग गर्दछौं ।

२.३ साधारण मान्यताहरू (General assumptions)

ज्यामिति शिक्षणका क्रममा विद्यार्थीहरूलाई साधारण मान्यताहरूका बारेमा परिचित गराउनु आवश्यक पर्दछ । साधारण मान्यताहरू दुई प्रकारका छन् ।

- स्वयम् सिध्द तथ्यहरू (axioms)
- स्वीकृतिहरू (Postulates)

स्वयम्सिध्द तथ्यहरू

प्रमाणविना नै साधारण सोचाइले सिध्द हुने गणितीय तथ्यलाई स्वयम्सिध्द तथ्य भनिन्छ । स्वयम्सिध्द तथ्यका केही उदाहरणहरू यस प्रकार छन् ।

१. योग तथ्य (Addition axiom)

बराबर परिमाणमा अर्को कुनै बराबर परिमाण जोड्दा योग पनि बराबर हुन्छ । जस्तै, $a = b$ भए $a + c = b + c$ हुन्छ । तराजुको प्रयोगबाट विद्यार्थीहरूलाई योग तथ्यको बारेमा स्पष्ट पार्न सकिन्छ ।

२. शेषतथ्य (Subtraction axiom)

बराबर परिमाणबाट बराबर परिमाण घटाउँदा शेष परिमाणहरू पनि बराबर नै हुन्छन् । जस्तै, $a = b$ भए $a - c = b - c$ हुन्छ । तराजुको प्रयोगबाट विद्यार्थीहरूलाई योग तथ्यका बारेमा स्पष्ट पार्न सकिन्छ ।

३. गुणन तथ्य (Multiplication axiom)

बराबर परिमाणलाई बराबरले गुणन गर्दा गुणनफल पनि बराबर हुन्छन् । जस्तै, $a = b$ भए $ac = bc$ हुन्छ ।

४. भाग तथ्य (Division axiom)

बराबर परिमाणलाई बराबर परिमाणले भाग गर्दा भागफल पनि बराबर हुन्छन् । जस्तै, a = b भए a / c = b / c हुन्छ ।

५. विषम शेष तथ्य (Unequal subtraction axiom)

बराबर परिमाणबाट उस्तै किसिमका विषम परिमाणहरू घटाउँदा विपरीत क्रममा विषम शेषहरू रहन्छन् । जस्तै a = b र c > d भए a - c < b - d हुन्छ ।

६. सङ्क्रमण तथ्य (Transitive axiom)

तीन परिमाणहरूमध्ये पहिलोभन्दा दोस्रो बढी र दोस्रोभन्दा तेस्रो बढी भए पहिलोभन्दा तेस्रो झन् बढी हुन्छ । जस्तै a < b र b < c भए a < c हुन्छ ।

७. तुलना तथ्य (Comparison axiom)

एउटा परिमाण अर्को परिमाणसँग बराबर या त्योभन्दा बढी वा घटी हुन्छ ।

८. घातमूल तथ्य (Power root axiom)

बराबर परिमाणका घात अथवा मूल बराबर हुन्छन् ।

९. सिङ्गोटुक्रे तथ्य (Whole part axiom)

जुनसुकै सिङ्गो परिमाण त्यसका टुक्राहरूको योगसँग बराबर हुन्छ र हरेक टुक्राभन्दा ठूलो हुन्छ ।

१०. प्रतिस्थापन तथ्य (Substitution axiom)

कुनै परिमाणको सट्टामा त्यससँग बराबर भएको अरु कुनै परिमाणले प्रतिस्थापन गर्न सकिन्छ ।

११. बराबरी तथ्य (Equal axiom)

उही परिमाणसँग बराबर भएका परिमाणहरू बराबर हुन्छन् । जस्तै a = b र b = c भए a = c हुन्छ ।

स्वीकृतिहरू (Postulates)

प्रमाणविना नै मानिआएको ज्यामितीय मान्यतालाई स्वीकृति भनिन्छ । स्वीकृतिका केही उदाहरणहरू यस प्रकार छन् ।

१. दुई विन्दुहरूलाई एउटै मात्र सीधा रेखाले जोड्न सकिन्छ ।
२. कुनै पनि रेखाखण्डको एउटै मात्र मध्य विन्दु हुन्छ ।
३. एउटा विन्दुबाट अनगिन्ती रेखाहरू खिच्न सकिन्छ ।
४. कुनै पनि सीधा रेखालाई एकातिर वा दुवैतिर जति परसम्म पनि लम्ब्याउन सकिन्छ ।
५. एउटा विन्दुबाट कुनै पनि रेखामा एउटै मात्र लम्ब हुन्छ ।
६. कुनै कोणको अर्धक एउटा सीधारेखा मात्र हुन्छ ।

३. परियोजना कार्य

माध्यमिक तहको ज्यामिति शिक्षणमा युक्लीडियन ज्यामितिका आधारभूत धारणाहरूको उपयोगिता के कस्तो रहेको पाउनुभएको छ ? विश्लेषण गरी प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्रीहरू

- S.M. Maskey, Modern Mathmatics, Ratna Pustak Bhandar.
- R.K. Bansal, Concise Mathematics, Selina Publishers.
- Wally 'wallypop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philippines, NISMED.
- Morgan Ward et.al, Modern Elementary Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- Paw J. Kelly et. al, Geometry, Eurasia Publishing House (P) Ltd.

पाठ २ : बहुभुजहरू (Polygons)

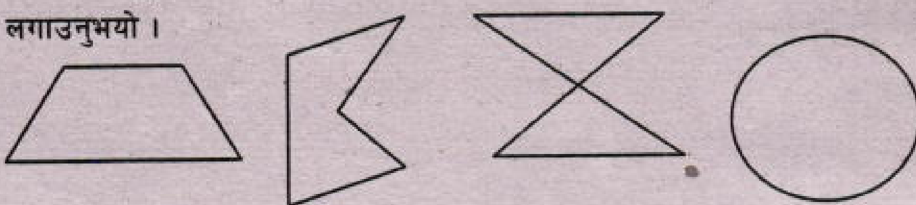
१. परिचय

ज्यामितीय आकृतिहरूको शिक्षणमा बहुभुजहरूको धारणा महत्वपूर्ण मानिन्छ । त्रिभुज, चतुर्भुज, तथा अन्य बहुभुजहरूको धारणा दिनका लागि दैनिक जीवनमा प्रयोगमा ल्याइने विभिन्न ठोसवस्तुहरूका सतहहरू पनि प्रयोगमा ल्याउन सकिन्छ । यस पाठमा कागज पट्याएर केही नियमित बहुभुजहरूको निर्माण, बाहिरी तथा भित्रीकोणहरूको नापका बारेमा चर्चा गर्ने प्रयाश गरिएको छ ।

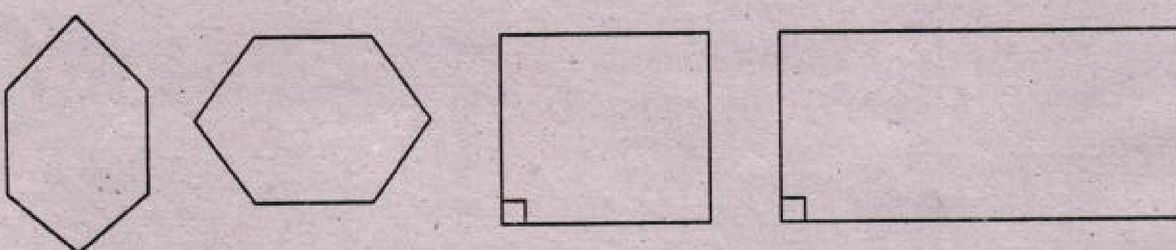
२. विषयवस्तु

२.१ बहुभुजहरूको धारणा

शिक्षक बासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई केही चित्रहरू दिई बहुभुज हो कि होइन छुट्ट्याउन लगाउनुभयो ।



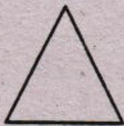
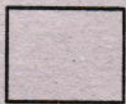
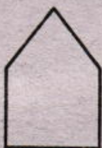
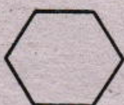
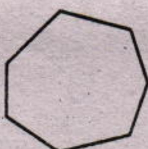
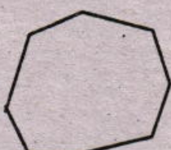
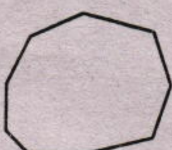
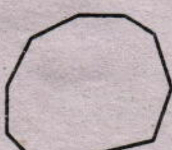
उहाँले विद्यार्थीहरूसँग बहुभुजको परिभाषा सम्बन्धमा छलफल गर्नुभयो । तीन वा तीनभन्दा बढी भुजाले बनेको सरल ज्यामितीय बन्द आकृति नै बहुभुज हो । बहुभुजमा भुजाको लम्बाइ र कोणहरू सबै बराबर छन् भने त्यस्तो बहुभुज नियमित बहुभुज (Regular polygon) हो । तलका चित्रहरू दिएर कुनै नियमित बहुभुज हुन् भनी छुट्टयाउन दिनुभयो ।

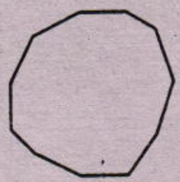


(क) (ख) (ग) (घ)

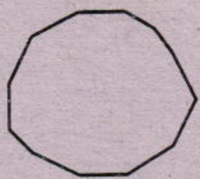
बहुभुज नियमित हुन् कोणमात्र बराबर भएर पुग्दैंन । त्यसैगरी भुजा मात्र बराबर भएर पनि हुँदैन । चित्र (क) मा भुजा बराबर छन् । चित्र (घ) मा कोण बराबर छन् । तर यी दुवै नियमित बहुभुज होइनन् ।

• शिक्षक बासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई विभिन्न बहुभुजहरू खिच्न लगाउनुभयो ।

बहुभुज	भुजाको सङ्ख्या	बहुभुजको नाम
	३	त्रिभुज
	४	चतुर्भुज
	५	पञ्चभुज
	६	षष्टभुज
	७	सप्तभुज
	८	अष्टभुज
	९	नवभुज
	१०	दशभुज



११ एकादशभुज



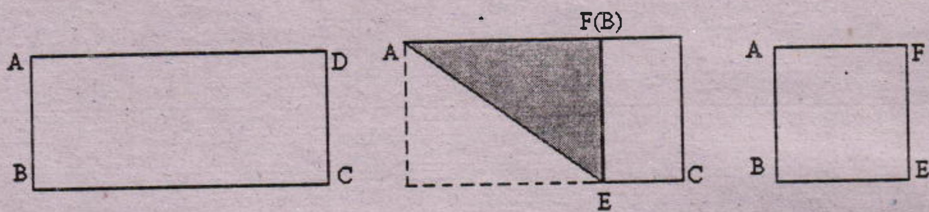
१२ द्वादशभुज

२.२ कागज पट्याएर बहुभुजहरूको निर्माण

शिक्षक बासुदेवले कागज पट्टयाएर त्रिभुज, वर्ग, पञ्चभुज, षष्टभुज, अष्टभुज, निर्माण गर्न सिकाउनुभयो ।

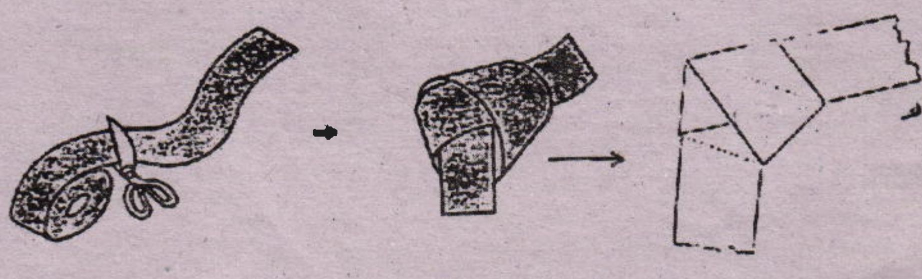
वर्गको निर्माण :

एउटा आयताकार कागजको टुक्रालाई चित्रमा देखाए जस्तै गरी पट्याउने ।



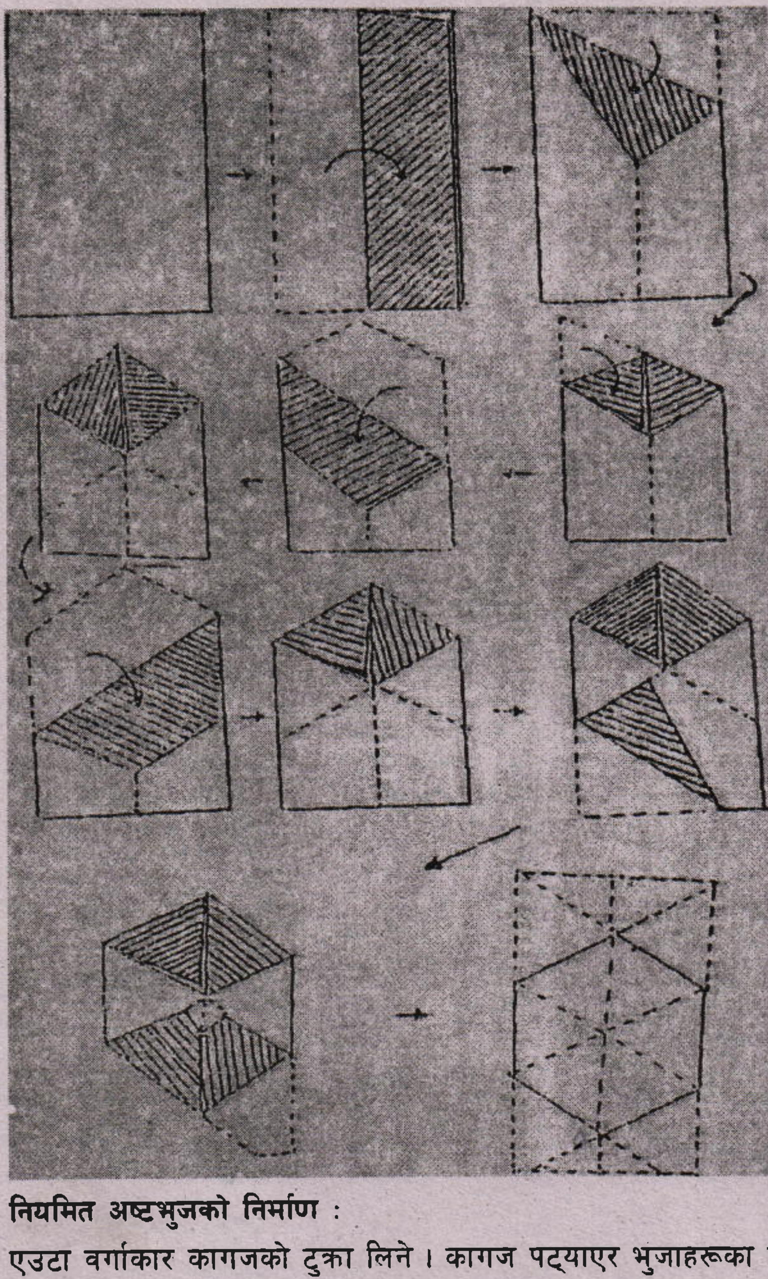
नियमित पञ्चभुजको निर्माण :

एउटा लामो आयताकार कागजको टुक्रा लिने चित्रमा देखाइएअनुसार गाँठो पार्ने । गाँठोलाई कसेर बढी भएको कागजको टुक्रालाई काटेर फालेपछि पञ्चभुज आकृति बन्दछ ।



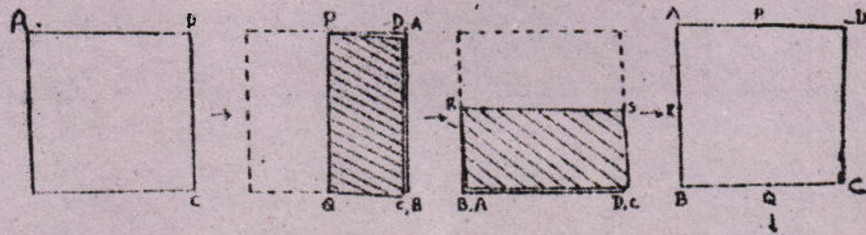
नियमित षष्टभुजको निर्माण :

एउटा आयताकार कागजको टुक्रा लिएर चित्रमा देखाइएअनुसार पट्याउँदै जाने । यसलाई खोलेर हेर्दा बीचमा नियमित षष्टभुज बन्दछ ।

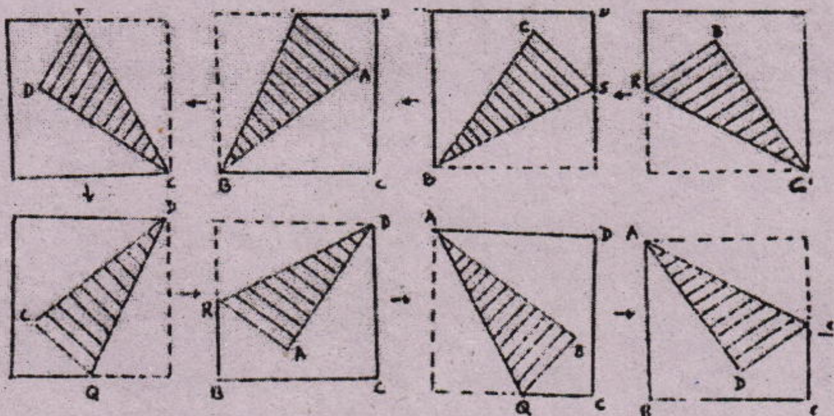


नियमित अष्टभुजको निर्माण :

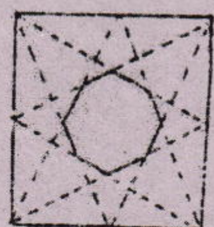
एउटा वर्गाकार कागजको टुक्रा लिने । कागज पट्याएर भुजाहरूका मध्यबिन्दु पत्ता लगाउने ।



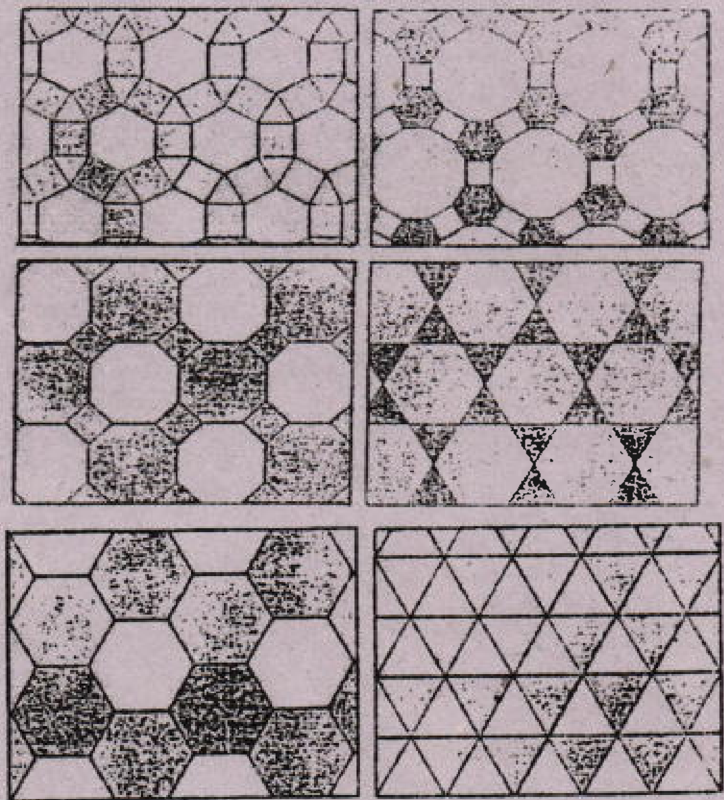
अब, PB, PC, AQ, DQ, DR, CR, BS, AS मा पट्याउँदै जाने ।



यसरी पट्याइसकेपछि पट्याएको भागले कागजमा बनाएको रेखाहरूले तल चित्रमा देखाइए जस्तै अष्टभुज बन्दछ ।



बहुभुजहरूको प्रयोगबाट विभिन्न ढाँचाहरू (Patterns) निर्माण गरी सजाउन पनि सकिन्छ ।



२.३ नियमित बहुभुजका भित्री तथा बाहिरीकोणहरूको नाप

शिक्षक बासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई बहुभुजका भित्रीकोण नापेर योगफल निकाल्न लगाउनुभयो ।

बहुभुज	भित्रीकोणको योगफल
त्रिभुज	180°
चतुर्भुज	360°
पञ्चभुज	540°
....	....
....	....
द्वादशभुज	1800°

तालिकाबाट प्राप्त नतिजा विद्यार्थीहरूलाई विश्लेषण गर्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीहरूले एउटा ढाँचा पत्ता लगाएर बहुभुजका भित्रीकोणको योगफल सबै 180° का अपवर्त्य (Multiple)छन् ।

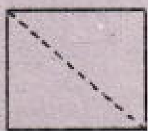
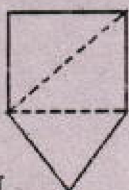
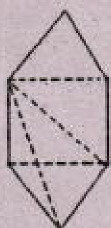
बहुभुज	भित्रीकोणको योगफल
त्रिभुज	1×180°
चतुर्भुज	2×360°
पञ्चभुज	3×540°

....

....

द्वादशभुज 10×1800°

बासुदेव सरले बहुभुजहरूमा विकर्ण त्रिभुजहरूको सङ्ख्या र विकर्ण सङ्ख्या पत्ता लगाउन दिनुभयो ।

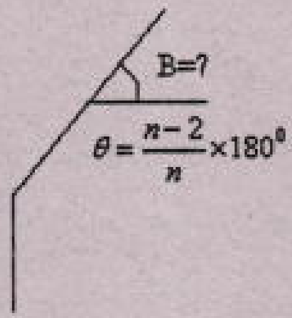
बहुभज	विकर्णको सङ्ख्या	त्रिभुज सङ्ख्या	भित्रीकोणको योगफल
त्रिभुज	0	1	180°
चतुर्भुज 	1	2	2×180°=360°
पञ्चभुज 	2	3	3×180°=540°
षष्टभुज 	3	4	4×180°=720°
....			
....			
द्वादशभुज	9	10	10×180°=1800°
n भुज	n-3	n-2	(n-2)180°

यसरी विद्यार्थीहरूले n भुजको भित्रीकोणहरूको योगफल निकाल्ने सूत्र पत्ता लगाए ।

n भुजको भित्रीकोणको योगफल =(n-2)180°

यदि n भुज नियमित बहुभुज हो भने सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् । त्यसैले नियमित बहुभुजको भित्रीकोण $\theta = \frac{n-2}{n} \times 180^0$ हुन्छ ।

शिक्षक बासुदेवले एउटा नियमित बहुभुजको कुनै एउटा भुजाबाहिर लम्ब्याउन लगाउनुभयो । यसरी लम्ब्याउँदा बनेको बाहिरीकोणको नाप कति हुन्छ ? सोध्नु भयो ।



यहाँ,

θ+B=180°

B $=180^0-\theta$

$=180^0-\theta$

$= 180^0 - \frac{n-2}{n} \times 180^0$

$= \frac{360^0}{n}$

त्यसैले नियमित बहुभुजको बाहिरीकोण $\frac{360^0}{n}$ हुन्छ ।

उदाहरण १

यदि एउटा बहुभुजको भित्रीकोणहरूको योगफल 1620^0 छ भने त्यो बहुभुजका भुजाहरूको सङ्ख्या कति हुन्छ ?

यहाँ,

मानौं बहुभुजको भुजाहरूको सङ्ख्या n छ ।

$(n-2)\,180^0 = 1620^0$

$\therefore n = 11$

उदाहरण २

यदि एउटा नियमित बहुभुजको भित्रीकोण 135^0 छ भने त्यो बहुभुजको भुजाहरूको सङ्ख्या कति हुन्छ ?

यहाँ,

बहुभुजको भित्रीकोण = 135^0

बहुभुजको बाहिरीकोण = $180^0 - 135^0 = 45^0$

बहुभुजको भुजको सङ्ख्या = $\frac{360^0}{45^0} = 8$

३. परियोजना कार्य

बहुभुज शिक्षणका लागि एउटा सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्रीहरू

- डा. हिराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण, भूँडी पुराण प्रकाशन ।
- S.M. Maskey, Modern Mathmatics, Ratna Pustak Bhandar.
- R.K. Bansal, Concise Mathematics, Selina Publishers.
- माध्यमिक शिक्षा विकास केन्द्र , गणित प्रशिक्षक निर्देशिकाहरू (मा.वि, नि.मा.वि),
- SEDP, Four Week Inservice Teacher Training Package (Lower Secondary and Secondary)
- शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र, गणित शिक्षण प्रशिक्षक निर्देशिका
- Wally 'wallypop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philippines, NISMED.
- IGNOU, Teaching of Mathematics,
- Morgan Ward et.al, Modern Elementary Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- Paw J. Kelly et. al, Geometry, Eurasia Publishing House (P) Ltd.

१. परिचय

ज्यामिति शिक्षणमा त्रिभुजहरूको धारणा निकै महत्वपूर्ण मानिन्छ । दैनिक जीवनका समस्या समाधान लगायत गणितका विभिन्न क्षेत्रमा त्रिभुज र त्रिभुजका गुणहरूको प्रयोग प्राचीन समय देखि हुँदैआएको पाइन्छ । माध्यमिक तथा निम्नमाध्यमिक तहको गणित पाठ्यक्रममा पनि त्रिभुज समावेश गरिएको छ । यस पाठमा त्रिभुजको वर्गीकरण, त्रिभुजका गुणहरू र तिनको परीक्षण, त्रिभुजको परिमिति र क्षेत्रफल सम्बन्धमा चर्चा गरिएको छ ।

२. विषयवस्तु

२.१ त्रिभुजको वर्गीकरण

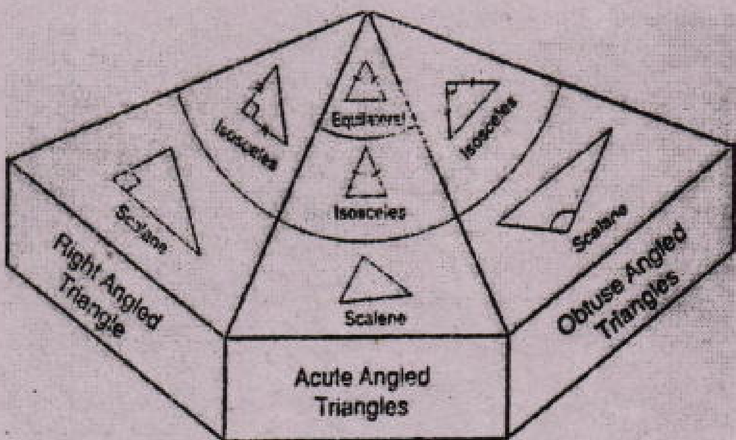
शिक्षक बासुदेव त्रिभुजसम्बन्धी पाठ शिक्षण गर्दैहुनुहुन्छ । त्रिभुजको परिभाषा, भुजा, कोण, शीर्षविन्दु, बाह्यकोणको बारेमा छलफल भए । उहाँले विद्यार्थीहरूलाई समूह विभाजन गर्नुभयो । भुजा तथा कोण्को नाप फरक फरक भएका त्रिभुजाकार कागजका टुक्राहरू निर्माण गर्न लगाउनुभयो । भुजा तथा कोणका आधारमा त्रिभुजको नामाकरण गरी वर्गीकरण गर्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीहरूले निम्नअनुसार वर्गीकरण गरे ।

भुजाका आधारमा

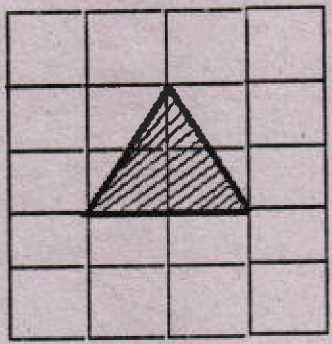
समबाहु त्रिभुज
समद्विबाहु त्रिभुज
विषमबाहु त्रिभुज

कोणका आधारमा

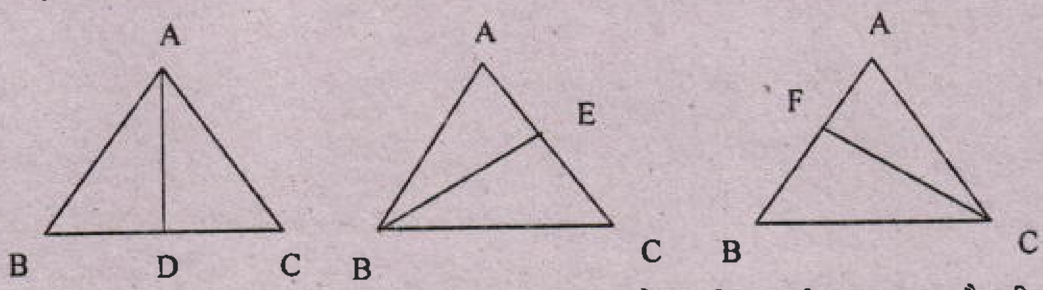
समकोणी त्रिभुज
न्युनकोणी त्रिभुज
अधिककोणी त्रिभुज



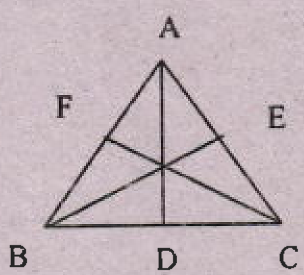
विद्यार्थीहरूले जियोवोर्ड प्रयोग गरी विभिन्न किसिमका त्रिभुजहरू प्रदर्शन गरे ।



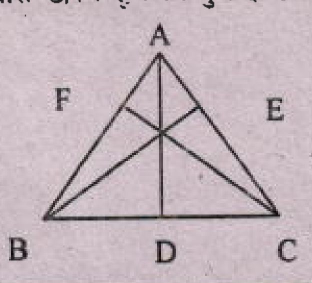
मध्यिका (Median) र उचाइ (Altitude) का बारेमा छलफल भए । कुनै भुजाको मध्यविन्दु र सो भुजाको विपरीत शीर्षविन्दु जोड्ने रेखा नै मध्यिका हो ।



जुनसुकै त्रिभुजमा तिनओटा मध्यिकाहरू हुन्छन् र ती सबै समविन्दुगामी हुन्छन् । कुनै पनि त्रिभुजका मध्यिकाहरू प्रतिच्छेदन हुने विन्दुलाई Centroid भनिन्छ । Centroid ले मध्यिकाहरूलाई सधैं 2:1 को अनुपातमा विभाजन गर्दछ ।



त्रिभुजमा कुनै शीर्षविन्दुबाट त्यसको विपरीत भुजामा खिचिएको लम्वको दूरी नै उचाइ हो । जुनसुकै त्रिभुजमा तिनओटा उचाइहरू हुन्छन् र ती सबै समविन्दुगामी हुन्छन् । कुनै पनि त्रिभुजका उचाइहरू प्रतिच्छेदन हुने विन्दुलाई Orthocentre भनिन्छ ।



२.२ त्रिभुजका गुणहरू

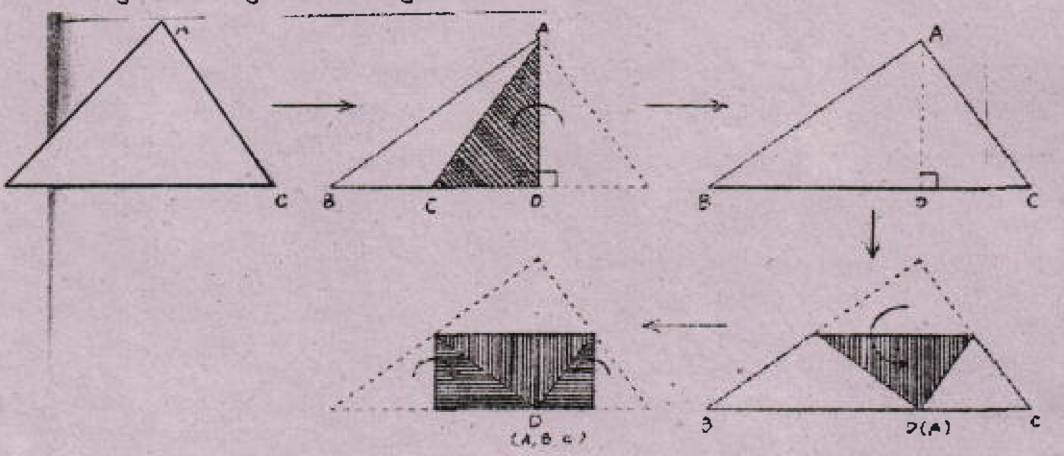
- त्रिभुजका भित्रीकोणहरूको योग दुईसमकोण हुन्छ ।
- त्रिभुजको एउटा भुजा लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरीकोण त्यससँग अनासन्न दुईओटा भित्रीकोणहरूको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।
- त्रिभुजको कुनै दुईओटा भुजाको योगफल तेस्रो भुजाभन्दा बढी हुन्छ ।
- त्रिभुजको ठूलो कोणको सम्मुख भुजा सानो कोणको सम्मुख भुजाभन्दा लामो हुन्छ ।
- समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
- समबाहु त्रिभुजका सबै कोणहरू 60° हुन्छन् ।

२.३ त्रिभुजका केही गुणहरूको परीक्षण

शिक्षक बासुदेवले कागज पट्याएर त्रिभुजका गुणहरू परीक्षण गर्न लगाउनुभयो । आफूले पनि गरेर देखाउनुभयो ।

१. त्रिभुजका भित्रीकोणहरूको जोड दुई समकोण हुन्छ ।

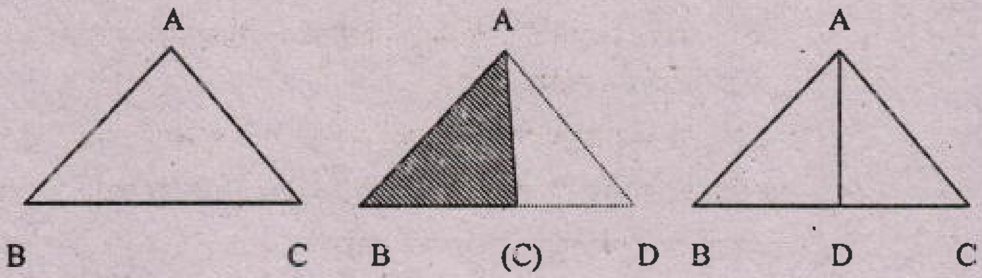
त्रिभुज ABC काटेर निकाल्ने र चित्रमा देखाइएअनुसार पट्याउँदै जाने । अन्त्यमा त्रिभुजका तीनओटै कोणहरू एउटै सीधा रेखामा मिल्दछन् । यसबाट त्रिभुजका भित्रीकोणहरूको जोड दुई समकोण हुन्छ भन्ने कुरा प्रमाणित हुन्छ ।



त्रिभुजका कोणहरू काटेर निकालेर पनि भित्रीकोणहरूको जोड दुई समकोण हुन्छ भन्ने कुरा देखाउन सकिन्छ । यसका लागि त्रिभुजका तीनओटै कोणहरू काटेर निकाल्ने र एउटा सीधारेखामा मिलाउने ।

२. समद्विबाहु त्रिभुजका गुणहरूको परीक्षण

दुईओटा भुजाहरू बराबर भएका त्रिभुजाकार कागजका टुक्रा लिएर चित्रमा देखाइएअनुसार पट्याउँदै जाने ।



अवलोकन

भुजा AB = AC भएको समद्विबाहु त्रिभुजलाई विन्दु B र C एकै ठाउँमा पर्ने गरी पट्याउदा $AD \perp BC$ हुन्छ ।

$A \rightarrow A$, $C \rightarrow B$ बाट $AC \rightarrow AB$

$A \rightarrow A$, $D \rightarrow D$ बाट $AD \rightarrow AD$

त्यसैले, $\angle BAD = \angle CAD$

फेरि $B \rightarrow AC$, $AB \rightarrow AC$ र $BD \rightarrow DC$

त्यसैले, $\angle ABD = \angle ACD$

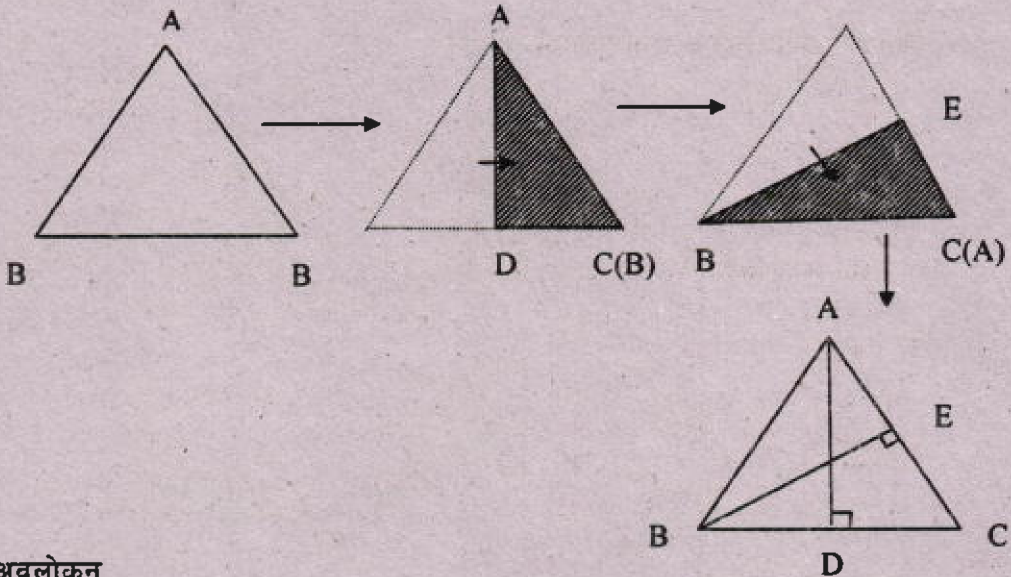
$\angle ABC = \angle ACD$

निश्कर्ष

- समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षविन्दुबाट आधारमा खिचेको लम्वले शीर्षकोणलाई आधा गर्छ ।
- समद्विबाहु त्रिभुजको बराबर भुजाले आधार रेखासँग बनाएका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

३. समबाहु त्रिभुजका गुणहरूको परीक्षण

एउटा समबाहु त्रिभुजकार कागजको टुक्रा लिने र चित्रमा देखाइएअनुसार पट्याउँदै जाने ।

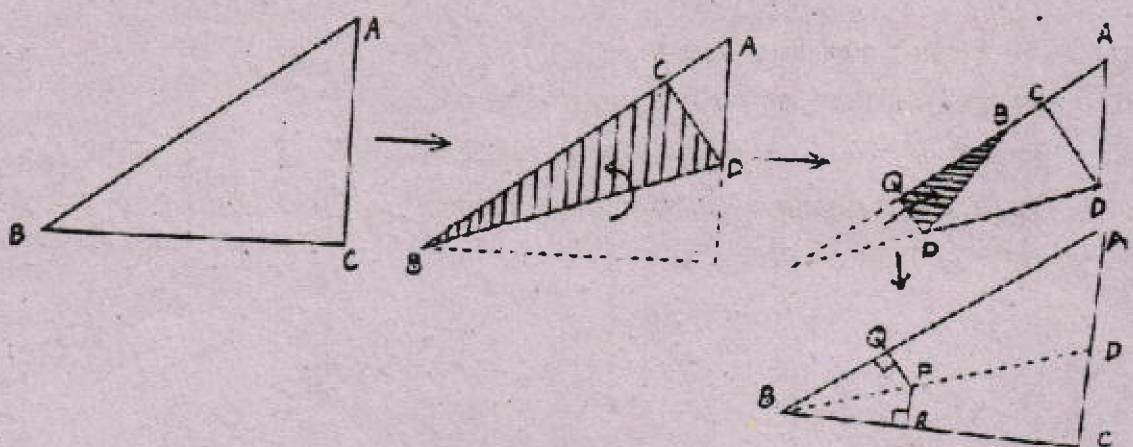


अवलोकन

भुजाहरू AB = BC= CA भएको त्रिभुजको शीर्षविन्दु B लाई C मा पर्ने गरी पट्याउँदा AD ⊥ BC र A लाई C मा पर्ने गरी पट्याउदा BE ⊥ AC हुन्छ । Δ ABC लाई AD मा पट्याउदा A →A , B →C AC →AB , ∠ABC = ∠ ACB हुन्छ । त्यसैगरी Δ ABC लाई BE मा पट्याउदा A →C , AB →BC ∠BAC = ∠ BCA हुन्छ । A लाई B मा पर्ने गरी पट्याएर ∠ABC = ∠ BACA देखाउन सकिन्छ ।

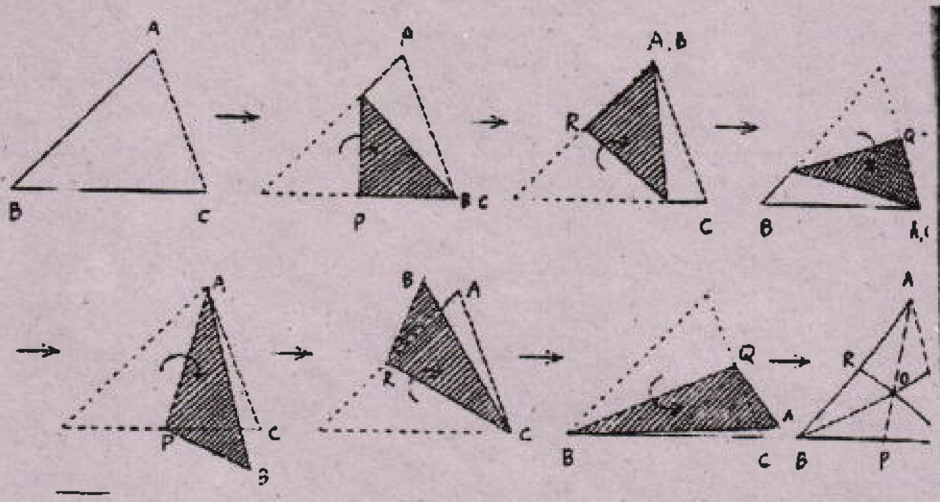
निष्कर्ष

समबाहु त्रिभुजका सबैकोणहरू बराबर हुन्छन् ।

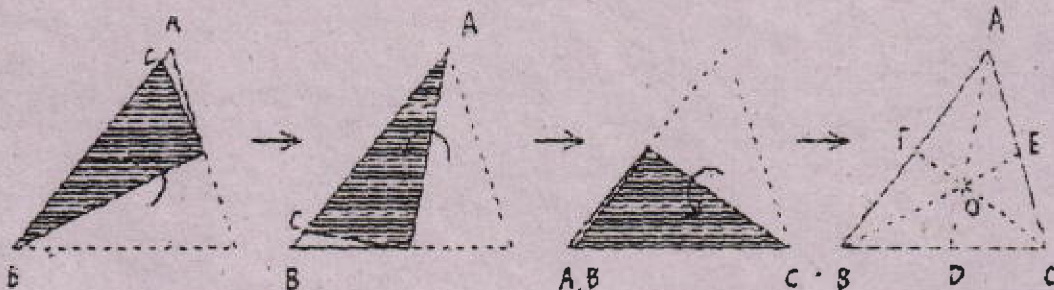


४. त्रिभुजका कोणका अर्धकमा परेका प्रत्येक विन्दु कोणका भुजाबाट समदूरीमा पर्दछन् ।

५. त्रिभुजका मध्यिकाहरू समविन्दुगामी हुन्छन् ।



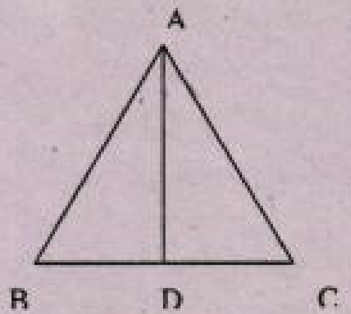
६.कोणका अर्धकहरू समविन्दुगामी हुन्छन् ।

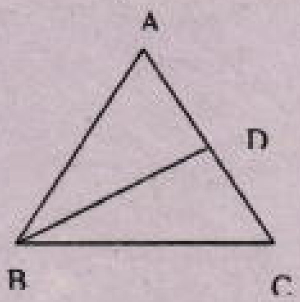


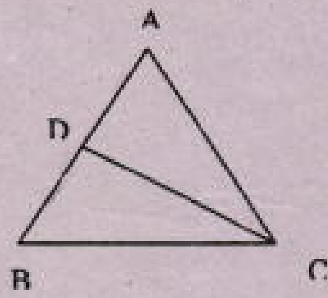
२.५ त्रिभुजको परिमिति र क्षेत्रफल

त्रिभुजको परिमिति र क्षेत्रफल सम्बन्धमा पनि छलफल भए ।

त्रिभुजको क्षेत्रफल = 1/2 आधार × उचाइ हुन्छ । यहाँ उचाइ भन्नाले विपरीत शीर्षविन्दुबाट आधार सम्मको लम्बको दुरी भन्ने बुझिन्छ । त्रिभुजमा जुनसुकै भुजालाई पनि आधार मानेर क्षेत्रफल निकाल्न सकिन्छ ।







यदि एउटा त्रिभुजका भुजाहरू a, b, c छन् भने सो त्रिभुजको

परिमिति $= a + b + c$

क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$ हुन्छ ।

यदि त्रिभुज समबाहु त्रिभुज छ र एउटा भुजा a छ भने

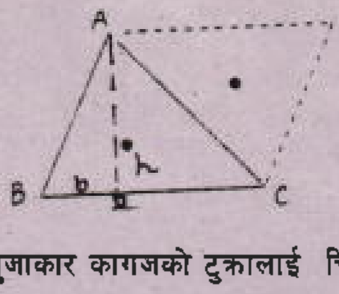
परिमिति $= 3a$ र

क्षेत्रफल $= (\sqrt{3}/4)\, a^2$ हुन्छ

शिक्षक वासुदेवले कागज काटेर / पट्याएर त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सुत्र प्रमाणित गराउनुभयो ।

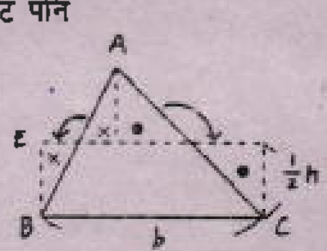
त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र दुई तरिकाबाट प्रमाणित गर्न सकिन्छ । दायाँको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुजलाई विकर्णमा काटेर बराबर त्रिभुज बनाइएको छ ।

ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, b \times h$



त्रिभुजाकार कागजको टुक्रालाई चित्रमा देखाइएअनुसार काटेर आयातमा परिणत गरी त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र प्रमाणित गर्न सकिन्छ । यसबाट पनि

ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, b \times h$ हुन्छ भन्ने कुरा प्रमाणित हुन्छ ।



शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई त्रिभुजका क्षेत्रफलसम्बन्धी विभिन्न खालका समस्याहरू हल गर्न लगाउनुभयो ।

१. भुजाहरू 17 cm, 8cm र 15 cm भएको त्रिभुजको सबभन्दा लामो भुजामा खिचिएको उचाइ पत्तालगाउनुहोस् । (7.06 cm)

२. परिमिति 15 cm भएको समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? (10.825 sq cm)

३. उचाइ 20 cm भएको समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? (230.9 sq cm)

४. भुजा 5 cm र आधार 6 cm भएको समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्तालगाउनुहोस् । (12 sq cm)

५. एउटा समकोण त्रिभुजका समकोण बनाउने भुजाहरू 5x cm र 3x (1 cm छन् । सो त्रिभुजको क्षेत्रफल 60 cm^2 छ भने ती भुजाहरूको लम्बाइ पत्तालगाउनुहोस् । (15 cm र 8 cm)

३. परियोजन कार्य :

क) त्रिभुज पाठ शिक्षणको लागि एउटा शिक्षण मोडुल तयार पारी आफ्नो विद्यालयमा परीक्षण गर्नुहोस् ख) विद्यार्थीहरूलाई कागज पट्याएर त्रिभुजका गुणहरू परीक्षण गर्न लगाउनुहोस् । यसबाट विद्यार्थीहरूको सिकाइमा परेको प्रभाव बारेमा उल्लेखगरी प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- डा. हिराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण, भूँडी पुराण प्रकाशन ।
- माध्यमिक शिक्षा विकास केन्द्र , गणित प्रशिक्षक निर्देशिकाहरू (मा.वि, नि.मा.वि),
- SEDP, Four Week Inservice Teacher Training Package (Lower secondary and Secondary)
- शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र, गणित शिक्षण प्रशिक्षक निर्देशिका

पाठ ४ : त्रिभुजको समरूपता (Similarity) र अनुरूपता (Congruency)

१. परिचय

साधारणतया हामीले घरको छानोमा झिङ्गटीले छाएको देख्छौं । ती झिङ्गटीको आकार उत्रै र उस्तै देखेका छौं । ती आकारहरू अनुरूप आकारहरू हुन् । टेसिलेसन, घरको झ्यालका बुट्टाहरू हुन्छ भने स्टुडियोमा राखिएको एकै जना मानिसको उही र फरकफरक साइजका फोटोहरूचाहिँ अनुरूपता र समरूपताका व्यवहारिक उदाहरणहरू हुन् । ज्यामिति शिक्षणमा समरूपता र अनुरूपताको प्रयोग प्रशस्त मात्रामा भएको पाइन्छ । यस पाठमा त्रिभुजको अनुरूपता, समरूपता र पाइथागोरस साध्यका सम्बन्धमा चर्चा गरिन्छ ।

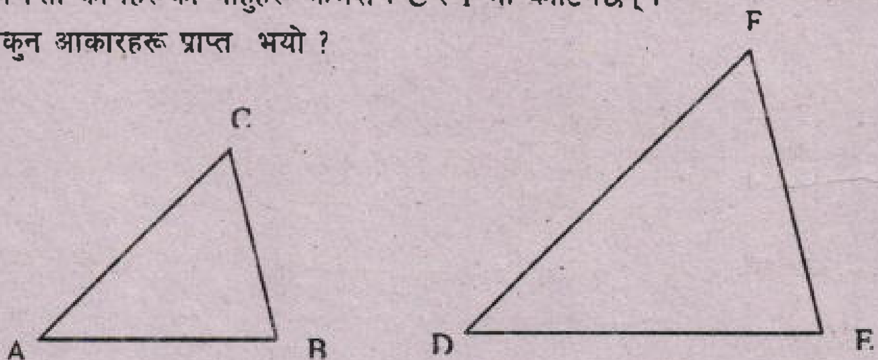
२. विषयवस्तु

२.१ त्रिभुजको समरूपता

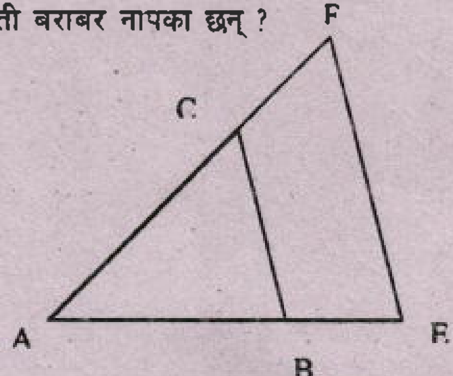
शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई निम्नलिखित क्रियाकलापहरू गराउनुभयो ।

6cm र 9cm नाप भएका दुईओटा रेखाखण्डहरू खिच । क्रमशः AB र DE नामाकरण गर । AB र DE सित क्रमशः A र D मा 60° को कोण खिच । त्यस्तै गरी B र E मा 75° को कोण खिच । ती कोणहरूका बाहुहरू क्रमश : C र F मा काटिनेछन् ।

कुनकुन आकारहरू प्राप्त भयो ?

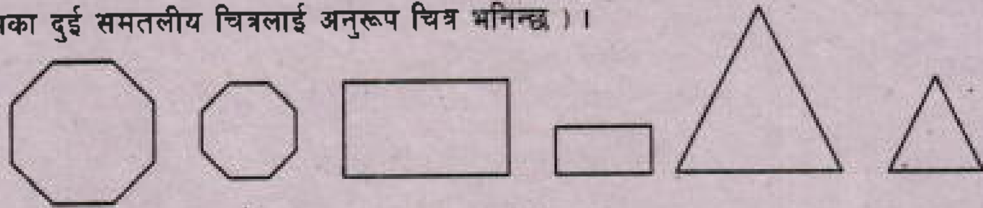


कोण A लाई D मा र AB लाई DE मा र B लाई E मा राख । के ती दुबै त्रिभुजहरू उही आकारका छन् ? के ती बराबर नापका छन् ?



यदि AB र DE तथा AC र DF का लम्बाइहरू बराबर भएको भए के हुने थियो ?
शिक्षक वासुदेवले जियोबोर्ड प्रयोगबाट गरी विभिन्न प्रकारका त्रिभुजहरू देखाउँदै समरूप त्रिभुजको धारणा दिनुभयो ।

उही आकारका दुई समतलीय चित्रहरूलाई समरूप चित्र भनिन्छ । (उही आकार र उही नापका दुई समतलीय चित्रलाई अनुरूप चित्र भनिन्छ) ।



यदि दुई त्रिभुजहरूका सङ्गति कोणहरू बराबर छन् र सङ्गति भुजाहरू समानुपातमा छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । कोणहरू बराबर भएर मात्र ज्यामितीय चित्रहरू समरूप हुनसक्दैन । वर्ग र आयातमा सबै कोणहरू बराबर हुन्छन तर ती चित्रहरू समरूप हुँदैनन् ।

माथिका दुई त्रिभुजहरू ABC र DEF मा

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ र $\angle C = \angle F$ छन् । त्यसैगरी

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ छन् । अर्थात् AB:BC:AC = DE:EF:DF छन् ।

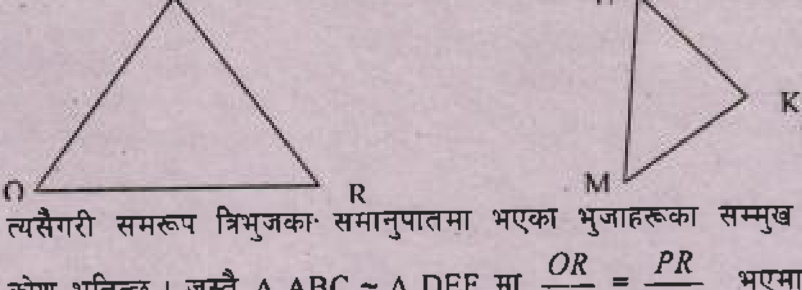
त्यसैले Δ ABC ~ Δ DEF छन् ।

सङ्गति भुजा र सङ्गति कोण

समरूप त्रिभुजमा बराबर कोणका सम्मुख भुजाहरूलाई सङ्गति भुजा भनिन्छ ।

जस्तै तलका दुई समरूप त्रिभुजहरूमा (Δ ABC ~ Δ DEF)

$\angle Q = \angle L$ छन् भने ती कोणका सम्मुख भुजाहरू PR र KM सङ्गति भुजाहरू हुन् ।



त्यसैगरी समरूप त्रिभुजका समानुपातमा भएका भुजाहरूका सम्मुख कोणहरूलाई सङ्गति कोण भनिन्छ । जस्तै Δ ABC ~ Δ DEF मा $\frac{QR}{LM} = \frac{PR}{KM}$ भएमा $\angle R$ र $\angle M$ सङ्गति कोणहरू हुन् ।

शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई विभिन्न खालका अनुरूप त्रिभुजहरू दिएर सङ्गति भुजा र सँगति कोणहरू पत्तालगाउने अभ्यास गराउनुभयो ।

उहाँले विद्यार्थीहरूलाई

- दुई समानकोणका त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । (AAA Postulate)
- दुई त्रिभुजमा एक एक कोणहरू बराबर छन् र ती कोणहरू बनाउने भुजाहरू समानुपातमा छन् भने ती त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । (SAS Postulate)
- तीनओटै सँगति भुजाहरू समानुपातमा भएका त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । (SSS Postulate)

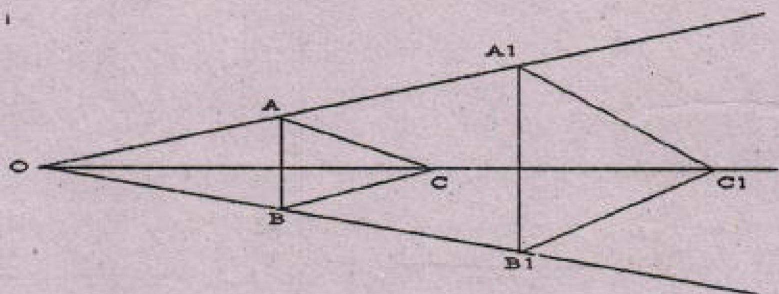
भन्ने कुरा प्रयोगात्मक परीक्षण गराउनु भयो ।

शिक्षक वासुदेवले समरूप बहुभुजहरूका बारेमा पनि छलफल गराउनुभयो ।

साइज स्थानान्तरणको रूपमा समरूपता

समरूपतालाई साइज स्थानान्तरको रूपमा पनि परिभाषित गर्ने गरेको पाइन्छ । उदाहरणका लागि तलको चित्रमा Δ ABC लाई केन्द्रविन्दु O बाट दुई गुना विस्तार गर्दा $\Delta A_1B_1C_1$ बनेको छ ।(विस्तारको नापो २ छ)

त्यसैले $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ छ ।

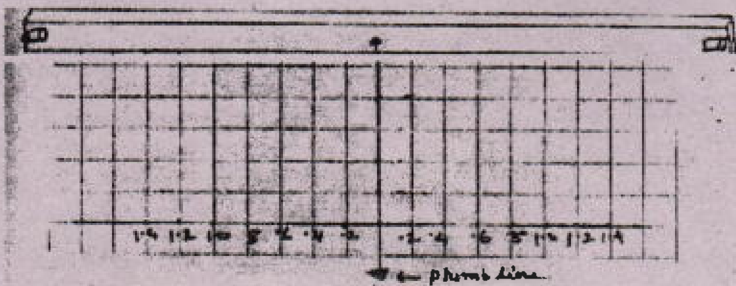


कुनै चित्रलाई कुनै निश्चित नापो लिएर विस्तार वा सङ्कुचन गर्दा प्राप्त हुने चित्र पहिलेको चित्रसँग समरूप हुन्छ ।

त्रिभुजको समरूपताको प्रयोग

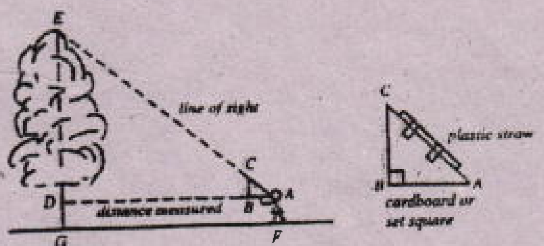
त्रिभुजको समरूपता विभिन्न क्षेत्रमा प्रयोग हुन्छ । उदाहरणका लागि दुरी र उचाइसम्बन्धी समस्या समाधानका लागि त्रिभुजको समरूपताको प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

१. हिप्सोमिटर प्रयोग गरी दुरी र उचाइसम्बन्धी समस्याहरू समाधान गर्दा त्रिभुजको समरूपताको सिध्दान्तको प्रयोग हुन्छ ।

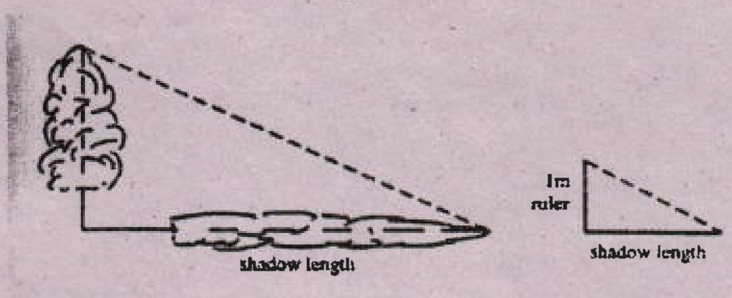


हिप्सोमीटर प्रयोग गरी कुनै रुखको उचाइ पत्तालगाउनु पर्ने छ भने दृष्टिरेखाबाट रूखको टुप्पोलाई हेर्ने र त्यही बेला प्लम्बलाईनले तेर्सो रेखा (स्केल) मा छोएको विन्दुको मान टिपोट गर्ने । अनि दृष्टिविन्दुबाट रुखको फेदसम्मको दुरी पनि नाप्ने । रुखको उचाइ, दुरी र दृष्टिरेखाले बनाएको समकोण त्रिभुज र हिप्सोमीटरमा प्लम्बलाईन, ठाडो र तेर्सो रेखाले बनाएको समकोण त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् । त्यसैले रुखको उचाइ र दृष्टिविन्दुदेखि फेदसम्मको दुरीको अनुपात र हिप्सोमीटरको ठाडो स्केल र तेर्सो स्केलको अनुपात बराबर हुन्छ । यसरी रुख उचाइ थाहा भएमा रुखको फेदसम्मको दुरी निकाल्न सकिन्छ भने रुखको फेदसम्मको दूरी थाहा भएमा रुखको उचाइ पत्तालगाउन सकिन्छ ।

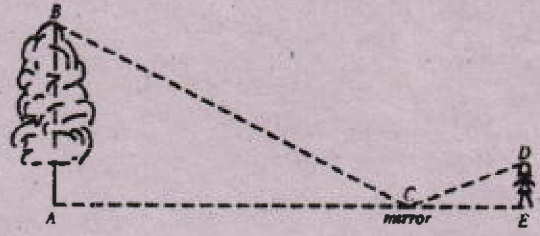
२.साधारण समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजको सहयोगबाट समरूपताको सिध्दान्तको प्रयोग गरी उचाइसम्बन्धी समस्या समाधान गर्न सकिन्छ ।



३. छायाँको प्रयोग गरी समरूपताको सिध्दान्तअनुसार उचाइसम्बन्धी समस्या समाधान गर्न सकिन्छ ।



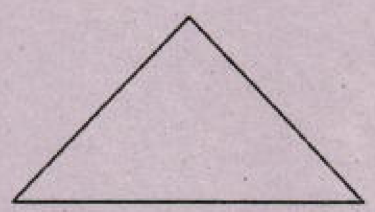
४. ऐनाको प्रयोग गरी समरूपताको सिध्दान्तअनुसार उचाइसम्बन्धी समस्या समाधान गर्न सकिन्छ ।

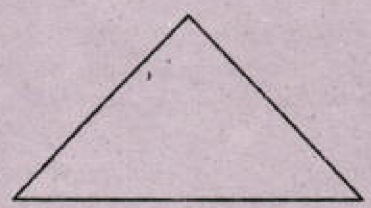


२.२ त्रिभुजको अनुरूपता

एउटै आकार र नापका दुई ज्यामितीय आकृतिहरूलाई अनुरूप आकृति भनिन्छ । एउटा त्रिभुज अर्को त्रिभुजमाथि खप्ट्याउँदा ठिक्क मिल्दछन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । अनुरूप त्रिभुज सबै समरूप हुन्छन् तर सबै समरूप त्रिभुजहरू अनुरूप हुँदैनन् । समरूप त्रिभुजका सँगति भुजाहरू समानुपातमा हुन्छन् भने अनुरूप त्रिभुजका सँगति भुजाहरू बराबर हुन्छन् । एउटा त्रिभुजका सबै भुजा र सबै कोणहरू अर्को त्रिभुजका सँगति भुजा र कोणहरूसँग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । बराबर नाप र उस्तै आकारका दुई त्रिभुजका टुक्राहरूलाई एउटामाथि अर्को खप्ट्याएर विद्यार्थीहरूलाई अनुरूप त्रिभुजको धारणा दिन सकिन्छ ।

तलको चित्रहरूमा





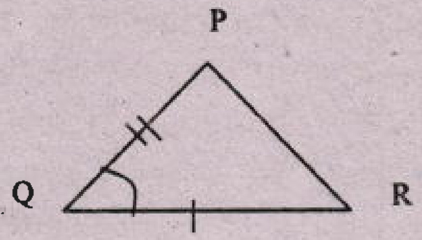
AB = DE , BC = EF , AC = DE र $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ छन् भने $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ हुन्छन् ।

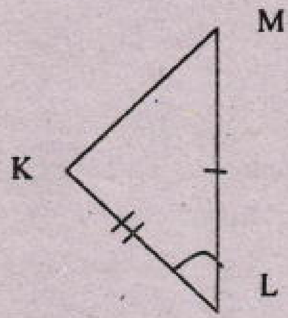
नोट:

१. अनुरूप त्रिभुजहरू एउटामाथि अर्को खप्ट्याउँदा सबै ठिक्क मिल्दछन् (Coincide) ।
२. अनुरूप त्रिभुजहरूमा खप्ट्याउँदा ठिक्क मिल्ने भुजाहरूलाई सङ्गति भुजाहरू र ठिक्क मिल्ने कोणहरूलाई सङ्गति कोणहरू भनिन्छ ।
३. बराबर भुजाका सम्मुख कोणहरू सङ्गति कोणहरू हुन् भने बराबर कोणका सम्मुख भुजाहरू सङ्गति भुजाहरू हुन् ।.
४. अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति भागहरू पनि अनुरूप नै हुन्छन् ।

अनुरूप त्रिभुजका शर्तहरू

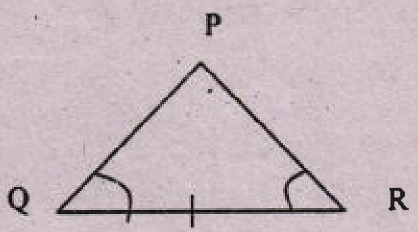
१. एउटा त्रिभुजका दुईभुजा र त्यसमा परेको कोण अर्को त्रिभुजका दुईभुजा र त्यसमा परेको कोणसँग क्रमश अलग अलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (भु.को.भु अर्थात् SAS स्वयम सिध्द तथ्य)

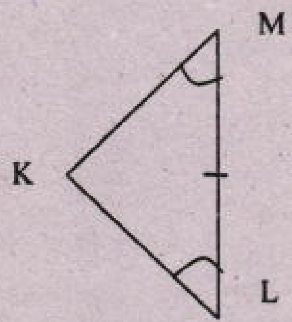




सँगैको चित्रमा PQ = KL , $\angle Q = \angle L$ र QR = LM भए $\Delta PQR \cong \Delta KLM$ हुन्छ

२. एउटा त्रिभुजका दुईकोण र त्यसमा परेको भुजा अर्को त्रिभुजका दुईकोण र त्यसमा परेको भुजासँग क्रमश अलगअलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (को.भु.को. अर्थात् ASA स्वयम् सिध्द तथ्य)





सँगैको चित्रमा $\angle Q = \angle L$, QR = LM र $\angle R = \angle M$ भए $\Delta PQR \cong \Delta KLM$ हुन्छ

३. एउटा त्रिभुजका तीनओटा भुजा अर्को त्रिभुजका तीनओटा भुजासँग क्रमश अलग अलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (भु.भु.भु. अर्थात् SSS सिध्दान्त)

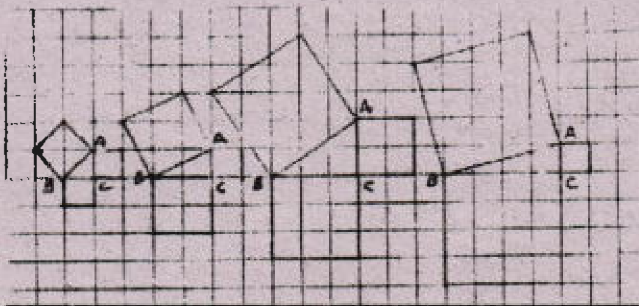
४.एउटा समकोण त्रिभुजको कर्ण र एउटा भुजा अर्को समकोण त्रिभुजको कर्ण र भुजासँग क्रमश अलग अलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (स.क.भु.. अर्थात् RHS सिध्दान्त)

५. एउटा त्रिभुजको एउटा भुजा, त्यसमा परेको एउटा कोण र त्यसको सम्मुख कोण अर्को त्रिभुजको एउटा भुजा, त्यसमा परेको एउटा कोण र त्यसको सम्मुख कोणसँग क्रमशः अलगअलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (भु.को.को. अर्थात् SAA सिध्दान्त) ।

भुजा र कोणहरूका अलगअलग नाप लिएर तालिका भर्न लगाई अनुरूप त्रिभुजसम्बन्धी यी तथ्य वा सिध्दान्तहरूको विद्यार्थीहरूलाई प्रयोगात्मक परीक्षण गराउन सकिन्छ । ज्यामितीय साध्यहरू प्रमाणित गर्दा त्रिभुजको अनुरूपताको प्रयोग प्रशस्त मात्रामा हुन्छ ।

२.३ पाइथागोरस साध्य

शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई समूहमा राख्नुभयो । प्रत्येक समूहलाई ग्राफपेपर बाँड्नुभयो । ग्राफ पेपरमा चित्रमा दिइएअनुसार विभिन्न आकारका समकोण त्रिभुजहरू खिच्न लगाउनुभयो । ती सबै त्रिभुहरूका आधार, लम्ब र कर्णहरूमा बनेका वर्गहरू खिच्न लगाउनुभयो ।



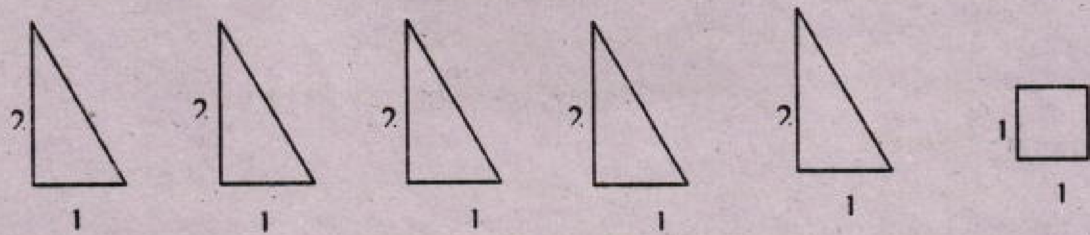
समकोण त्रिभुजका आधार, लम्ब र कर्णमा बनेका वर्गहरूको कोठा गन्ती गरेर तल दिइएअनुसारको तालिकामा भर्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीहरूले यस प्रकार तालिका भरे ।

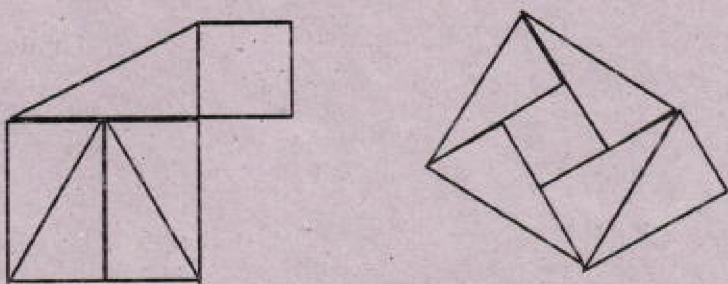
चित्र	आधारमा बनेको वर्ग (BC^2)	लम्बमा बनेको वर्ग (AC^2)	कर्णमा बनेको वर्ग (AB^2)	आधारमा बनेको वर्ग र लम्बमा बनेको वर्गको योगफल ($BC^2 + AC^2$)
(i)	1	1	2	2
(ii)	4	1	5	5
(iii)	9	1	10	10
(iv)	16	1	17	17

शिक्षक वासुदेवले पाइथागोरस साध्यको कथन विद्यार्थीहरूलाई माथि तालिकामा प्राप्त नतिजाको आधारमा लेख्न लगाउनुभयो ।

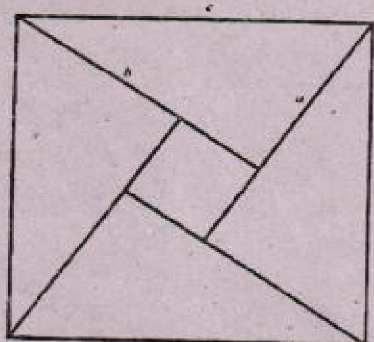
पाइथागोरस साध्यको प्रमाण धेरै तरिकाबाट परीक्षण गर्न सकिन्छ । शिक्षक वासुदेवले तल दिइएका विभिन्न विधिहरू प्रयोग गरी विद्यार्थीहरूलाई पाइथागोरस साध्यको प्रमाणसम्बन्धी धारणा दिनुभयो ।

१. विद्यार्थीहरूलाई निम्नअनुसारका त्रिभुजाकार र वर्गाकार टुक्राहरू काट्न लगाई चित्रमा देखाइएअनुसार मिलाएर प्रदर्शन गर्न लगाउनुभयो ।

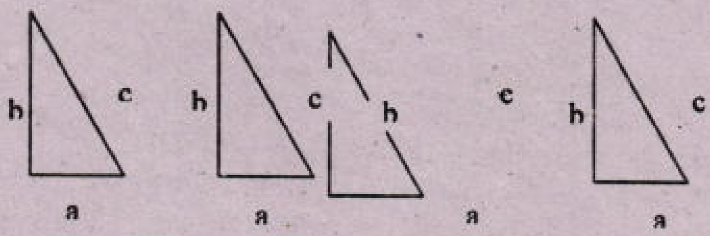


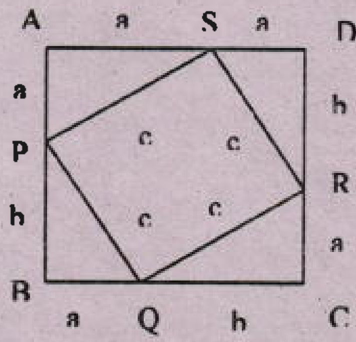


हिन्दु गणितज्ञ भाष्कर (1100 AD) ले पाइथागोरस साध्य प्रमाणित गर्न तल दिइएको बीजगणितीय विधि प्रयोग गरेका थिए ।



२. शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई तल चित्रमा देखाइएअनुसारका चारओटा समकोण अनुरूप त्रिभुजहरू काट्न लगाई वर्गको निर्माण गर्न लगाउनुभयो ।





विद्यार्थीहरूले निम्नअनुसारको निष्कर्ष निकाले ।

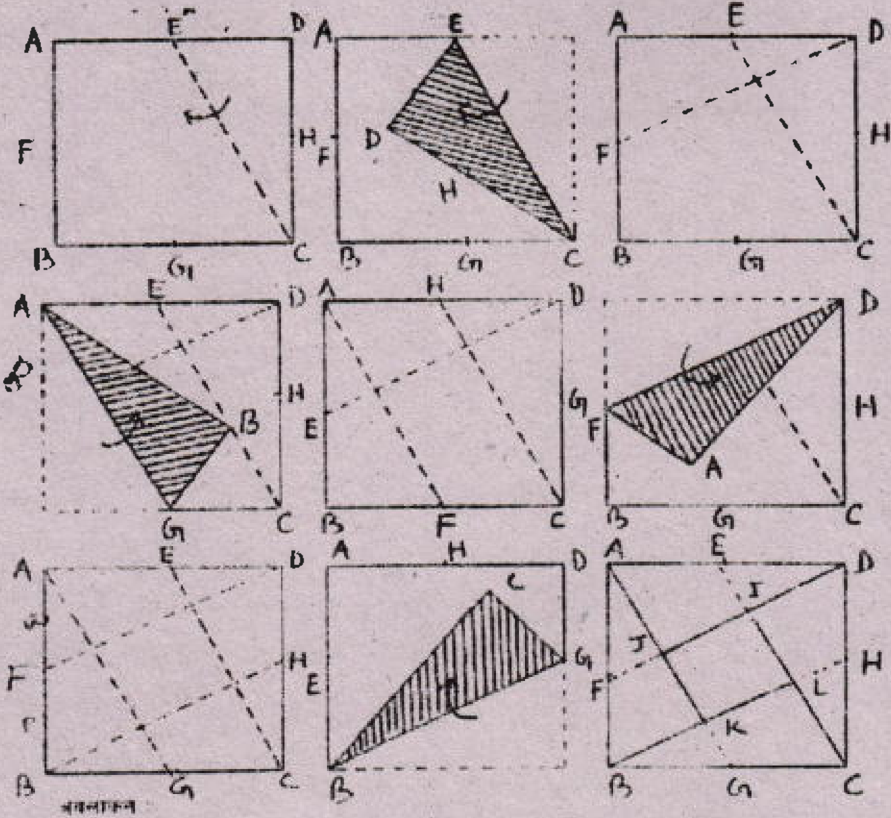
वर्ग ABCD को क्षेत्रफल = 4 त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल + वर्ग PQRS को क्षेत्रफल

अथवा $(a + b)^2 = 4 \times 1/2\ ab + c^2$

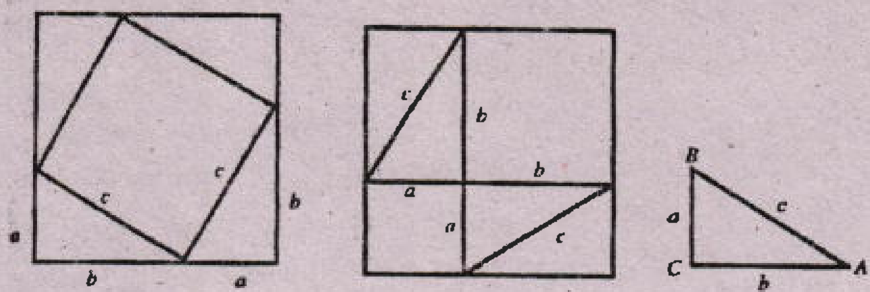
अथवा $a^2 + 2ab + b^2 = 2\ ab + c^2$

त्यसैले $a^2 + b^2 = c^2$

कागज पट्याएर पनि पाइथागोरस साध्यको माथिको तरिकाबाट सामान्यीकरण गर्न सकिन्छ ।

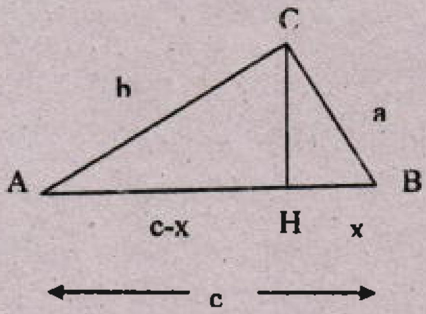


३ पाइथागोरस साध्यको चित्रात्मक प्रमाण



४. समरूप त्रिभुजको प्रयोगबाट पाइथागोरस साध्यको प्रमाण

शिक्षक वासुदेवले समकोण त्रिभुज ABC खिच्नुभयो जसमा $\angle C = 90°$ र $AD \perp BC$ छ ।



उहाँले विद्यार्थीहरूलाई तल दिइएको ख़ाली ठाउँ भर्न लगाउनुभयो ।

$\Delta ABC \sim \Delta ACH$

$\frac{b}{c} = \frac{c-x}{b}$

$\therefore b^2 =$ .... (i)

$\Delta ABC \sim \Delta BCH$

$\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$

$\therefore a^2 =$ .... (ii)

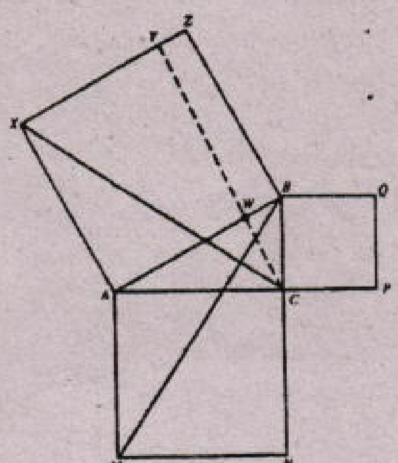
(i) र (ii) लाई जोड्दा

....

....

विद्यार्थीहरूले $a^2 + b^2 = c^2$ निकाले ।

५. शास्त्रीय ग्रीक प्रमाण (Classical Greek Proof)



ठूलो वर्गलाई दुईओटा आयात AXYW र BZYW मा बाँडिएको छ । AXYW को क्षेत्रफल र ACNM को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ । त्यसैगरी BZYW को क्षेत्रफल र BCPQ को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ । अनि ABZX को क्षेत्रफल बराबर ACNM को क्षेत्रफल र BCPQ को क्षेत्रफलको योगफल हुन्छ ।

पाइथागोरस साध्य ज्यामितिको एउटा महत्वपूर्ण साध्य हो । यो साध्य प्राचीन समयदेखि नै प्रयोगमा थियो । इजिप्सीएनहरूले इशापूर्व २००० वर्ष पहिले नै निर्माण र सर्भेका लागि गाँठो पारेको डोरीको माध्यमबाट

3-4-5 समकोण त्रिभुज प्रयोग गरेका थिए । त्यही समयमा बेवीलोनियनहरूले कैयन पाइथागोरस ट्रिपलहरू प्रयोग गरेका थिए । ग्रिकहरूले इशापूर्व २०० देखि ३०० वर्षको बीचमा यस साध्यको औपचारिक प्रमाण प्रस्तुत गरेका थिए । पाइथागोरस साध्यको प्रयोग निकै व्यापक छ । उदाहरणका लागि त्रिकोणमिति, ज्यामिति, क्याल्कुलस आदि कैयन क्षेत्रमा पाइथागोरस साध्यको प्रयोग हुन्छ । अनानुपातिक सङ्ख्या (Irrational Number) को आविष्कारमा पनि पाइथागोरस साध्यको योगदान रहेको थियो । पाइथागोरस साध्यका ४०० भन्दा बढी प्रमाणहरू पत्तालागेका थिए । माथिका प्रमाणहरू केही उदाहरण मात्र हुन् ।

३. परियोजन कार्य :

- 3cm, 4cm, 5cm नापका भुजाहरू भएका त्रिभुज खिच्नुहोस् । 6cm, 8cm, 10cm नापका भुजाहरू भएका अर्को त्रिभुज खिच्नुहोस् । ती त्रिभुजहरूका कोणहरू नाप्नुहोस् र दाज्नुहोस् । ती त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् भनी तपाईं कसरी देखाउन सक्नुहुन्छ ?
- 4cm, 5cm नापका भुजाहरू र एउटा कोण 45° भएको एउटा त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् । 6cm, 7.5cm र एउटा कोण 45° को अर्को त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् । ती त्रिभुजहरूबीच दाज्नुहोस् र ती त्रिभुजहरूका कोणहरूको नाप लेख्नुहोस् । पहिलो र दोस्रो त्रिभुजहरूका तेस्रो भुजाहरूका अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् । बाँकी अन्य दुई सङ्गत भुजाहरूका अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् । तपाईं कसरी ती दुई त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् भनी देखाउन सक्नुहुन्छ ?
- ज्यामिति शिक्षणमा त्रिभुजको अनुरूपताको प्रयोग सम्बन्धमा एउटा लेख तयार गर्नुहोस् ।
- पाइथागोरस साध्य शिक्षणको लागि एउटा सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

१. **परिचय :**

हाम्रो दैनिक जीवनमा प्रयोग गर्ने थुप्रै वस्तुहरूका सतहका आकार चारपाटे वा चतुर्भुज आकारमा पाउँछौं । जस्तै हामीले कक्षाकोठामा प्रयोग गर्ने कालोपाटी वा सेतो पाटी, डस्टर, सूचना पाटी, पुस्तक, अभ्यास पुस्तिका इत्यादि वस्तुहरूका आकार चारपाटे छन् । विपरीत किनाराहरू समानान्तर छन् । भौतिक वस्तुहरूको सतहका आकार प्रयोग गरी विभिन्न किसिमका चतुर्भुजहरूको धारणा दिन सकिन्छ । यस पाठमा समलम्व चतुर्भुज, समानान्तर चर्तुर्भुज, वर्ग, आयात, समबाहु चतुर्भुज, चङ्गाको बारेमा चर्चा गर्ने प्रयास गरिएको छ ।

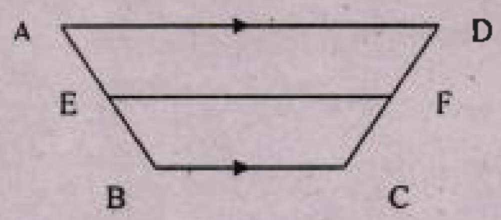
२. **विषयवस्तु :**

२.१ चतुर्भुजका गुणहरू

शिक्षक वासुदेव चतुर्भुज पाठ शिक्षण गर्दैहुनुहुन्छ । उहाँले जियोवोर्डमा रवर व्याण्ड प्रयोग गरी विभिन्न किसिमका चतुर्भुजहरू बनाएर विद्यार्थीहरूलाई देखाउनुभयो । विद्यार्थीहरूलाई पनि बनाउन दिनुभयो । चतुर्भुजको परिभाषा बारेमा छलफल गर्नुभयो । चारओटा सरल रेखाखण्डहरूबाट घेरिएको बन्द आकृतिलाई चतुर्भुज भनिन्छ । चतुर्भुजका विपरीत शीर्षविन्दुहरू जोड्ने सरल रेखाखण्डहरूलाई विकर्ण भनिन्छ । उहाँले विद्यार्थीहरूलाई समूहमा बाँड्नुभयो र विभिन्न समूहलाई विभिन्न किसिमका चतुर्भुजहरू बनाउन लगाउनुभयो ।

क) समलम्व चतुर्भुज (Trapezium)

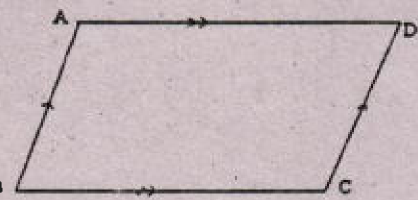
कुनै पनि दुई भुजाहरू समानान्तर भएका र बाँकी दुई भुजाहरू समानान्तर नभएका चतुर्भुजलाई समलम्ब चतुर्भुज भनिन्छ । समलम्व चतुर्भुजका समानान्तर भएका भुजाहरूलाई आधार भनिन्छ भने समानान्तर नभएका भुजाहरूलाई पाद भनिन्छ । पादहरू बराबर भएको समलम्व चतुर्भुजलाई समानपाद समलम्व चतुर्भुज (Isosceles trapezium) भनिन्छ । पादहरूको मध्यविन्दु जोड्ने रेखालाई मध्य रेखा भनिन्छ । मध्यरेखा आधारसँग समानान्तर हुन्छ । समानान्तर रेखाहरूबीचको दूरीलाई समलम्व चतुर्भुजको उचाइ भनिन्छ । समलम्व चतुर्भुजको क्षेत्रफल आधारको योग र उचाइको गुणनफलको आधा हुन्छ ।



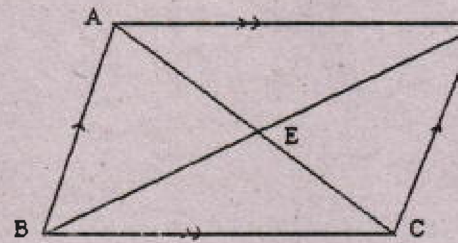
ख) समानान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)

सम्मुख भुजाहरू समानान्तर भएको चतुर्भूजलाई समानान्तर चतुर्भुज भनिन्छ ।

समानान्तर चतुर्भुजमा



- सम्मुख भुजाहरू समानान्तर हुन्छन् ।
- सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
- सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
- सँगैका (Cosecutive) कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।
- विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजित हुन्छन् ।
- प्रत्येक विकर्णले समानान्तर चतुर्भुजलाई दुईअनुरूप त्रिभुजमा विभाजन गर्दछ ।
- दुईओटा विकर्णहरूले समानान्तर चतुर्भुलाई चारओटा बराबर क्षेत्रफल भएका त्रिभुजहरूमा विभाजन गर्दछ ।



- समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल बराबर आधार र उचाइको गुणनफल हुन्छ ।

ग) आयात (Rectangle)

एउटा कोण समकोण भएको समानान्तर चतुर्भुजलाई आयात भनिन्छ ।

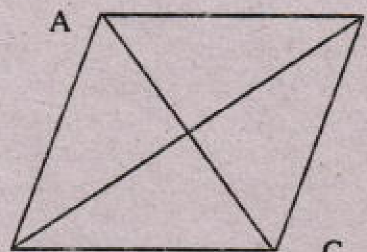
आयात एउटा यस्तो समानान्तर चतुर्भुज हो जसमा

- विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।
- प्रत्येक कोण समकोण हुन्छन् ।
- विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजित हुन्छन् ।
- क्षेत्रफल बराबर लम्बाइ र चौडाइको गुणनफल हुन्छ ।

घ) समबाहु चतुर्भुज (Rhombus)

आसन्न भुजाहरू बराबर भएको समानान्तर चतुर्भुज नै समबाहु चतुर्भुज हो ।
समबाहु चतुर्भुज एउटा यस्तो समानान्तर चतुर्भुज हो जसमा

- सबै भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
- विकर्णहरू परस्पर समकोण पारेर समद्विभाजित हुन्छन् ।
- प्रत्येक विकर्णले सम्बन्धित शीर्षकोणलाई समद्विभाजन गर्छ ।
- क्षेत्रफल बराबर विकर्णहरूको गुणनफलको आधा हुन्छ ।



ङ) वर्ग (Square)

वर्ग एउटा यस्तो समानान्तर चतुर्भुज हो जसमा

- सबै भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
- प्रत्येक कोण समकोण हुन्छ ।
- विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।
- विकर्णहरू परस्पर समकोण पारेर समद्विभाजित हुन्छन् ।
- प्रत्येक विकर्णले सम्बन्धित शीर्षकोणलाई समद्विभाजन गर्दछ ।
- क्षेत्रफल विकर्णको वर्गको आधा अथवा भुजाको वर्ग हुन्छ ।

सारांश:

१. विभिन्न किसिमका समानान्तर चतुर्भुजहरूका विकर्णसम्बन्धी गुणहरू

गुणहरू	समानान्तर चतुर्भुज	आयात	समबाहु चतुर्भुज	वर्ग
विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजित हुन्छन् ।	√	√	√	√
विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।	–	√	–	√
विकर्णले शीर्षकोणहरूलाई समद्विभाजन गर्दछन्	–	–	√	√
विकर्णहरू परस्पर लम्वहुने गरी काटिन्छन् ।	–	–	√	√
प्रत्येक विकर्णले दुई अनुरूप त्रिभुजमा बाँड्छन् ।	√	√	√	√
विकर्णले चार बराबर त्रिभुजमा बाँड्छन्	√	√	√	√
विकर्णले चार अनुरूप त्रिभुजमा बाँड्छन्	–	–	√	√

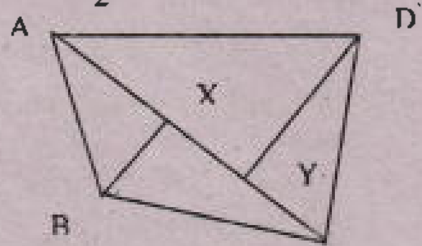
२.१. विभिन्न किसिमका चतुर्भुजका भुजा, कोण, समानान्तर रेखा र सममिति रेखासम्बन्धी गुणहरू

चतुर्भुजहरू	बराबर भुजाहरू	बराबर कोणहरू	समानान्तर भुजाहरू	सममिति रेखाहरू
समानान्तर चतुर्भुज	२ जोडा विपरीत भुजाहरू बराबर	२ जोडा विपरीत कोणहरू बराबर	२ जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर	छैन
समबाहु चतुर्भुज	४ भुजाहरू बराबर	२ जोडा विपरीत कोणहरू बराबर	२ जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर	२ ओटा सममिति रेखाहरू
समलम्ब चतुर्भुज	छैन	छैन	१ जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर	छैन
वर्ग	४ भुजाहरू बराबर	४ ओटा समकोण	२ जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर	४ ओटा सममिति रेखाहरू
आयात	२ जोडा विपरीत भुजाहरू बराबर	४ ओटा समकोण	२ जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर	२ ओटा सममिति रेखाहरू

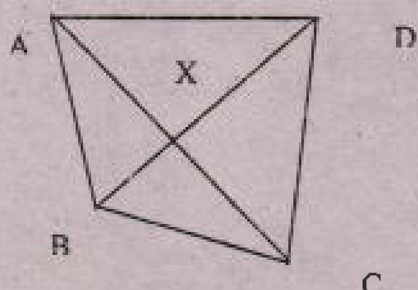
२.२ चतुर्भुजको परिमिति र क्षेत्रफल

१.चतुर्भुजको क्षेत्रफल

चतुर्भुजको एउटा विकर्ण र सो विकर्णमा विपरीत शीर्षविन्दुहरूबाट खिचिएको लम्ब दिइएको छ भने, चतुर्भुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्ण × विकर्णमा खिचिएका लम्बहरूको योगफल हुन्छ ।



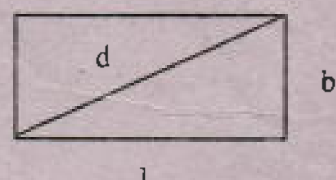
यदि दुई चतुर्भुजका दुई विकर्णहरू परस्पर लम्ब भइ समद्विभाजन भएका छन् भने चतुर्भुजको क्षेत्रफल बराबर विकर्णहरूको गुणनफलको आधा हुन्छ ।



२.३. विशेष प्रकारका चतुर्भुजहरू

क) आयात

यदि आयातको लम्बाइ र चौडाइ क्रमशः l र b छ भने

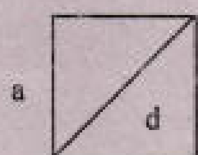


परिमिति = $2(l + b)$

क्षेत्रफल = $l \times b$

विकर्णको लम्बाइ = $\sqrt{(l^2 + b^2)}$

ख) वर्ग



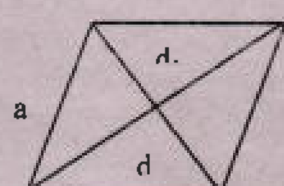
वर्गको भुजा a छ भने

परिमिति = $4a$

क्षेत्रफल = a^2

विकर्णको लम्बाइ = $\sqrt{2}\,a$

ग) समानान्तर चतुर्भुज



क्षेत्रफल = आधार × उचाइ

घ) समबाहु चतुर्भुज

परिमिति = 4a

क्षेत्रफल = 1/2 × विकर्णहरूको गुणनफल

(भुजा)^2 = $(d_1/2)^2 + (d_2/2)^2$ जहाँ d_1 र d_2 विकर्णहरू हुन् ।

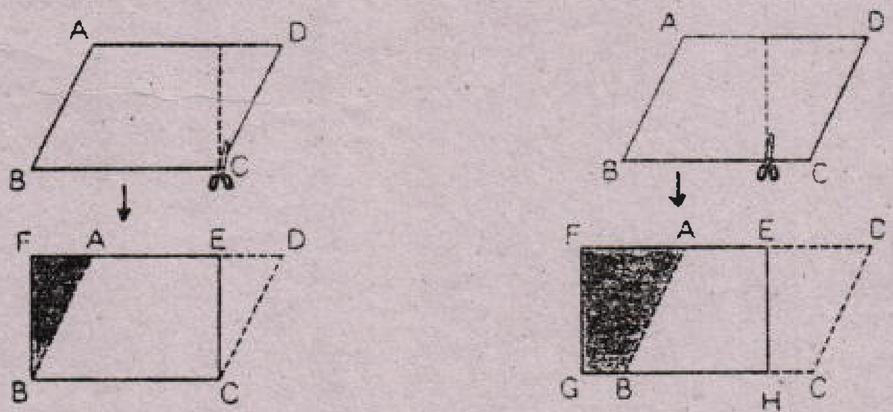
ङ) समलम्ब चतुर्भुज

क्षेत्रफल = 1/2 × (a + b) h जहाँ a र b आधारहरू हुन् भने h उचाइ हो ।

२.३. कागज पट्याएर र काटेर चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्रको सामान्यीकरण

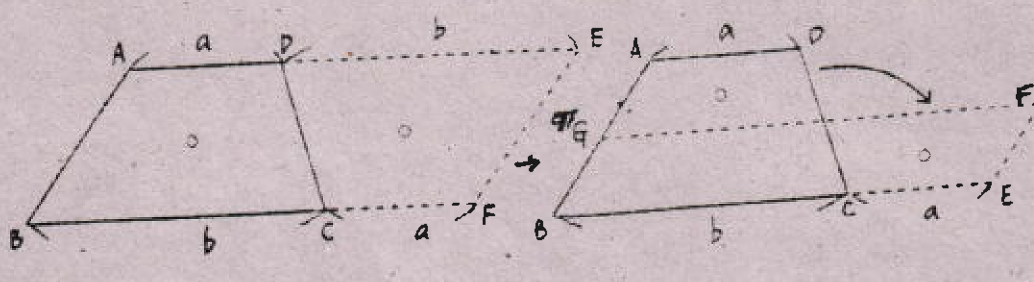
क) समानान्तर चतुर्भुज

कागज काटेर समानान्तर चतुर्भुज निकाल्ने । चित्रमा देखाएअनुसार समानान्तर चतुर्भुजलाई टुक्रा पारी प्राप्त टुक्रालाई आयातमा मिलाउने । यसबाट स.च.को क्षेत्रफल = b × h हुन्छ भन्ने कुरा सामान्यीकरण गराउन सकिन्छ ।



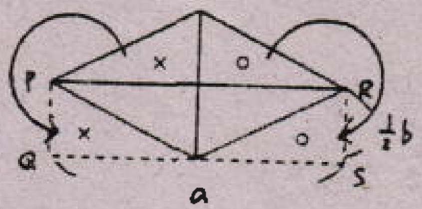
ख) समलम्ब चतुर्भुज

समलम्व चतुर्भुजको क्षेत्रफलका लागि दुईओटा अनुरूप समलम्ब चतुर्भुजलाई समानान्तर चतुर्भुजमा मिलाएर वा एउटै समलम्ब चतुर्भुजाकार कागजको टुक्रा काटेर तल चित्रमा देखाएजस्तै गरी समानान्तर चतुर्भुजमा रूपान्तर गरी स.ल.च. को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (a + b) h हुन्छ भन्ने कुरा सामान्यीकरण गराउन सकिन्छ ।

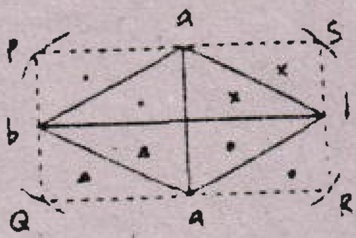


ग) समबाहु चतुर्भुज

समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफलका लागि समबाहु चतुर्भुज आकारका कागज काट्न लगाउने । समबाहु चतुर्भुजको विकर्णमा काटेर चित्रमा देखाएजस्तै गरी मिलाउन लगाउने । यसबाट समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (विकर्णको गुणनफल) हुन्छ भन्ने कुरा सामान्यीकरण गराउन सकिन्छ ।

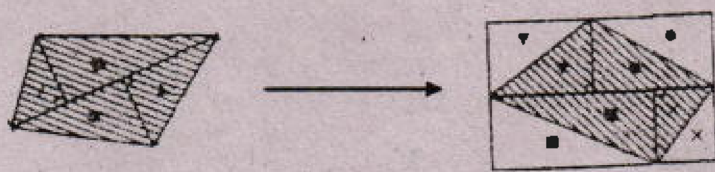


वा



घ) चतुर्भुजको क्षेत्रफल

चतुर्भुजको क्षेत्रफलका लागि चित्रमा देखाए झैँ गरी विकर्ण र लम्बहरूमा काट्न लगाउने । दुई सेट ४/४ ओटा त्रिभुज तयार गरी चित्रमा देखाएजस्तै गरी मिलाएर आयत बनाउन लगाउने । यसबाट चतुर्भुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (लम्बहरूको योग) × विकर्ण हुन्छ भन्ने कुराको सामान्यीकरण गंराउन सकिन्छ ।



३. परियोजना कार्य :

चतुर्भुज पाठ शिक्षणका लागि एउटा सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- R.K. Bansal, Concise Mathematics, Selina Publishers.
- डा. हीरा बहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण, भूँडी पुराण प्रकाशन
- S.M. Maskey, Modern Mathmatics, Ratna Pustak Bhandar.
- माध्यमिक शिक्षा विकास केन्द्र , गणित प्रशिक्षक निर्देशिकाहरू (मा.वि, नि.मा.वि),
- SEDP, Four Week Inservice Teacher Training Package (Lower Secondary and Secondary)
- शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र, गणित शिक्षण प्रशिक्षक निर्देशिका
- Wally 'wallypop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philippines, NISMED.
- IGNOU, Teaching of Mathematics,
- Morgan Ward et.al, Modern Elementary Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- Paw J. Kelly et. al, Geometry, Eurasia Publishing House (P) Ltd.

पाठ छ : वृत्त , विन्दुपथ र सममिति

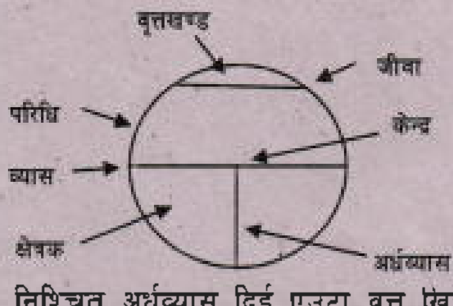
१. परिचय :

दैनिक जीवनमा हामीहरूले वृत्ताकार वस्तुहरूको प्रयोग प्रशस्त मात्रामा गर्दछौं । महिलाहरूले निधारमा प्रयोग गर्ने टीकादेखि लिएर सूर्यको चित्र सबै वृत्ताकार रूपमा हुन्छन् । ज्यामितीय आकारहरूमध्ये वृत्ताकार पनि एउटा महत्वपूर्ण आकार हो । पूजाआजामा प्रयोग गरिने थुप्रै चित्रहरू वृत्ताकार पाइन्छन् । वृत्त जस्तै विन्दुपथ र सममिति पनि ज्यामिति शिक्षणमा प्रयोगमा आउँछन् । यस पाठमा वृत्त, विन्दुपथ र सममितिका सामान्य धारणा कसरी दिन सकिन्छ भन्ने सम्बन्धमा चर्चा गर्ने प्रयाश गरिएको छ ।

२. विषयवस्तु :

२.१ वृत्त (Circle)

शिक्षक वासुदेवले वृत्त पाठ शिक्षण गर्दै हुनुहुन्छ । उहाँले प्लेट, चुरा, सिक्का आदि वस्तुहरू प्रयोग गरी वृत्ताकार वस्तुहरूका बारेमा छलफल गराउनुभयो । बोर्डमा कम्पासले एउटा ठूलो वृत्त खिची वृत्तका विभिन्न भागहरू जस्तै केन्द्र, परिधि, व्यास, अर्धव्यास, जीवा, वृत्तखण्ड, क्षेत्रक, चाप इत्यादिका बारेमा छलफलको माध्यमबाट परिचय गराउनुभयो ।



विद्यार्थीहरूलाई एउटा निश्चित अर्धव्यास दिई एउटा वृत्त खिच्न लगाउनुभयो । सो वृत्तलाई कैंचीले काटेर निकाल्न लगाउनुभयो । त्यसलाई आधा बनाई पट्याउन लगाउनुभयो । पट्याएर खोल्दा देखिने रेखालाई के भनिन्छ भन्ने बारेमा छलफल भए । उहाँले फेरि 1/4, 1/8 मा पट्याएर खोल्न लगाउनुभयो । यसरी बनेका वृत्तका भागहरूका बारेमा छलफल गराउनुभयो । शिक्षक वासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई कागजको वृत्ताकार टुक्रा लिएर निम्नअनुसार गर्न निर्देशन दिनुभयो ।

क) पट्टाएर एउटा जीवा बनाउने,

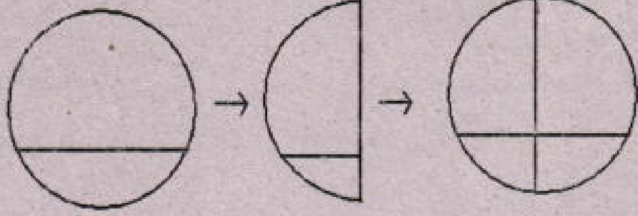
ख) जीवा ठीक आधा हुने गरी जीवामा लम्ब हुने गरी फेरि पट्याउने र खोल्ने,

ग) यो क्रियाकलापको निश्कर्ष लेख्न लगाउनुभयो ।

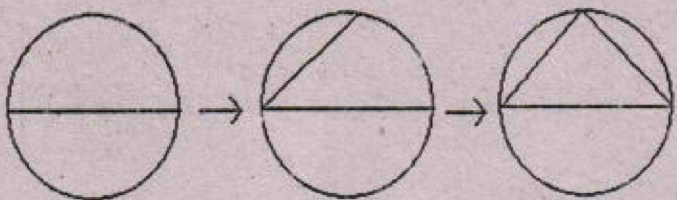
निश्कर्ष :

१. जीवाको लम्बार्धक केन्द्रबिन्दु भएर जान्छ,

२. जीवाको मध्य बिन्दु र वृत्तको केन्द्रबिन्दु जोडने रेखा जीवामा लम्ब हुन्छ ।



उहाँले विद्यार्थीहरूलाई फेरि एउटा वृत्ताकार टुक्रा लिन अह्राउनु भयो । सो टुक्रालाई व्यासमा पट्टयाउन लगाउनुभयो । अनि परिधिको कुनै बिन्दु लिएर सो व्यासका छेउहरू जोडने गरी दुईतिर पट्याउन लगाउनुभयो । यसरी बनेको त्रिभुज कस्तो त्रिभुज हो भन्ने बारेमा छलफल गरी निचोड निकाल्न लगाउनुभयो ।



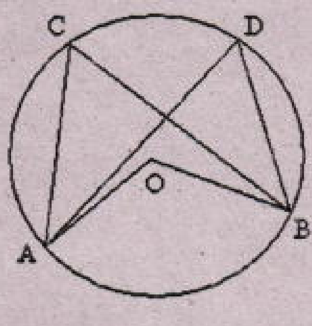
निचोड : वृत्तार्धको कोण समकोण हुन्छ ।

उहाँले विद्यार्थीहरूलाई एउटै चापमा बनेका परिधिकोणहरू खिच्न लगाउनुभयो । ती कोणहरू नाप्न लगाउनुभयो । एउटै चापमा बनेका परिधिकोणहरूको सम्बन्ध तथा परिधिकोण र केन्द्रीयकोणको सम्बन्ध लेख्न लगाउनुभयो ।

निचोड :

१. एउटै चापमा आधारित परिधिकोणहरू बराबर हुन्छन् ।

२. एउटै चापमा आधारित केन्द्रीयकोण परिधिकोणको दोब्बर हुन्छ ।



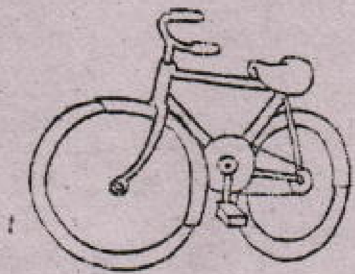
बिन्दुपथ (Locus)

शिक्षक बासुदेवले एउटा फूटबल खेलाडीले बल गुडाउँदै गरेको, किलामा लामो डोरीले बाँधिएको खसी चर्दै गरेको, आकाशमा चरा उड्दै गरेको चित्र कक्षाकोठामा प्रदर्शन गर्नुभयो । ती चित्रहरूका बारेमा छलफल शुरु गर्नुभयो । हरेक समयको सानो एकाइमा खेलाडी, बल, चरा, खसीले आफ्नो स्थिति बदल्दै जान्छ र एउटा पथ निर्धारण गर्दछन् । यहाँ बल, खेलाडी, खसी र चराको स्थितिलाई बिन्दुले जनाउन सकिन्छ । बल, खेलाडी र खसीले बनाएको पथ समतल (Plane) मा बन्दछ भने चराले बनाएको पथ आकाश (Space) मा बन्दछ ।

यहाँ बन्ने पथहरूमध्ये कुनकुन पथ निश्चित छ भन्ने कुरामा उहाँले छलफल गराउनुभयो । ती पथहरूमध्ये खसीले बनाएको पथ मात्र निश्चित भएको निश्कर्ष निकालियो ।

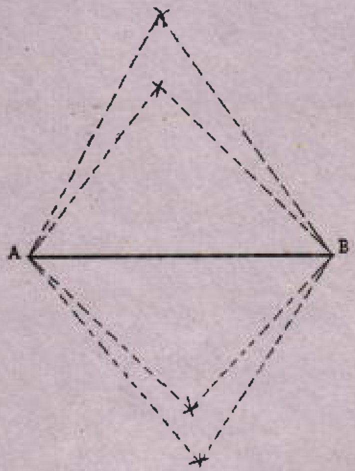
यसरी बिन्दुले कुनै खास नियमका आधारमा बनाएको बाटोलाई नै बिन्दु पथ भनिन्छ ।

शिक्षक बासुदेवले विभिन्न उदाहरणहरू जस्तै घडीको सूइको टुप्पोले बनाएको पथ, साइकल गुड्दै जाँदा पाङ्ग्राको परिधिमा रहेको बिन्दुले बनाएको पथ, कुनै निश्चित उचाइ र दिशामा उडिरहेको हवाइजहाजले बनाएको पथ, केबुलकारमा



चढेको बेला कुनै मानिसको टाउकाले बनाएको पथ आदि दिनुभयो र कुन बिन्दु पथ हुन् र कुन होइनन् भन्ने बारेमा छलफल गराउनुभयो ।

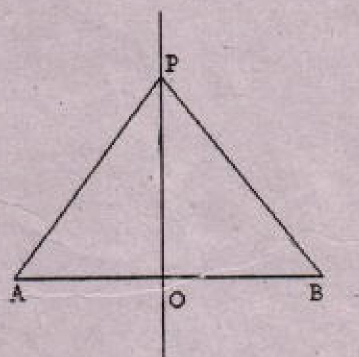
शिक्षक बासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई 8cm लामो रेखाखण्ड AB खिच्न लगाउनुभयो । A र B बिन्दुबाट 5cm, 6cm, 7cm, 8cm, 10cm, को दूरीमा रहेका बिन्दुहरूको स्थिति पत्ता लगाउन निर्देशन दिनुभयो । ती सबै बिन्दुहरू जोड्दा कस्तो चित्र बन्दछ ? पत्ता लगाउन दिनुभयो ।



सो चित्र र रेखाखण्ड AB बीच कस्तो सम्बन्ध रहेको हुन्छ ? छलफल गराउनुभयो ।

माथिको छलफलबाट एउटा साध्यको कथन स्थापित हुन्छ ।

"एउटा रेखाखण्डको छेउ बिन्दुहरूबाट समदूरीमा पर्ने बिन्दुहरूको बिन्दुपथ त्यो रेखाखण्डको लम्बार्धक हुन्छ" ।

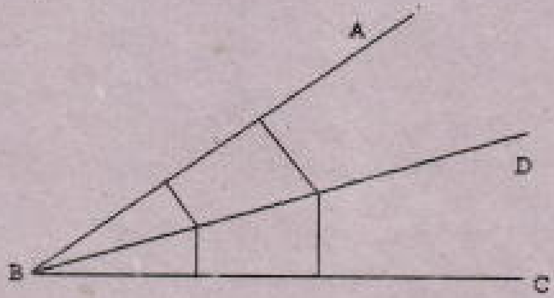


शिक्षक बासुदेवले यस साध्यको शैद्धान्तिक प्रमाणका बारेमा पनि छलफल गर्नुभयो ।

उहाँले विद्यार्थीहरूलाई एउटाकोण ABC खिच्न लगाउनुभयो । कोणको अर्धक रचना गर्न लगाउनुभयो । कोणका अर्धकका बिन्दुहरूबाट कोणका बाहुहरूमा लम्ब खिच्न लगाउनुभयो । ती लम्बहरूको दूरी नापेर निश्कर्ष निकाल्न निर्देशन दिनुभयो ।

निश्कर्ष : कोणका अर्धक बिन्दुहरू यसका भुजाबाट समदूरीमा पर्दछन् ।

यस साध्यको शैद्धान्तिक प्रमाण बारे पनि छलफल गराउनुभयो ।



सममिति (Symetry) :

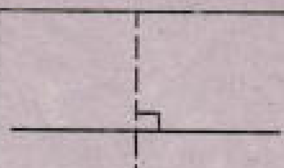
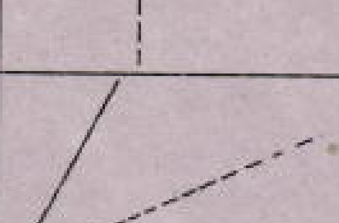
शिक्षक बासुदेवले विद्यार्थीहरूलाई पुतलीको चित्र बनाउन लगाउनुभयो । पुतलीको बीचमा ऐना राख्न लगाउनुभयो । चित्र कस्तो देखिन्छ छलफल गराउनुभयो ।

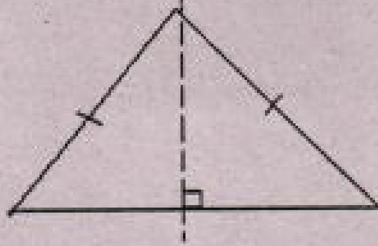
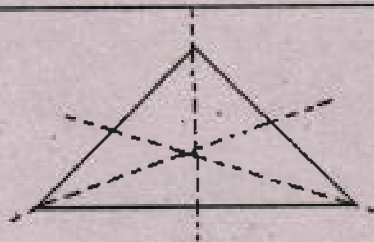
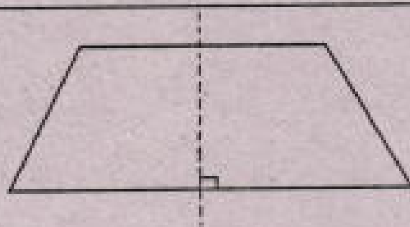
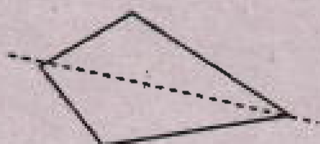
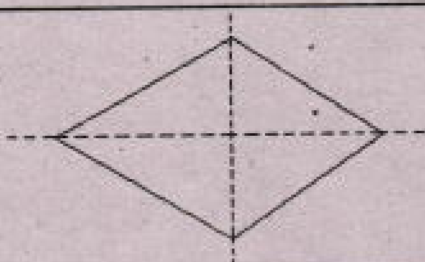
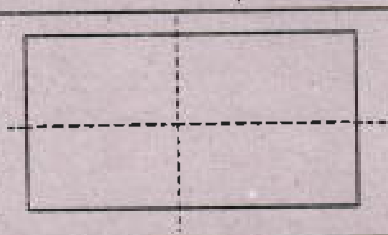
उहाँले एउटा कागज पट्ट्याएर पटयाएको भाग तिर पर्ने गरी सियोले प्वालपारी पुतलीको आधा भाग बनाउन लगाउनुभयो । कागज खोल्दा कस्तो चित्र बन्यो छलफल गराउनुभयो । यही क्रियाकलाप कार्बन राखेर पनि गर्न लगाउनुभयो ।

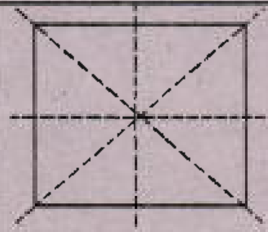
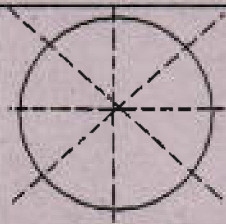
यसरी आधा चित्रमा राख्दा पूरा चित्र देखिने रेखालाई सममिति रेखा (Line of symetry) भनिन्छ ।

उहाँले विद्यार्थीहरूलाई विभिन्न खालका पातहरू बाड्नु भयो । ऐना राखेर सममिति रेखा भए नभएको छुट्याउन लगाउनुभयो ।

उहाँले विभिन्न ज्यामितीय चित्रहरूको सममिति रेखा पत्ता लगाउन दिनुभयो ।

१. रेखाखण्ड		एउटा सममिति रेखा
२. कोण		एउटा सममिति रेखा

३. समद्विबाहु त्रिभुज		एउटा सममिति रेखा
४. समबाहु त्रिभुज		३ ओटा सममिति रेखाहरू
५. समानपाद समलम्ब चतुर्भुज		एउटा सममिति रेखा
६. चङ्गा		एउटा सममिति रेखा
७. समबाहु चतुर्भुज		२ ओटा सममिति रेखाहरू
८. आयात		२ ओटा सममिति रेखाहरू

९. वर्ग		४ ओटा सममिति रेखाहरू
१०. वृत्त		अनगिन्ती सममिति रेखा हरू

२. बिन्दु सममिति (Point symetry) :

कुनै ज्यामितीय आकृतिलाई कुनै बिन्दुबाट 180^0 परिक्रमण गराउँदा यसका भागहरू अपरिवर्तनीय (Invariant) रहन्छ भने सो आकृतिलाई बिन्दु सममिति भएको आकृति भनिन्छ । जुन बिन्दुबाट परिक्रमण गराइन्छ । त्यस बिन्दुलाई सममितिको केन्द्र (Center of symetry) भनिन्छ ।

उदाहरणको लागि POd लाई 180^o घुमाउँदा पूरानै अवस्थामा यथावत रहेजस्तो देखिन्छ । यसमा बिन्दु सममिति छ ।

शिक्षक वासुदेवले अङ्ग्रेजी वर्णमालाका विभिन्न अक्षरहरू र हिन्दु अरेबिक अङ्कहरू दिएर रेखा सममिति र बिन्दु सममिति भएका अक्षरहरू, अङ्कहरू पत्ता लगाउन दिनुभयो ।

३. परियोजना कार्य :

वृत्त, विन्दुपथ र सममिति शिक्षणको लागि प्रत्येकको एक एक ओटा सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

४. **सन्दर्भ सामग्री :**

- डा. हिराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण, भूँडी पुराण प्रकाशन ।
- S.M. Maskey, Modern Mathmatics, Ratna Pustak Bhandar.
- R.K. Bansal, Concise Mathematics, Selina Publishers.
- माध्यमिक शिक्षा विकास केन्द्र , गणित प्रशिक्षक निर्देशिकाहरू (मा.वि, नि.मा.वि),
- SEDP, Four Week Inservice Teacher Training Package (Lower Secondary and Secondary)
- शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र, गणित शिक्षण प्रशिक्षक निर्देशिका
- Wally 'wallypop' Green, Mathematical Adventures for Teachers and Students, University of Philippines, NISMED.
- IGNOU, Teaching of Mathematics,
- Morgan Ward et.al, Modern Elementary Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- Paw J. Kelly et. al, Geometry, Eurasia Publishing House (P) Ltd.

१. परिचय :

गणित विषय सूत्रहरूको प्रयोग वा काल्पनिक समस्याहरूको समाधान वा निरस विषय मात्र हो भन्ने धारणालाई गलत सावित गर्ने विषयवस्तुमध्ये यो टेसेलेसन पनि एउटा हो । यसले विद्यार्थीहरूमा सिर्जनात्मक सोचको विकास गराउँछ । निम्नमाध्यमिक तहमा यो विषयवस्तुको प्रयोगले "गणित एक कला हो" भन्ने पनि पुष्टि गर्दछ । नियमित/अनियमित ज्यामितीय आकारहरूले नखप्ट्याइकन कुनै निश्चित ठाउँ पूरा गर्ने प्रक्रियालाई टेसेलेसन भनिन्छ ।

कुनै पनि ठाउँ वा वस्तुलाई चित्रको सहायताले सानो रूपमा लेखिन्छ । जस्तै : नेपालको नक्सा, कुनै शहरको म्याप आदि । त्यसरी सानो रूपमा व्यक्त गरिनुलाई त्यस वस्तु वा ठाउँको स्केल ड्रइङ्ग गरिनु भनिन्छ । यहाँ आकार उस्तै हुन्छ तर उत्रै हुँदैनन् ।

हवाइजहाज/पानीजहाज आदि चलाउँदा चालकले जहाज कुन दिशातर्फ जाँदैछ वा जानु पर्छ भनी थाहा पाउन उत्तरी ध्रुवको सहायता लिनै पर्नेहुन्छ । मानौं जहाज 90° मा मोड्नु पर्‍यो भने उत्तरी ध्रुवलाई आधार मानेर 90° पट्टिको सूईको बाटोको आड् लिई अगाडि बढछ । केही दूरी पार गरेपछि फेरि दिशा बदल्नु पर्‍यो भने फेरि उत्तरी ध्रुवको आधारमा आवश्यक डिग्रीको कोणअनुसार चल्नु पर्ने हुन्छ ।

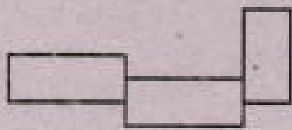
२. विषयवस्तु :

२.१ टेसेलेसन :

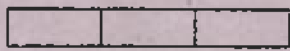
शिक्षक मनोहर प्रायजसो गणित शिक्षणमा केहीनकेही सामग्रीको प्रयोग गर्नुहुन्छ । एक दिन मैले उहाँको कक्षा अवलोकन गरें । सो दिन उहाँले टेसेलेसनसम्बन्धी पाठ शुरु गर्न लाग्नु भएको थियो ।

उहाँले कक्षाको अनुगमनमा एकजना विद्यार्थीलाई डाक्नुभयो । ती विद्यार्थीलाई बाक्लो कागजको एउटा आयत (करिब 30cm×20cm) र चक्र एक टुक्रा दिनुभयो । यत्तिकैमा सबै विद्यार्थीहरू ज्यादै उत्सुक देखिए । त्यस बेला मनोहरजीले कक्षामा हुन् गइरहेको क्रियाकलाप बारे छोटो जानकारी दिनुभयो: "तिम्रो साथीले यहाँ भुईंमा केही चित्र बनाउँदैछ, उसले राम्रो चित्र बनाउन के गर्नुपर्छ ? तिमीहरूले उसलाई सुझाव दिनुपर्छ ।" मनोहरजीले कक्षामा बढी आवश्यक होहल्ला तथा विद्यार्थीहरूको समूह ज्यादै ठूलो होला भन्ने ठान्नु भई उहाँले विद्यार्थीहरूलाई १०/१० जनाको समूहमा बाँड्नुभयो र सबभन्दा पहिले पहिलो समूहलाई कक्षाको प्राङ्गणमा पंतिवद्ध गरेर अवलोकन गराउनुभयो ।

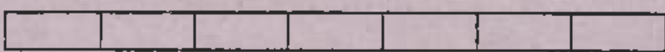
मनोहरजीले पहिलो विद्यार्थीलाई कागजको आयत भुइँको एक छेउमा राखेर त्यसको वरपर परिधिमा भुइँमा चकले कोर्न लगाउनुभयो । त्यसको सँगै अर्को दुईओटा पनि कोर्न भन्नुभयो । तर निम्नअनुसार कोरेछ ।



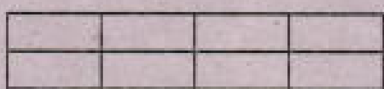
मनोहरजीले अवलोकन गर्ने विद्यार्थीहरूलाई प्रश्न गर्नुभयो : "के गरेमा चित्र स्पष्ट र मनमोह हुन्छ होला ?" यत्तिकैमा अर्को एकजना विद्यार्थीले निम्नअनुसार चित्र कोरेछ :



फेरि मनोहरजीले प्रश्न गर्नुभयो "कुनचाहिँ चित्रमा फेरि अर्को चित्र थप्नु पर्‍यो भने सजिलो होला ?" अवलोकन गर्ने विद्यार्थीहरूले "पछिल्लो चित्र" भन्ने जवाफ दिए र किन भनी सोधिएको प्रश्नमा "यो चित्र सीधा एउटै रेखामा बनेको छ र सबै चौडाइहरू एक आपसमा जोडिएका छन्" भन्ने उत्तर दिए । सो चित्रमा अरु तीनओटा चित्र थप्न अर्को समूहका विद्यार्थीहरूलाई भन्नुभयो । अरु विद्यार्थीहरूलाई पनि पालैपालो चित्र सीधा रूपमा

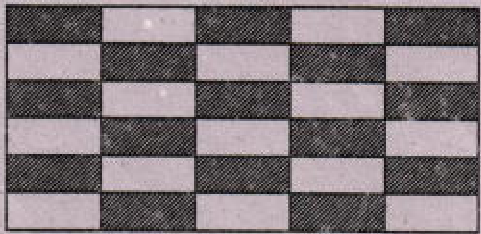


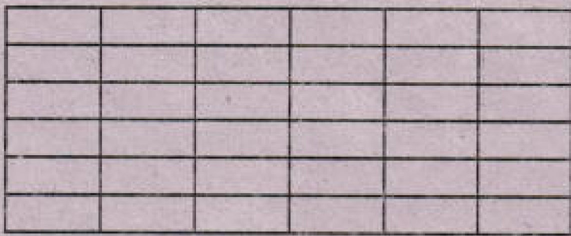
खिच्न लगाउँदा अर्को भागको भित्तामा भेटियो र अर्को चित्र फेरि लहरको मुन्तिर लेख्न लगाउनुभयो ।



यस प्रकारका चित्रहरू प्राय: जसो विद्यार्थीलाई १ वा २ ओटा खिँच्न लगाई आ-आफ्नो स्यानमा फर्काउनुभयो र कक्षामा मनोहरीले एउटा काम दिनुभयो "तिम्रा साथीहरूले अहिले गरेको जस्तै एउटा पानामा पेन्सिलले पूरा गर ।" त्यसपछि उहाँले कक्षा क्रियाकलापमा भाग लिएका विद्यार्थीहरूलाई सबै समूहमा सहयोगका लागि 5cm×3cm का बाक्लो कागजका टुक्राहरू दिएर पठाउनु भयो । सबैले आआफ्नो पानामा भरेर देखाए । त्यसैगरी कागजका वर्गबाट पनि पाना भर्न लगाउनुभयो ।

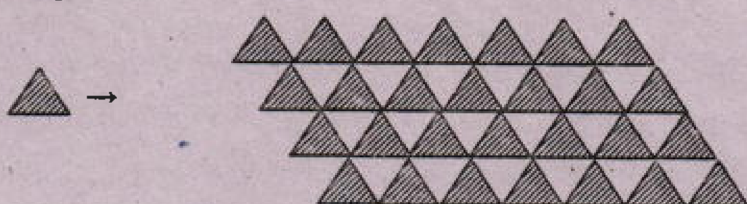
शिक्षक मनोहरजीले एकैनाशका 5cm×3cm का दुई फरकफरक ढङ्गका पातलो कागजका समानान्तर चतुर्भुजहरूको दुई चाङ (करिब ५० ओटा) समूहगत रूपमा आआफ्नो पानामा टाँस्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीहरूले निम्नअनुसारको आकृति तयार पारे ।

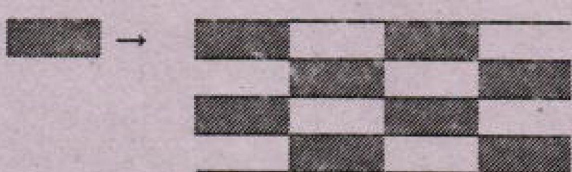




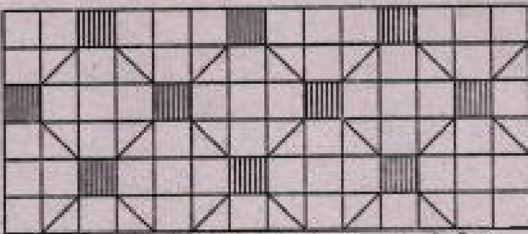
कुनै आकारबाट नखप्ट्याइकन र ठाउँ खाली नराखीकन समतल सतह ढाक्ने वा छोप्ने प्रक्रियालाई टेसेलेसन वा टाएलिङ् (Tessellation or Tiling) भनिन्छ ।

मनोहरजीले विद्यार्थीहरूलाई परिभाषा लेख्न लगाउनुभयो । उनीहरूले लेखेका परिभाषा माथि लेखिएको परिभाषासँग दाँज्न लगाउनुभयो । कक्षामा अर्को ज्यामितीय आकारहरू (जसलाई Template भनिन्छ) देखाउनुभयो र सो आकारबाट बनाइएको टेसेलेसन चार्ट पनि देखाउनुभयो ।





मनोहरजीले निम्न टेसेलेसनहरू भएको चार्ट देखाएर फरक छुट्याउन लगाउनुभयो ।



विद्यार्थीहरूका उत्तर सुनेपछि उहाँले फेरि प्रश्नहरू गर्नुभयो "पहिलो चार्टका कुनै एउटा चित्र कस्तो छ ? दोस्रोमा कतिओटा चित्रको बनोट छ ? त्यस्तै तेस्रो टेसेलेसन कस्तो चित्रको हो ?

१.	उस्तै नियमित ज्यामितीय आकृति (Regular polygon) प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनलाई नियमित टेसेलेसन (Regular tesselation) भनिन्छ । जस्तै : समबाहु त्रिभुज, वर्ग ।
२.	दुई वा दुईभन्दा बढी नियमित ज्यामितीय आकृति प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनलाई अर्धि नियमित टेसेलेसन (Semi-regular tessellation) भनिन्छ । जस्तै : माथिको चार्ट नं ३ मा वर्ग र अष्टभुजको जोड्को टेसेलेसन ।
३.	अनियमित आकृतिबाट बनेका टेसेलेसनलाई अनियमित टेसेलेसन (Irregular tessellation) भनिन्छ । जस्तै : चार्ट नं ३ ।

त्यसपछि मनोहरजीले विद्यार्थीहरूलाई ती टेसेलेसनहरूका परिभाषा लेख्न भन्नुभयो । लेखिएका परिभाषा माथि लेखिएका परिभाषासँग दाँज्न लगाउनुभयो । उहाँले विद्यार्थीहरूलाई समूहमा विभाजन गर्नुभयो ।

विभाजित विद्यार्थीहरूलाई बाक्लो कागजका समभुज, त्रिभुज, वर्ग, समपञ्चभुज, समषष्टभुज, समसप्तभुज र समअष्टभुजका Template वितरण गर्नु भई नियमित टेसेलेसन गराउनुभयो । प्रत्येक समूहबाट एकएकजनालाई प्रस्तुत पनि गराउनुभयो । जहाँ समभुज, त्रिभुज, वर्ग र समषड्भुजबाट गरिएको मात्र टेलेसेसन भयो तर समपञ्चभुज, समसप्तभुज र समअष्टभुजबाट टेसेलेसन भएको देखिएन । उहाँले माथिका Template हरू प्रयोग गरी अर्ध नियमित टेसेलेसन तयार पार्ने गृहकार्य पनि दिनुभयो । उहाँले टेसेलेसनसम्बन्धी निम्नलिखित सामग्रीहरू पनि थप अध्ययनको लागि दिनु भयो ।

टेसेलेसन :

अनुरूप ज्यामितीय आकृतिहरू (जसलाई टायल भनिन्छ) द्वारा समतल सतह छाप्ने (बुट्टा तयार गर्ने) तरिकालाई टेसेलेसन भनिन्छ । टेसेलेसन गर्दा सम्पूर्ण समतल सतह उस्तै खालका आकृतिहरू (टायल) ले मात्र ढाकिएका हुन्छन् जसका प्रत्येक कुना समान खालका बहुभुजहरूले समान क्रममा (एउटै दिशामा) घेरेका हुन्छन् । टेसेलेसन गर्दा टायलहरूका बीचमा खाली ठाउँ हुनुहुँदैन र खप्टिनु पनि हुँदैन । जुनसुकै आकारको टायलबाट टेसेलेसन

गर्न सकिदैन । टेसेलेसन गर्न सकिने ज्यामितीय आकृतिहरूमा समभुज त्रिभुज, वर्ग र नियमित षडभुज मात्र हुन् । वृत्त, पञ्चभुज सप्तभुज आदि आकृतिबाट टेसेलेसन गर्न सकिदैन । टेसेलेसन गर्न सम्भव हुनका लागि टायलका बिन्दुहरूमा बन्ने कोणहरू जोड्दा ३६०° हुनु पर्दछ । जस्तै समवाहु त्रिभुजमा प्रत्येक कोण ६०° हुने हुँदा ६ ओटा कुनाहरू मिल्दा ३६०° हुन्छ भने वर्गमा ४ ओटा कुना र नियमित षडभुजमा ३ ओटा कुनाहरू मिल्दा ३६०° हुन्छ । तर नियमित पञ्चभुजमा प्रत्येक भित्रीकोण १०८° हुने हुँदा जति सङ्ख्यामा टायल मिलाए पनि ठीक ३६०° हुन् सक्दैन । त्यसैले यसबाट टेसेलेसन गर्न सम्भव छैन ।

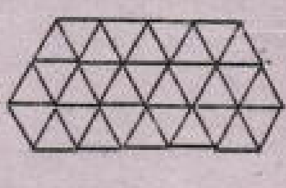
टेसेलेसनको प्रकार :

टेसेलेसन मुख्यतया नियमित, अर्धनियमित र अनियमित गरी तीन प्रकारका हुन्छन् । एकै प्रकारका नियमित ज्यामितीय आकृतिहरूबाट हुने टेसेलेसनलाई नियमित टेसेलेसन भनिन्छ । त्यसैगरी दुई वा सोभन्दा बढी प्रकारका नियमित ज्यामितीय आकृतिहरूबाट हुने टेसेलेसनलाई अर्धनियमित टेसेलेसन भनिन्छ । अनियमित आकृतिहरूबाट हुने टेसेलेसन (त्रिभुज वा चतुर्भुजबाट हुने) लाई अनियमित टेसेलेसन भनिन्छ ।

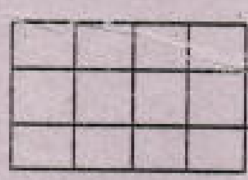
टेसेलेसन

नियमित	अर्धअनियमित	अनियमित
$३^{६}$	३-४-६-४	अनियमित बहुभुज
	$३^{३}$-४	
$४^{४}$	$३^{२}$-४-३-४	Demi-regular
	$३^{४}$-६	Vertex-1
	३-६-३-६	३-४-३-१२
$६^{३}$	४-$८^{२}$	Vertex-2
	३-$१२^{२}$	३-१२-१२
	४-६-१२	Curved shape

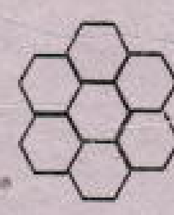
क) **नियमित टेसेलेसन**



$३^{६}$ टेसेलेसन



$४^{४}$ टेसेलेसन



$६^{३}$ टेसेलेसन

टायल

६ ओटा त्रिभुजबाट गरिएको

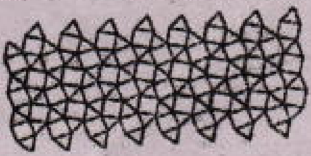
टायल

४ ओटा वर्गबाट हुने टेसेलेसन

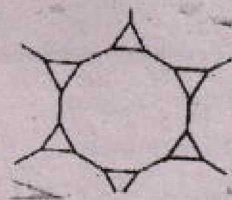
टायल

३ ओटा षडभुजबाट हुने

ख) अर्ध नियमित टेसेलेसन

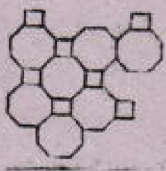


३^{२}-४-३-४ टेसेलेसन

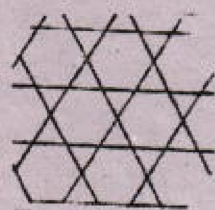


३-१२^{२} टेसेलेसन

टायल



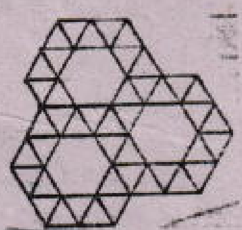
४-८^{२} टेसेलेसन



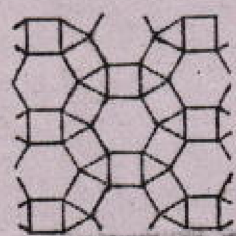
३-६-३-६ टेसेलेसन

टायल

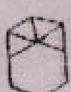
टायल

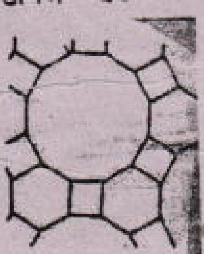


३^{४}-६ टेसेलेसन



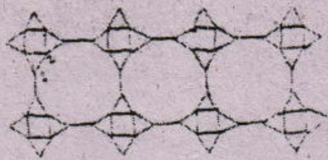
३-४-६-४ टेसेलेसन

टायल 

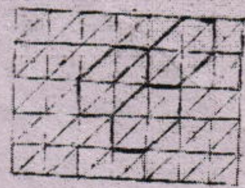


४-६-१२ टेसेलेसन

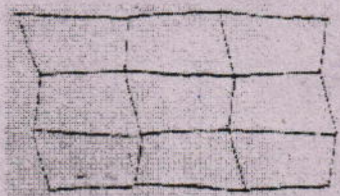
ग) अनियमित टेसेलेसन

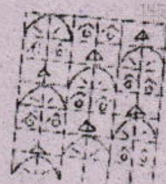


Demi-regular टेसेलेसन

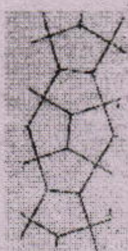


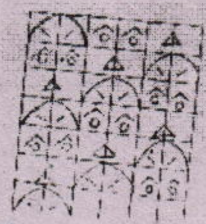
त्रिभुजबाट हुने टेसेलेसन

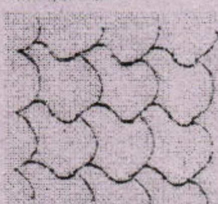




अनियमित बहुभुजबाट हुने टेसेलेसन



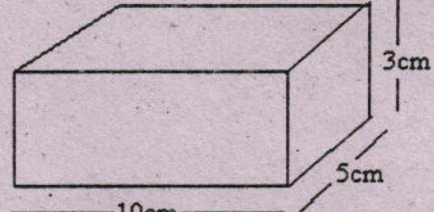




Curve shape बाट हुने टेसेलेसन

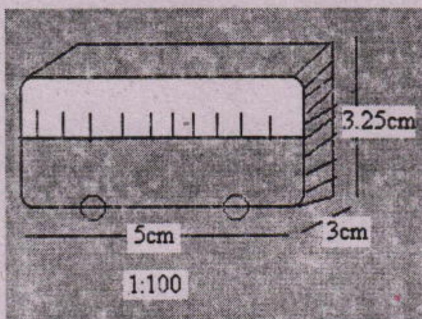
२.२ स्केल ड्इङ्

मनोहरजीले 1m को स्केल दिई विद्यार्थीहरूलाई कक्षाकोठाको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ निकाल्न लगाउनुभयो । कक्षाकोठाको लम्बाइ 10m, चौडाइ 5m र उचाइ 3m रहेछ । एकजना विद्यार्थीलाई कालोपाटीमा 3m कोठाको नमूना बनाए ।



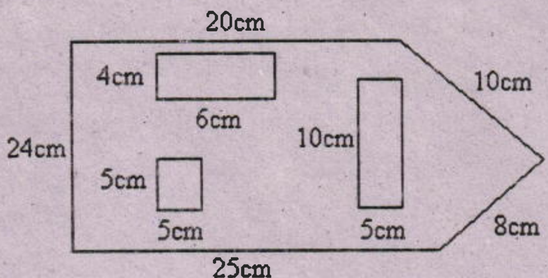
त्यसपछि सबै विद्यार्थीहरूलाई स्केलका सहायताले आआफ्नो कापीमा लम्बाइ 10cm, चौडाइ 5cm र उचाइ 3cm को कालोपाटीमा लेखेअनुसारको चित्र बनाउन लगाउनुभयो र प्रश्न गर्नुभयो "किन 10m लाई 10cm को चित्र बनाइएको होला?" । विद्यार्थीहरूले ठीकसँग उत्तर दिन सकेनन् । अनि भन्नुभयो यो वास्तविक कोठाको सानो रूप हो । जस्मा प्रत्येक भागहरू 1:100 को अनुपातमा बनाइएको छ । किनभने 10m भनेको 100cm हो र 1000cm लाई 10cm को रूपमा व्यक्त गर्दा सानो चित्र वास्तविक वस्तुको 10:1000 अथवा 1:100 भाग हुन्छ ।

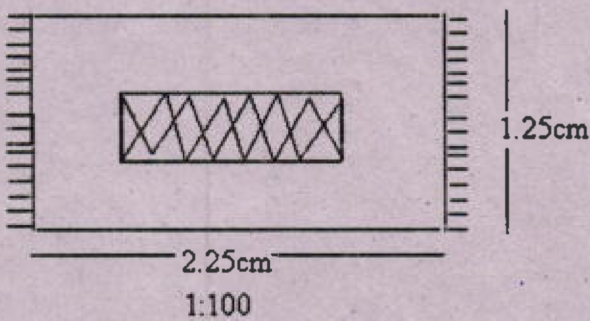
यसरी वास्तविक चित्रलाई सानो रूपमा प्रस्तुत गर्नु नै स्केल ड्रइङ हो भनी थप्नुभयो । उहाँले समूहगत रूपमा विद्यार्थीहरूलाई विद्यालयको नक्शाको स्केल ड्रइङ गर्ने कार्य दिनुभयो ।

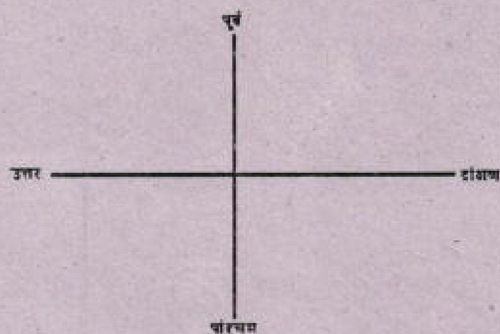


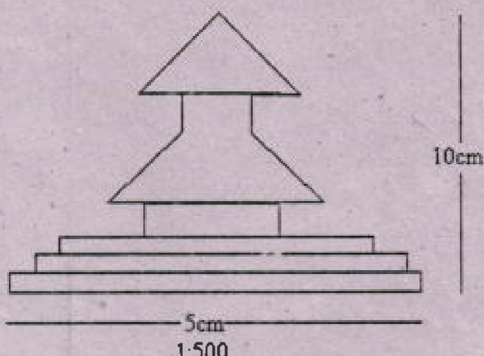
सबै समूह नेतालाई स्केल ड्रइङ प्रस्तुत गराउनुभयो । एउटा समूहका विद्यार्थीहरूले 1m=1cm एकाइ छान्दा चित्र ठूलो बन्ने भएकोले 1cm = 20m एकाइ लिएर ड्रइङ गरेको रहेछ । जुन 1:200 भागको भनी विद्यार्थीले आफ्नो प्रस्तुतिमा बताए । त्यस्तै बाँकी समूहले 1m=1cm मानेर नै आफ्नो स्केल ड्रइङ बनाएको बताए । यत्तिकैमा रमेशले प्रश्न गरे के जुनसुकै एकाइमा पनि स्केल ड्रइङ गर्न सकिन्छ ? यस प्रश्नको उत्तर मनोहरजीले यसरी दिए, एकाइ जतिमा बदले पनि हुन्छ तर सबै लम्बाइलाई मान्य हुने गरी लिएमा चित्र दुरुस्त हुन्छ ।

त्यसपछि मनोहरजीले तल दिइएका नमूनाहरू देखाई वास्तविक लम्बाइ निकाल्न लगाउनुभयो





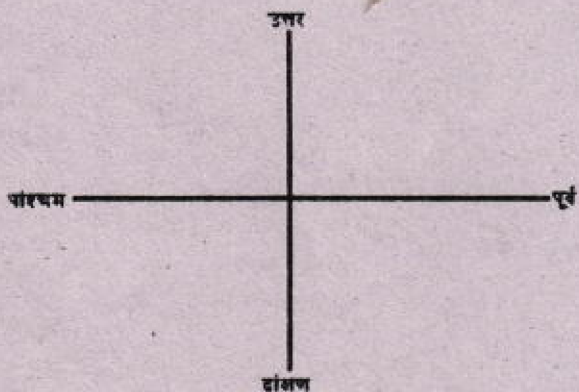




उहाँले विद्यार्थीहरूलाई आफूखुसी चित्रहरू बनाउन लगाई र त्यसको वास्तविक लम्बाइ निकाल्न लगाउनुभयो ।

२.३ बियरिङ्

शिक्षक मनोहरजीले विद्यार्थीहरूलाई खेल मैदानमा लानुभयो । जहाँ चार दिशा छुट्याई लट्ठी गाडेर डोरी बाँधिएको रहेछ । ती डोरीहरू भेटिएको ठाउँमा एकजना विद्यार्थी उभ्याउनुभयो । सबै विद्यार्थीहरूलाई त्यसलाई गाडेको क्षेत्रफल वरिपरि वृत्ताकार रूपमा उभ्याउनुभयो र निम्नअनुसार प्रश्नहरू गर्नुभयो ।

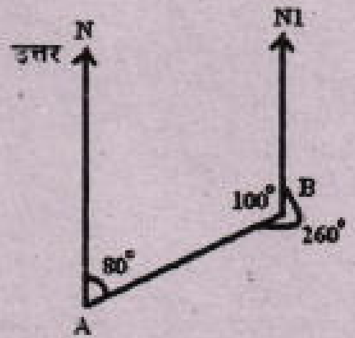


- उत्तरदेखि पूर्वसम्म कति डिग्री होला ? दक्षिणसम्म कति होला ?
- उत्तरदेखि पश्चिमसम्म कति डिग्री होला ?

सबैले उत्तरदेखि पूर्व सम्म 90°, दक्षिणसम्म 180° हुन्छ भने र उत्तरदेखि पश्चिमसम्म 90° छ । तर मनोहरीजीले सबैलाई उत्तरदेखि पश्चिमसम्म 270° हुन्छ भन्नु हुँदा विद्यार्थीहरू मान्न तयार भएनन् । विद्यार्थीहरूले यसरी असहमति जनाएपछि उहाँले घडीको सुई कसरी हिड्छ ? भनी प्रश्न गर्नुभयो । विद्याथीहरूले उत्तर-पूर्व दक्षिण-पश्चिम र उत्तर भन्ने जवाफ दिएपछि उहाँले भन्नुभयो "त्यसैले उत्तरदेखि पश्चिमसम्मको कोण 270° हुन्छ" । विपिन ले
प्रश्न गरे "किन उत्तरी दिशालाई आधार मानेको होला, सर ?" मनोहरजीले विपिनलाई स्यावासी दिदै उत्तर दिए कि चुम्बकीय ध्रुवले जहिले पनि स्वतन्त्रपूर्वक रहँदा उत्तरी दिशा देखाउँछ । आकाशमा हवाई जहाज उड्दा, समुद्रमा पानी जहाज चल्दा कुन ठाउँमा र कतातिर जाँदैछ भन्ने थाहा पाउन कम्पास (Compass) को प्रयोग गर्दछन् । किनभने कम्पासमा स्वतन्त्रपूर्वक रहेको चुम्बक हुन्छ । सोहीअनुसार आफ्नो गन्तव्य पहिल्याउछन् भन्ने जवाफ दिनुभयो ।

त्यसपछि उहाँले उत्तर र पूर्वदिशाको बीचमा उत्तर-पूर्व दिशा हुन्छ भन्ने धारणा दिनुभयो । बाँकी दक्षिण-पूर्व, दक्षिण-पश्चिम, उत्तर-पश्चिमको दिशा छुट्याउने कार्य विद्यार्थीहरूलाई दिनुभयो । उत्तर-उत्तरपूर्वको कति डिग्री होला भनी प्रश्न गर्नुभयो । विद्यार्थीहरूले सजिलैसँग 45° भन्ने उत्तर दिए । बाँकी दिशाहरूको स्थिति डिग्रीमा निकाल्ने कार्य पनि दिनुभयो ।

त्यसपछि मनोहरजीले कुनै स्थानबाट अर्को स्थानको दिशास्थिति पत्ता लगाउने बारे निम्न क्रियाकलाप गराउनुभयो ।



A स्थानमा एउटा लट्ठी र B स्थानमा अर्को लट्ठी गाडिएको थियो । A बाट B को दिशा स्थिति कति होला भनी मनोहरजीले प्रश्न गर्नुभयो तर विद्यार्थीहरूले AB को दूरी निकाले । उहाँले स्थान पत्ता लगाउन दूरीका साथै डिग्री पनि आवश्यक पर्ने बारे छलफल गर्नुभयो । उहाँले भुईंमा A बाट उत्तरी दिशा छुट्याउने गरी एउटा रेखा कोर्नुभयो ? त्यस्तै A देखि B सम्म पनि रेखा कोर्नु भयो र विद्यार्थीहरूलाई $\angle NAB$ नाप्न लगाउनुभयो जुन 080° थियो । कोणको नाप गर्न ठूलो प्रोट्याक्टर प्रयोग गर्नु भएको थियो । यसलाई तीन अङ्कको बनाई 080° लेख्ने तरिका पनि बताइदिनुभयो।

त्यसैगरी B बाट A नाप्न, B मा पनि उत्तरी दिशा कोर्नु पर्ने हुन्छ । उत्तरी दिशा BN1 पनि कोर्नुभयो । अब, बृहतकोण N_1BA नै B बाट A को दिशास्थिति हुने बारे छलफल गर्नुभयो ।

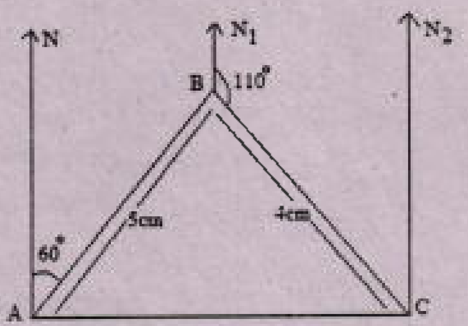
माथि $\angle N1BA=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

बृहत $\angle N1BA=360^\circ-100^\circ$

$=260^\circ$

त्यसैगरी उहाँले एउटा परिस्थिति भन्नुभयो "एउटा हवाइजहाज A बाट 60° को दिशामा 500km दूरीमा B स्थानसम्म उड्यो, B बाट 110° बनाई 400km टाढा पुग्यो भने C बाट A सम्मको दिशास्थिति र दूरी कति होला ?

विद्यार्थीहरूलाई त्यस कथाको चित्र बनाउन लगाउनुभयो र उहाँले निरीक्षण गरिरहनुभयो । विद्यार्थीहरूले A बाट B सम्मको दूरी कसरी राख्ने भन्ने निश्चित गर्न सकेनन् र त्यसपछि सबैलाई उहाँले 1km लाई 1cm एकाइ लिएमा कापीमा दिशास्थिति कोर्न सजिलो हुने बताउनु भयो । त्यसपछि सबै समूहका विद्यार्थीहरूले निम्नअनुसार चित्र बनाए ।



C बाट उत्तरी दिशा CN1 खिचेर C बाट A को दिशास्थिति र AC को लम्बाइ नाप्न लगाउनुभयो । AC रेखाको लम्बाइ km को नापमा विद्यार्थीहरूले उत्तर निकाले ।

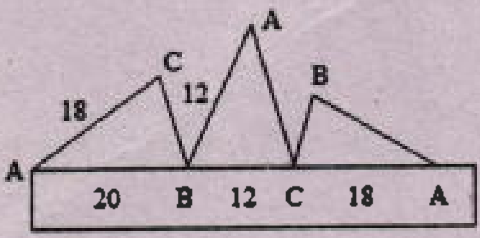
३. परियोजना कार्य :

विद्यार्थीहरूलाई निम्नलिखित कार्यहरू दिनुहोस् र यी कार्यहरूबाट उनीहरूको सिकाइमा परेको प्रभावलाई समेटेर प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् ।

- आफ्नो नातेदार वा साथीको घर जाउ र उसको घरको विभिन्न भागको स्केल ड्रइङ्ग गर ।
- तिमी आफूले बनाउने घरको विभिन्न भागहरूको स्केल ड्रइङ्ग गर ।
- विभिन्न बहुभुजहरूको प्रयोग गरी टेसेलेसन तयार गर ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- K.S. Sidhu , Teaching of Mathematics , Sterling Publishers Pvt. ltd, New Delhi
- NCERT, Content-cum Methodology of Teaching Mathematics for B.Ed. Students, New Delhi
- डा. हीराबहादुर महर्जन र साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण
- हरिप्रसाद उपाध्याय , गणित शिक्षण



सो त्रिभुज बिन्दु A पूरा एक फन्को घुमी फेरि स्केलमा बिन्दु A पुग्दा स्केलको ५० से.मि. मा पुग्यो । त्यो त्रिभुजको परिमिति ५० से.मि. भयो भनी छलफल गर्नुभयो ।

शिवजीले प्रश्न गर्नुभयो "के सबै बहुभुजको परिमिति निकाल्न बहुभुजलाई स्केलमाथि राखी घुमाउनै पर्छ ? अर्को तरिकाले पनि नाप्न सक्छौ ?" त्यसको उत्तरमा विद्यार्थीहरूले बहुभुजका भुजाहरू स्केलले नापेर त्यसको योगफल नै परिमिति हुन्छ भन्ने जवाफ दिए । उहाँले विद्यार्थीहरूको ७/७ जनाको समूह बनाई प्रत्येक समूहलाई कागजको चतुर्भुज, पञ्चभुज र षड्भुजहरू वितरण गर्नु भई परिमिति निकाल्न लगाउनुभयो । प्रत्येक समूहलाई आ-आफ्नो समूह कार्य प्रस्तुत गराउनुभयो । त्यसपछि आयत, वर्ग, समपञ्चभुज, समषड्भुजको परिमिति निकाल्ने सूत्र छलफल गर्दै प्रतिपादन गर्नुभयो ।

आयतको परिमिति = २ लम्बाइ+२ चौडाइ=२(लम्बाइ+चौडाइ)

वर्गको परिमिति = ४ लम्बाइ

समपञ्चभुजको परिमिति = ५ लम्बाइ

समषड्भुजको परिमित = ६ लम्बाइ

त्यस्तै सबै समूहलाई एउटाएउटा वृत्त दिई त्यसको परिमिति (परिधि) निकाल्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीले वृत्तलाई स्केलमा राखी पूरा एक फन्को घुमाए । परिधिलाई त्यसैको व्यासले भाग गर्न लगाउनुभयो । सबै समूहले आ-आफ्नो नतिजा २२/७ भएको बताए । त्यसपछि उहाँले निम्न कुरा स्पष्ट पारिदिनुभयो:

$$\frac{\text{वृत्तको परिधि}}{\text{वृत्तको व्यास}} = \frac{२२}{७}$$

जसअनुसार, वृत्तको परिधि (c)= π × व्यास

=2 π × अर्धव्यास

२.२ क्षेत्रफल

क) त्रिभुजको क्षेत्रफल : विद्यार्थीहरूलाई समूहमा 6cm, 8cm र 10cm भुजाहरू भएका त्रिभुजहरूको वितरण गर्नु भई त्यसको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीले त्रिभुजको

एकाइ चार

नाप

Competency: Understand and apply mathematics in physical world's metric measurement related problems.

१. **परिचय :**

भौतिक संसारमा अहिले हरेक वस्तुको पहिचान त्यसको नापद्वारा गरिन्छ । कोठामा आवश्यक वस्तुहरू कति नापका चाहिन्छन् ? कति दूरी हिड्नु पर्ला ? कति ठाउँ ढाक्छ ? आदि दैनिक जीवनसँग सम्बन्धित वस्तुहरू नापसँग सम्बन्धित रहेका हुन्छन् । कतिपय वस्तुहरूको नाप सूत्रविना नै निकाल्न सकिन्छ भन्ने कुनैको सूत्रको प्रयोगद्वारा सहज र सरल हुन्छ । त्यसमध्ये हालको माध्यमिक गणित पाठ्यक्रममा समावेश नापसम्बन्धी पाठहरूको यहाँ छलफल गर्ने जमर्को गरिन्छ ।

कुनै समतलमा कोरिएका ज्यामितीय आकारहरूको लम्बाइ तथा परिमिति त्यसका भुजाहरूको नापद्वारा निकाल्ने तथा त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुज र वृत्तको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्रको प्रतिपादनका साथै समस्याहरूको समाधान शिक्षण गर्ने तरिका यहाँ छलफल गर्नेछौं । त्यस्तै प्रिज्म, पिरामिड, बेलना, गोला र सोलीको सतहको क्षेत्रफल तथा आयतनसम्बन्धी सूत्रहरूको प्रतिपादन तथा तत्सम्बन्धी समस्याहरूको समाधान गर्ने तरिकाहरू यहाँ प्रस्तुत गरिनेछ ।

भौतिक संसारका वस्तुहरूमध्ये प्रिज्म, पिरामिड आकारका वस्तुहरू बनाउन कति परिमाणका धातुहरू आवश्यक पर्छ भनी थाहा पाउन सतहको क्षेत्रफल तथा त्यसको क्षमता तथा ओगट्ने ठाउँ बुझ्न आयतन निकालिन्छ ।

२. **विषयवस्तु :**

२.१ परिमिति :

शिक्षक शिवजी कक्षामा बहुभुज तथा वृत्तको परिमिति (परिधि) सम्बन्धी शिक्षण गर्दै हुनुहुन्थ्यो । उहाँले कक्षामा बाक्लो कागजका एउटाएउटा त्रिभुज, चतुर्भुज, पञ्चभुज, षड्भुज र वृत्तका साथै १ मिटर लामो स्केल ल्याउनुभएको थियो । उहाँले सो वस्तुहरूको परिमिति निकाल्ने एउटा क्रियाकलाप निम्नअनुसार गराउनु भएको थियो ।

दुई जना विद्यार्थीहरूलाई कक्षाकोठाको अगाडि भागमा बोलाउनुभयो । एकजनालाई स्केल समात्न लगाउनुभयो । अर्कोलाई त्रिभुज स्केलमाथि राख्न लगाउनुभयो र तलको चित्रअनुसार त्रिभुज स्केलमाथि राखी घुमाउन लगाउनुभयो ।

क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र प्रयोग गरी क्षेत्रफल निकाल्ने जहाँ त्रिभुजको उचाइ 4.8cm र आधार 10cm थियो ।

त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार भुजाको लम्बाइ×त्रिभुजको उचाइ

त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 10 \times 4.8 = 24cm^2$

शिवजीले तीनओटा भुजाहरूको नापको सहायताले पनि त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्न सकिने बारे उदाहरणसहित निम्नअनुसार प्रष्ट पार्नुभयो : 6c, 8cm र 10cm भुजाहरू भएको त्रिभुजको

अर्धपरिमिति (s)$= \frac{6+8+10}{2} = 12cm$

सो त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ जहाँ a,b र c त्रिभुजका भुजाहरू हुन् ।

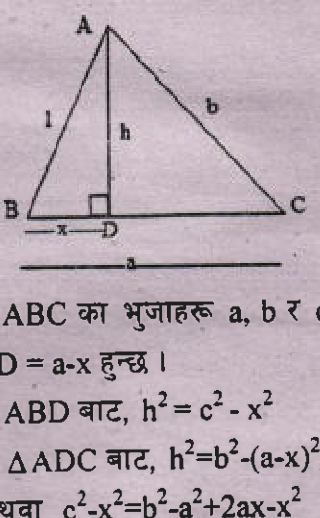
$= \sqrt{12(12-10)(12-8)(12-6)}$

$= \sqrt{12 \times 2 \times 4 \times 6}$

$= 24cm^2$

उहाँले सो सूत्र प्रयोग गरी विद्यार्थी आफैले ३/३ त्रिभुजहरूको नाप लिई क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो । सो कक्षाको विद्यार्थी रमेशले यो सूत्रको प्रतिपादन बारे प्रश्न गरे । तब शिवजीले यस प्रकार प्रमाणित गरिदिनुभयो ।

यो सूत्र गणितले Heron Greek करिब १०० बि.सं. तिर प्रतिपादन गरेका थिए । त्यसैले यो सूत्रलाई Heron's Formula पनि भनिन्छ ।



ΔABC का भुजाहरू a, b र c छन् । $AD \perp BC$, $AD = h$ र $BD = x$ मानौ । जसअनुसार $CD = a-x$ हुन्छ ।

ΔABD बाट, $h^2 = c^2 - x^2$

र ΔADC बाट, $h^2 = b^2 - (a-x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

अथवा, $c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

अथवा, $c^2 = b^2 - a^2 + 2ax$

अथवा, $x=\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}$

फेरि, $h^2=c^2-x^2$

$$=c^2-\left(\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}\right)^2$$

$$=\left(c+\left(\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}\right)\right)\left(c-\left(\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{2ac+c^2-b^2+a^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac-c^2+b^2-a^2}{2a}\right)$$

$$=\left(\frac{(a+c)^2-b^2}{2a}\right)\left(\frac{b^2-(a-c)^2}{2a}\right)$$

$$=\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a}\cdot\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2a}$$

मानौ,

a+b+c=2s,

$$=\left(2s\left(\frac{a+b+c-2b}{2a}\right)\right)\frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2a)}{2a}$$

$$=\left(\frac{2s(2s-2b)}{2a}\right)\cdot\left(\frac{(2s-2c)(2s-2a)}{2a}\right)$$

$$=\frac{2s.2(s-b)}{2a}\cdot\frac{2(s-c).2(s-a)}{2a}$$

$$=\frac{2s(s-b).2(s-c).2(s-a)}{a^2}$$

$$=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

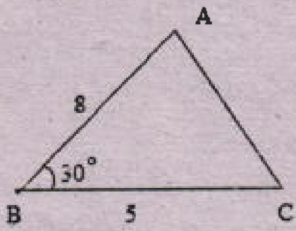
$$\therefore h=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

त्रिभुजको क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times$आधारको लम्बाइ$\times$उचाइ

$$=\frac{1}{2}\times a\times\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

त्यसपछि शिवजीले त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्ने अर्को तरिका पनि यस प्रकार प्रस्तुत गर्नुभयो :



AB=8cm, BC=5c, र <ABC=30^o नाप भएका त्रिभुज ABC प्रत्येक समूहलाई एउटाएउटा बाँड्नुभयो र AB, BC तथा <ABC नाप्न लगाउनुभयो ।

यो आँकडाबाट त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्न निम्न सूत्रको प्रयोग गर्नुभयो :

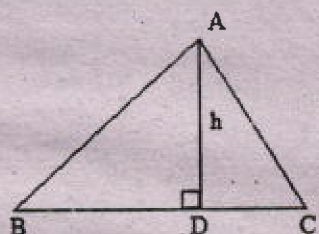
$$= \frac{1}{2} \times AB \times BC \times Sin30^o$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$= 10cm^2$$

यो सूत्रको प्रयोग गरी विद्यार्थी आफैलाई ३/३ ओटा त्रिभुजहरू बनाउन दिई त्यसको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो ।

एक जना विद्यार्थीले सो सूत्रको प्रतिपादनबारे प्रश्न गरे । तब शिवजीले यस प्रकार त्यस सूत्रको प्रतिपादन गर्नुभयो :



ΔABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार (BC)×उचाइ (AD) हुन्छ ।

यदि ΔABD मात्रै हेर्ने हो भने

SinABD=$\frac{AD}{AB}$ हुन्छ ।

अथवा, AD=AB. SinABD हुन्छ ।

त्यसैले, ΔABC को क्षेत्रफल=$\frac{1}{2}$×BC×AB×SinABC प्रमाणित गर्नुभयो । त्यसपछि अर्को विद्यार्थी केशवले प्रश्न गरे कि $\angle$C को लागि पनि यही सूत्र मान्य हुन्छ कि ? यत्तिकैमा अर्को

विद्यार्थी रमेशले उत्तर दिइ हाले कि $\angle C$ को लागि BC र AC तथा $\angle A$ को लागि AB र AC ले बनाएका कोणको नाप दिइएको हुनैपर्छ ।

त्रिभुजको क्षेत्रफल निकाल्न दिइएका दुई भुजाहरूले बनाएका कोणको नाप थाहा भएमा निम्न सूत्र प्रयोग गर्न सकिन्छ :

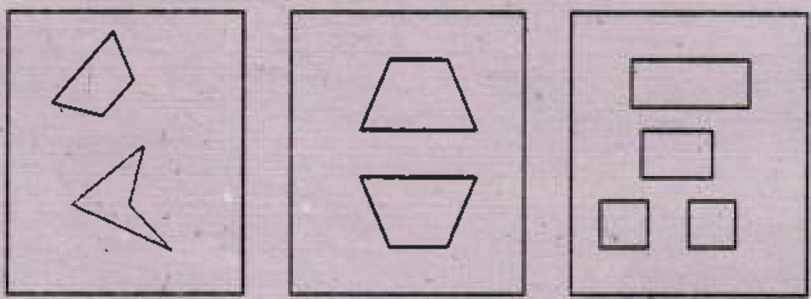
$$\Delta = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times CA \times \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A$$

ख) चतुर्भुजको क्षेत्रफल :

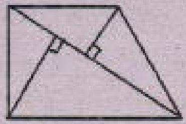
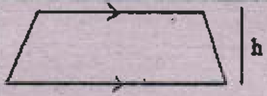
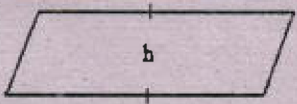
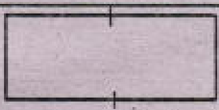
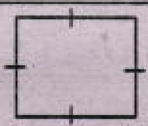
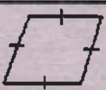
शिवजीले विभिन्न चतुर्भुजहरूको चित्र लेखिएको चार्टहरू देखाउनुभयो र ती चतुर्भुजका नाम र परिभाषा तथा भुजाहरू विद्यार्थीहरूसँग छलफल गर्दै सङ्क्षेपमा विस्तार गर्नुभयो ।



- समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजित हुन्छन् ।
- समानान्तर चतुर्भुजलाई विकर्णले समद्विभाजन गर्छ ।
- आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।
- वर्गका विकर्णहरू परस्पर लम्बार्धक भई शीर्ष कोणहरूलाई 45° हुने गरी समद्विभाजन गर्छन् ।
- समभुज चतुर्भुजका विकर्णहरूले शीर्षकोणहरूलाई समद्विभाजन गर्छ ।

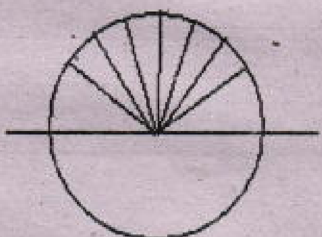
त्यसपछि उहाँले कागजका चतुर्भुजहरू बनाउने समूह कार्य दिनुभयो । विद्यार्थीहरूले आ-आफ्नो समूहमा रही कम्पास र रुलरको सहायताले माथि उल्लेख गरिएका सबै चतुर्भुजहरू तयार गरे । शिवजीले ती चतुर्भुजका क्षेत्रफल निकाल्न के गर्नुपर्छ ? भनी प्रश्न राख्नुभयो । सबै जसो विद्यार्थीहरूले चतुर्भुजलाई विकर्णले त्रिभुज बनाई बनेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफलको योग नै सो चतुर्भुजको क्षेत्रफल हुन्छ भन्ने तर्क दिए । विद्यार्थीहरूलाई समूहले बनाएका सबै

चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो र ती चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र पनि प्रतिपादन गर्न लगाउनुभयो ।

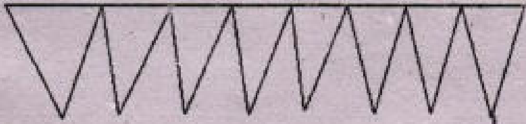
	चतुर्भुजको क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}$ विकर्ण (लम्बहरूको योग)
	समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}$ उचाइ -आधारहरूको योग)
	समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल=लम्बाइ × उचाइ
	आयत=लम्बाइ×चौडाइ
	वर्ग=लम्बाइ२
	समभुज चतुर्भुज = $\frac{1}{2}$ विकर्णहरूको गुणनफल

विद्यार्थीलाई स्वयम् आफैले नापहरू लिई माथिका चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो ।

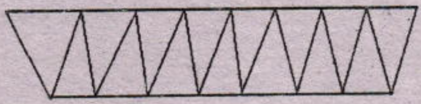
ग). वृत्तको क्षेत्रफल :



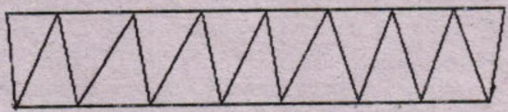
विद्यार्थीलाई शिवजीले कागजका वृत्तहरू बनाउन लगाउनुभयो । वृत्तलाई दुई भागमा बाँडी प्रत्येक भागलाई केन्द्रबाट बराबर हुने गरी ८/८ भागमा बाँड्न लगाउनुभयो । प्रत्येक भाग



आकारका हुन्छन् । ती सबै भागलाई जोडेर राख्दा



आकारको हुन्छ । शुरुमा अन्तिमको एक टुक्रालाई आधा गरी अर्को छेउमा जोड्दा



हुन्छ ।

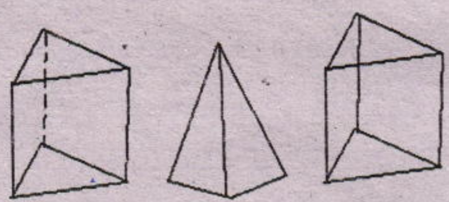
यदि ८/८ को सट्टामा १६/१६ वा सोभन्दा बढी भागमा बाँडदा त्यसले आयतको रूप लिन्छ । अर्थात् पूरा वृत्तको क्षेत्रफल आयातमा बदलिन्छ । जसको लम्बाइ πr र चौडाइ r एकाइका हुन्छन् । त्यसैले सो आयतको क्षेत्रफल $\pi r \times r = \pi r^2$ हुन्छ भन्ने तर्क दिनुभयो । त्यसपछि विद्यार्थी स्वयम्लाई फरक अर्धब्यास भएका वृत्तहरूको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो ।

२.३ सतहको क्षेत्रफल र आयतन :

प्रिज्म र पिरामिड :

शिवजीले विद्यार्थीहरूलाई समूहमा बाँड्नुभयो र प्रत्येक समूहलाई प्रिज्म र पिरामिड एकएकओटा बाँड्नुभयो । प्रिज्म र पिरामिडका भागहरूको स्वरूप, आधारहरू, आधार र शीर्ष भाग जोडने भागहरू अध्ययनगर्न लगाउनुभयो र ती दुई ठोस वस्तुहरूको फरक बताउन लगाउनुभयो ।

आधारहरू अनुरूप तथा समानान्तर भई आधारहरू जोड्ने भाग प्रिज्ममा आयताकार हुन्छन् । आधारका भुजाहरूका शीर्ष बिन्दुबाट जोडने भाग पिरामिडमा त्रिभुजाकार हुन्छन् ।



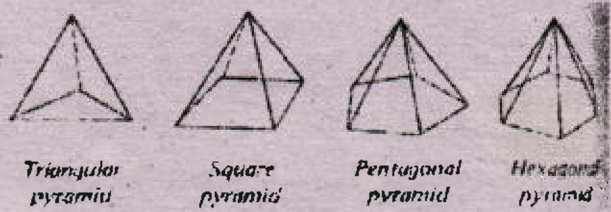
Right Prism Oblique pyramid Prism

उहाँले शीर्ष भागको मध्य बिन्दुबाट लम्ब बनाउँदा आधारको ठीक बीचमा लम्ब पर्छ भने त्यस्तो प्रिज्मलाई Right prism भनिन्छ । त्यस्तै पिरामिडको शीर्ष बिन्दुबाट लम्ब तानियो भने आधारको ठीक बीच भागमा लम्ब पर्छ भने त्यस्तो पिरामिडलाई Right pyramid भनिन्छ भनी छलफल गर्नुभयो ।

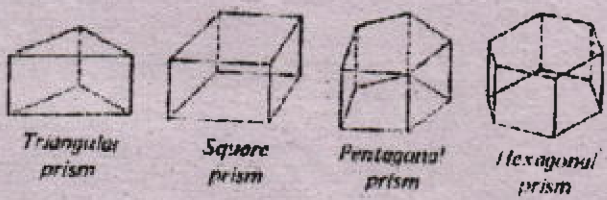
हामी यहाँ Right prism लाई प्रिज्म र पिरामिड मात्रै भन्छौं भनी उहाँले छलफल गर्नुभयो। आधारहरूको योग र छेउको भागमा बनेका आयतहरूको योग नै प्रिज्मको सतहको क्षेत्रफल हो। त्यस्तै आधार र छेउ भागमा बनेका त्रिभुजहरूको योग पिरामिडको सतहको क्षेत्रफल हुन्छ। प्रिज्ममा आयतको सङ्ख्या आधारहरूको बहुभुजको भुजाको सङ्ख्याले जनाउँछ भने पिरामिडमा समद्विभुज त्रिभुजको सङ्ख्या आधारको बहुभुजको भुजाको सङ्ख्याले जनाउँछ। जस्तै पञ्चभुजाकार प्रिज्ममा पाँचओटा आयातहरू हुन्छन् भने वर्गाकार पिरामिडमा चारओटा समद्विबाहु त्रिभुजहरू हुन्छन् भनी छलफल गर्दै निष्कर्ष निकाल्नुभयो।

Cuboid आयताकार प्रिज्म हो भन्ने बारे कक्षामा विद्यार्थीहरूबीच छलफल गराउनुभयो।

(क) पिरामिडहरू :



(ख) प्रिज्महरू :



पिरामिडका गुणहरू

- Vertex र Base हुन्छ।
- Base विभिन्न आकारका बहुभुजहरू हुन् सक्छन्।
- नियमित बहुभुज Base भएका पिरामीडहरू नियमित पिरामिड हुन्छन्।
- पिरामिडको आधार जति भुजाको छ त्यति नै सङ्ख्यामा त्रिभुजहरू जोडिएर Vertex बनेको हुन्छ।
- नियमित पिरामिडमा सबै अनुरूप त्रिभुजहरू जोडिएर Vertex बन्दछ।
- आधारका नामहरूअनुसार पिरामिडका नाम हुन्छन्।

प्रिज्मका गुणहरू

- आधार र आधारको ठीक विपरीत माथि पर्ने भाग (Top) अनुरूप हुन्छन् र ती दुई समतल समानान्तर हुन्छन्।
- आधार जति भुजको छ त्यति नै सङ्ख्यामा आयाताकार सतहले घेरेको हुन्छ।

- आधार विभिन्न प्रकारका बहुभुजले बनेको हुन् सक्दछ ।
- Base र Top नियमित बहुभुजले बनेको प्रिज्म नियमित प्रिज्म हो ।
- नियमित प्रिज्म घेर्ने सबै आयातहरू अनुरूप हुन्छन् ।
- आधारको नामअनुसार प्रिज्मको नाम राखिन्छ ।

शिवजीले प्रिज्म र पिरामिडको आयतन निकाल्न निम्न तर्क प्रस्तुत गर्नुभयो :

Cuboid को आयतन निकाल्न लम्बाइ, चौडाइ र उचाइको गुणा गरिन्छ ।

अर्थात्,

आयतन =लम्बाइ×चौडाइ×उचाइ

=(लम्बाइ×चौडाइ)×उचाइ

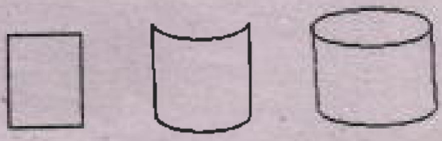
=आधारको क्षेत्रफल×उचाइ

त्यसैले प्रिज्मको आयतन त्यसको आधारको क्षेत्रफल र उचाइको गुणनफल हुन्छ । त्यसैगरी पिरामिडको आयतन उत्रै आधार र उत्तिकै उचाइ भएको प्रिज्मको आयतनको एकतिहाई हुन्छ भन्ने बारे छलफल गर्नुभयो ।

बेलना र सोली :

यदि प्रिज्मका आधारहरू बनेको बहुभुजको भुजाहरूको सङ्ख्या बढाउँदै गएमा अनगिन्ती भुजा भएको प्रिज्म बन्दछ, जुन वृत्त हुन्छ । त्यस वृत्ताकार आधार भएको प्रिज्मलाई बेलना भनिन्छ । त्यसैगरी पिरामिडको आधारको बहुभुजको सङ्ख्या बढाउँदै गएमा आधार वृत्ताकार भएको पिरामिड हुन्छ । त्यस वृत्ताकार आधार भएको पिरामिडलाई सोली भनिन्छ भन्ने बारे छलफल गर्नु भएपछि शिवजीले बेलनाको बक्र सतहको क्षेत्रफलको सूत्रको बारे निम्न क्रियाकलाप गर्नुभयो :

एक पाना आयताकार कागज देखाई त्यसको क्षेत्रफल लम्बाइ र चौडाइको गुणनफल हुन्छ भन्नुभयो । यदि दुबैतिरको लम्बाइ जोड्ने हो भने चौडाइ वृत्ताकार बन्छ, जुन वृत्तको परिधि हुन्छ । त्यसैले बेलनाको



बक्र सतहको क्षेत्रफल =कागजको क्षेत्रफल

=वृत्तको परिधि×उचाइ

=$2\pi rh$ जहाँ अर्धब्यास r र उचाई h ले जनाइएको छ ।

त्यसैगरी दुई आधारहरूको क्षेत्रफल र बक्र सतहको क्षेत्रफलको योग त्यो बेलनाको पूरासतहको क्षेत्रफल हुन्छ । सोलीको बक्र सतहको क्षेत्रफल πrl हुन्छ जहाँ अर्धब्यास r र छड्के उचाइ l छ ।

सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल बक्र सतहको क्षेत्रफल र आधारको वृत्तको क्षेत्रफलको योग हुन्छ ।

बेलना Cuboid को विस्तृत रूप भएकोले बेलनाको आयतन पनि आधारको क्षेत्रफललाई उचाइले गुणा गरेर निकालिन्छ अर्थात्, πr^2h हुन्छ ।

त्यस्तै सोलीको आयतन सोलीकै आधार तथा उत्तिकै उचाइमा रहेका बेलनाको एक तिहाई हुन्छ । अर्थात्, $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ हुन्छ ।

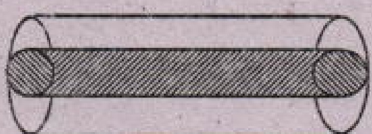
यसरी शिवजीले ठोस वस्तु कै प्रयोग गरेर यसको बनावट तथा सूत्रहरू प्रतिपादन गर्नुभयो र तत्सम्बन्धी प्रश्नहरू बताउन लगाउनुभयो ।

गोला :

गोलाको बाहिरी भाग बक्र सतह नै हुन्छ । जुन $4\pi r^2$ हुन्छ । जहाँ गोलाको अर्धब्यासलाई r ले जनाइएको छ । त्यस्तै आयतन $\frac{4}{3}\pi r^3$ हुन्छ ।

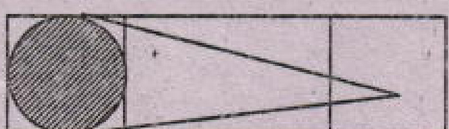
२.४ ठोस वस्तुहरूको सतह क्षेत्रफल तथा आयतन :

क) बेलनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल = समानान्तरीय आयतकार ठोस वस्तु $\times \frac{\pi}{4}$



(जहाँ वस्तुको ब्यास र वर्गको भुजाको लम्बाई बराबर तथा दुवैको उचाइ समान छन्)

ख) बेलनाको आयतन = समानान्तरीय आयताकार ठोस वस्तु $\times \frac{\pi}{4}$

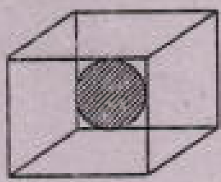


(जहाँ वस्तुको ब्यास र वर्गको भुजाको लम्बाई बराबर तथा दुवैको उचाइ समान छन्)

ग) सोलीको आयतन = समानान्तरीय आयतकार ठोस वस्तु $\times \frac{\pi}{12}$

(जहाँ वस्तुको ब्यास र वर्गको भुजाको लम्बाई बराबर तथा दुवैको उचाइ समान छन्)

घ) गोलाको सतहको क्षेत्रफल = समानान्तरीय आयतकार ठोस वस्तु $\times \frac{\pi}{6}$



(जहाँ वस्तुको ब्यास र वर्गको भुजाको लम्बाई बराबर तथा दुवैको लम्बाइ समान छन्)

ङ) वृत्तको परिधि = वर्गको परिमिति $\times \frac{\pi}{4}$

(जहाँ वृत्तको ब्यास र वर्गको भुजा बराबर छन्)

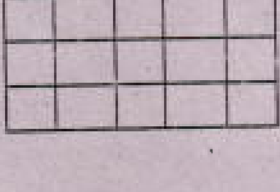
क्षेत्रफलसम्बन्धी समस्याहरू :

शिवजीले कागजको किनारामा बनेको भागको क्षेत्रफल निकाल्ने तरिका निम्नअनुसार गराउनुभयो :

आयताकार कागजको क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो । त्यसको भित्र वरिपरि २ से.मि. चौडाइको किनारा (भित्रपट्टि आयत) कोर्न लगाउनुभयो । त्यो आयतको लम्बाइ, चौडाइ तथा क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो । सो कागजको किनाराको क्षेत्रफल निकाल्न बाहिरी आयतबाट भित्री आयत भयो, यसको अर्थ बाहिरी आयतबाट भित्री आयतको क्षेत्रफल घटाउनु पर्ने रहेछ भनी विद्यार्थीलाई उहाँले स्पष्ट पार्नुभयो । त्यसैगरी भित्री आयतको नापहरू र किनाराको चौडाइ दिएमा कसरी किनाराको क्षेत्रफल निकाल्ने हो त्यससम्बन्धी विद्यार्थी स्वयम्लाई छलफल गराउनुभयो । यसका साथै बगैंचाको बीचबाट परस्पर काटी गएका बाटोहरूको क्षेत्रफल निकाल्ने तरिकाको लागि पनि कागजमा बाटोको आकार चौडाइहरू काटेर क्षेत्रफल निकाल्न लगाउनुभयो ।

शिवजीले विद्यार्थीहरूलाई एउटा प्रश्न राख्नुभयो :

10m×8m को आयताकार चोकमा 2m×2m का ढुँगाहरू छाप्न कतिओटा ढुँगा आवश्यक पर्ला ?



उहाँले चौडाइतिरबाट चारओटा र लम्बाइतिर पाँचओटा ढुँगा राख्ने विचार गर्नुभयो । के यसो गर्दा पूरा चोक ढाक्छ ? किन ? विद्यार्थीहरूले उत्तर दिए कि पूरा ढाक्छ किनभने चौडाइमा 2m ले 8m लाई, त्यस्तै लम्बाइमा 2m ले 10m लाई विशेष भाग लाग्छ, भन्ने जवाफ दिए । कति टुक्रा चाहिएलान् भनी गर्नुभएको प्रश्नमा विद्यार्थीले 5×4=20 ओटा भन्ने जवाफ दिए । त्यसैले चौरको क्षेत्रफल $=20\times4m^2 = 80m^2$ छ । यस प्रकार शिवजीले सूत्र प्रतिपादन यसरी गर्नुभयो ।

चोकको क्षेत्रफल =एउटा ढुँगाको क्षेत्रफल×ढुँगाको सङ्ख्या

अथवा, $A=a\times N$ हुन्छ ।

यसैको आधारमा उहाँले विद्यार्थीलाई पर्खालको आयतन = प्रति ईँटको आयतन×ईँटको सङ्ख्या हुन्छ भनी प्रमाणित गर्न लगाउनुभयो ।

यसै गरी कक्षाकोठाको वास्तविक लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ नाप्न लगाई पूरा सतहको क्षेत्रफल निकाल्ने कार्य समूहगत रूपमा गराउनुभयो ।

३. परियोजना कार्य :

क) तलदिइएका कार्यहरू विद्यार्थीहरूलाई गर्न दिनुहोस् । यी कार्यहरूबाट उनीहरूको गणित सिकाइमा कस्तो प्रभाव पऱ्यो, प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस् ।

- आ-आफ्नो घरको कुनै कोठाको क्षेत्रफल, आयत आदि निकाल, र ईँटको लागि कति खर्च लाग्ला ? अनुमान गर ।
- कागजको एउटा ठूलो बाकसमा बेलनाकार हुने बट्टाहरू कतिओटा अटाउलान् ? नापेर लेख ।
- कागजका बेलना, प्रिज्म, पिरामिड, सोलीका नमूनाहरू बनाऊ ।

ख) माध्यमिक तहको क्षेत्रफल तथा आयतनसम्बन्धी पाठ शिक्षणको लागि उपयोगी Learning module तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्रीहरू

- K.S. Sidhu, Teaching of Mathematics , Sterling Publishers Pvt. Ltd., New Delhi
- NCERT, Content-cum-Methodology of Teaching Mathematics for B.Ed. Student, , New Delhi
- डा. हीराबहादुर महर्जन, माध्यमिक गणित शिक्षण
- डा. हरिप्रसाद उपाध्याय ,गणित शिक्षण

एकाइ पाँच

तथ्याङ्कशास्त्र

Competency :	Appriciate and use descriptive statistics in drawing information and representation of the information, interpretation, and drawing conclusion and understand probability concepts and some theorems.

१. परिचय :

मानव सभ्यताको शुरुवात सँगसँगै तथ्याङ्कशास्त्रको जन्म भएको मानिन्छ । हेब्रुस (Hebrews) तथा फाराह (Pharachs) जस्ता प्राचीन सभ्यताका मानिसहरूले जनसङ्ख्या र धन सम्पत्तिको गणना (Census) गर्न तथ्याङ्कशास्त्रको प्रयोग गरेको पाइन्छ । प्राचीन ग्रिसमा १४०० बि.सि. मा भूमिसुधारका लागि जमिनको तथ्याङ्क सङ्कलन गरेको अभिलेख पाइन्छ । तर पनि प्राचीनकालका तथ्याङ्कीय अभिलेखका वस्तुहरू मानिस, धनसम्पत्ति र जमिन भएको अनुमान गर्ने गरिएको छ ।

तथ्याङ्क (Statistics) शब्द ल्याटिन भाषाको 'Status' तथा इटालियन शब्द 'Statista' बाट आएको देखिन्छ । जसको अर्थ राज्य सञ्चालन (Political static) भन्ने हुन्छ । तसर्थ यसको प्रारम्भमा यसको प्रयोग राज्य सञ्चालनका लागि विभिन्न कार्यहरूमा भएको भनिन्छ । गणित शिक्षाको वर्तमान आधुनिक युगमा यो विद्यालाई केवल राज्य सञ्चालन व्यवस्थामा मात्र सीमित नराखी व्यवस्थापन, विज्ञान, कृषि, वनविज्ञान, मनोविज्ञान, तथ्याङ्कशास्त्र, समाजशास्त्र, अनुसन्धान आदि हरेक क्षेत्रमा प्रयोगमा ल्याउन थालिएको छ । यसले अध्ययनका क्षेत्रका आँकडाहरू प्राप्त गरी यिनीहरूको प्रस्तुतीकरण तथा विश्लेषणका आधारमा निष्कर्षमा पुग्न सहयोग गर्दछ । गणितमा यसको प्रयोगपछि जुनसुकै अध्ययनको सन्दर्भमा पनि तथ्याङ्कका आधारमा मात्र निष्कर्षमा पुग्ने पद्धतिको विकासमा महत्वपूर्ण योगदान पुगेको छ । केही वर्षपहिले विश्वविद्यालय तहमा मात्र अध्ययन गरिने तथ्याङ्कशास्त्रलाई हाल आएर विद्यालय तहको अनिवार्य गणित विषयको पाठ्यक्रममा प्राथमिक तहदेखि नै समावेश गरिएको छ । यस एकाइमा तथ्याङ्कशास्त्रअन्तर्गत तथ्याङ्क सङ्कलन, विश्लेषण, विभिन्न किसिमका ग्राफहरू, मध्यक, मध्यिका, रित, विस्तार (Range) र सम्भाव्यता समेतका विषयवस्तुहरू र यी विषयवस्तुहरूको शिक्षण तरिकासमेत प्रस्तुत गरिएका छन् ।

२. विषयवस्तु :

२.१ तथ्याङ्क सङ्कलन र तालिकीकरण

शिक्षक रमेशले आफ्ना विद्यार्थीहरूलाई तथ्याङ्क सङ्कलनसम्बन्धी विषयवस्तुको शिक्षण गर्नका लागि प्रत्येकलाई बेग्ला-बेग्लै शीर्षकहरू छनौट गर्न लगाए । जस्तै : विगत पाँच वर्षमा आफ्नो विद्यालयबाट एस.एल.सी. उत्तीर्ण गर्ने छात्रछात्राहरूको सङ्ख्या, कक्षा ८ का विद्यार्थीहरूले अर्धवार्षिक परीक्षामा गणितमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क, कक्षाका विद्यार्थीहरूले लगाएका कपडाको रङ्ग, विद्यार्थीको उचाइ आदि । विद्यार्थीहरूले छनोट गरेको शीर्षकमा आ-आफ्नो तरिकाले तथ्याङ्कको सङ्कलन पनि गर्न लगाए । यही क्रममा विद्यार्थी प्रदिपले आफ्नो कक्षाका साथीहरूको उचाइ से.मि.मा. निम्नअनुसार सङ्कलन गरे :

118	120	120	122	123	120	121	121	120
119	121	122	120	121	118	119	120	122
120	119	121	121	120	121	122	121	119
122	121	123						

अब, शिक्षक रमेशले प्रदिपले सङ्कलन गरेको तथ्याङ्कलाई आधार मानेर निम्न लिखित प्रश्न गरे ।

क) सबैभन्दा बढी विद्यार्थी कति उचाइका रहेछन् ?

ख) सबैभन्दा बढी उचाइ कति रहेछ ?

ग) प्रदिपले जम्म कतिजनाको उचाइ सङ्कलन गरेछन् ?

घ) १२० से.मि. उचाइ हुने कति जना रहेछन् ?

प्रदिपले सङ्कलन गरेको जानकारीबाट यी प्रश्नहरूको उत्तर पाउन त कठिन छ र बढी समय लाग्छ भनेर पुष्पाले भनिन् । त्यसो भए के गर्दा माथिका प्रश्नहरूले खोजेका जानकारीहरू सजिलै पाउन सकिएला त ? शिक्षकले भने, प्रदिपले लेखेको उचाइलाई अर्को तरिकाले लेखेर राखेमा वा मिलाएर लेखेमा यस्ता प्रश्नहरूको उत्तर दिन सजिलो हुन्छ होला, छात्रा शर्मिलाले भनिन् । ल त शर्मिला कसरी लेख्ने होला ? लेखेर देखाइदेउ त ? भनी शर्मिलालाई उठाएपछि अनि निम्नअनुरूपको तालिका बनाइन । उनले तालिकाको एउटा कोठा (Column) मा उचाइलाई राखेर अर्को कोठामा जतिजनाको उचाइ समावेश छ त्यत्ति नै सङ्ख्या राखेर देखाइन् । शिक्षक रमेशले शर्मिलालाई धन्यवाद दिदै तालिकामा केही सुधार गरी निम्नअनुसारको तालिका बनाई प्रस्तुत गरे :

उचाइ से.मी.मा	मिलान चिन्ह	बारम्बारता (t)
118	||	2
119	||||	4
120	𝍸 |||	8
121	𝍸 ||||	9
122	𝍸	5
123	||	2
जम्मा		30

शिक्षक रमेशले माथि सोधेका प्रश्नहरू दोहोऱ्याए । विद्यार्थीहरूले ती सबै प्रश्नहरूको तालिका हेरेर तुरुन्त जवाफ दिए । सँगसँगै उनीहरूले सङ्कलन गरेका जुनसुकै तथ्याङ्कलाई पनि तालिकामा राखेपछि त्यसबाट पाउनु पर्ने जानकारी सजिलै पाउन सकिदोरहेछ भन्ने महशुस पनि गरे । त्यसपछि कक्षामा सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्कलाई तालिका बनाएर राख्नु पर्ने सहमति पनि बन्यो ।

शिक्षक रमेशले विद्यार्थीहरूलाई अङ्ग्रेजी पत्रिकाको एकएक प्याराग्राफ समूहमा वितरण गरे त्यसमा प्रयोग भएका स्वरवर्ण (Vowels: a,e,i,o,u) हरू प्रत्येकको सङ्ख्या गन्ती गरी लेख्न लगाए । विद्यार्थीहरूका चारओटा समूहमध्ये दुईओटाले मिलान चिन्ह प्रयोग गरी तालिका बनाए भने बाँकी दुईओटाले मिलान चिन्ह प्रयोग नगरी सङ्ख्या मात्र उल्लेख गरे । शिक्षक रमेशले ती दुवै प्रकारको तालिकाको बीचमा तुलना गर्न लगाई मिलान चिन्हसमेत भएको तालिका बनाउँदा तथ्याङ्क सङ्कलन कार्य बढी विश्वासिलो हुने र एकएक गरी टिप्दै जान सकिने भएकोले चिन्ह समेतको निम्नअनुसारको तालिका बनाउन लगाए ।

स्वर वर्ण (Vowels)	मिलान चिन्ह (Tally bars)	बारम्बारता (Frequency)
a	𝍸 𝍸 ||	12
e	𝍸 𝍸 𝍸	15
i	𝍸 |||	8
o	𝍸 𝍸 |||	13
u	𝍸 ||	7
जम्मा		55

- शिक्षक रमेशले एकजना विद्यार्थीलाई अगाडि बोलाई उसलाई आफ्ना सबै साथीहरूको जन्ममहिना पालैपालो सोधेर मिलान चिन्ह प्रयोग गरी तालिका निर्माण गर्न लगाए ।
- शिक्षक रमेशले विद्यार्थीहरूलाई समूहगत रूपमा एउटा डाइस (dice) चालिस पटक फाल्न लगाई प्रत्येक पटक केके पर्छ टिपी त्यसलाई तालिकामा देखाउन लगाए । मिलान चिन्हमा चारओटा धर्सालाई काटेपछि के सजिलो भयो , सोध्दै, गन्न सजिलो भयो भन्ने निष्कर्ष बताइदिए ।
- यसरी तथ्याङ्कलाई तालिकामा प्रस्तुत गर्दा धेरैजसो जानकारी एकै पटक थाहा पाउन सकिन्छ । यस्तो तालिकालाई बारम्बारता तालिका (Frequency table) भनिन्छ । तालिकामा मिलान चिन्ह प्रयोग गर्दा तथ्याङ्क सङ्कलन र गन्ती गर्न छिटोछरितो भई समयको बचत हुने, व्यवस्थित हुने र गल्ती हुने सम्भावना न्यून हुने हुन्छ ।

२.२ प्रस्तुतीकरणमा प्रयोग भएका तालिका तथा ग्राफबाट सूचनाको खोजी (Seeking information from tables and Graphs used in literature/display):

कुनै पनि शीर्षकमा प्राप्त सूचना एवम् तथ्याङ्कलाई तालिका तथा ग्राफमा राखी प्रस्तुत गर्दा एकै झलकमा धेरै जानकारीहरू अर्थपूर्ण तरिकाले सहजै प्राप्त गर्न सकिन्छ । कुनै पनि कोरा तथ्याङ्क (Raw data) बाट वस्तुनिष्ठ र सही सूचना एवम् जानकारीहरू सजिलै पाउन सकिदैन । त्यही कोरा तथ्याङ्कलाई तालिका र तथ्याङ्कअनुसारको ग्राफमा राखिसकेपछि त्यस्तो समस्या स्वतः हटेर जाने गर्दछ । प्राप्त तथ्याङ्कलाई आकर्षक र सजिलै बुझ्न सकिने गरी प्रस्तुत गर्नुपर्दा लेखाचित्रको प्रयोग गरिन्छ । त्यस्तै एकभन्दा बढी तथ्याङ्कहरूबीच तुलना गर्दा पनि लेखाचित्र (Graphs) ज्यादै उपयोगी मानिन्छ । यस्ता लेखाचित्र एकभन्दा बढी प्रकारका छन् । (तिनको विस्तृत चर्चापछि सोही शीर्षकमा गरिने छ ।)

तालिका तथा ग्राफको प्रयोग र यसबाट प्राप्त हुने सूचनाको खोजी गर्नेसम्बन्धी धारणाको शिक्षण गर्दा शिक्षक रमेशले कक्षाका विद्यार्थीहरूको जन्ममहिना पालैपालो सोधरे मिलान चिन्ह प्रयोग गरी निम्नअनुसारको तालिका तयार पारे :

जन्ममहिना	मिलान चिन्ह	बारम्बारता
वैशाख	卌 卌 ।।	12
जेष्ठ	卌 ।।।	8
आषाढ	卌 ।	6
....	....	....
....	....	....
चैत्र	।।	2
जम्मा		72

तालिका तयार गरी 'प्रस्तुत गरेपछि तालिकाका आधारमा निम्नलिखित प्रश्नहरूको जवाफ दिन लगाए ।

- सबभन्दा बढी विद्यार्थीहरू जन्मेको महिना कुन हो ?
- सबभन्दा कम विद्यार्थीहरू जन्मेको महिना कुन हो ?
- विद्यार्थीहरूको कूल सङ्ख्या कति छ ?
- चैत्रमा भन्दा जेठमा कति विद्यार्थी बढी जन्मेका थिए ?
- चैत्रमा भन्दा आषाढमा कति प्रतिशत विद्यार्थी बढी जन्मेका थिए ?

शिक्षक रेमशले सोधेका प्रश्नहरूमध्ये अन्तिम प्रश्नको बाहेक अन्य प्रश्नहरूको जवाफ आयो तर "प्रतिशत" तालिकाले प्रस्तुत नगरेकोले त्यो प्रश्नको जवाफ आएन । त्यसपछि उनले कुनै पनि तथ्याङ्कलाई सही प्रकारले प्रस्तुतीकरणका लागि एकभन्दा बढी उपयुक्त विधिबाट तालिका र ग्राफ तयार गार्नुपर्दछ भन्ने निष्कर्ष सुनाए । सँगसँगै यसरी तयार पारिने तालिका वा ग्राफहरूबाट एकसाथ धेरै सूचनाहरू प्राप्त गर्न सकिन्छ भन्ने कुरा पनि पुनः दोहोऱ्याए ।

नोट : विभिन्न किसिमका ग्राफ (Graphs) बारेमा अर्को पाठमा चर्चा गरिएको छ ।

२.३ विभिन्न किसिमका ग्राफहरूको निर्माण र प्रस्तुतीकरण (Drawing and interpretation of bar pictures, pie diagrams, line graphs, histograms and giving inforrmation from the collected data):

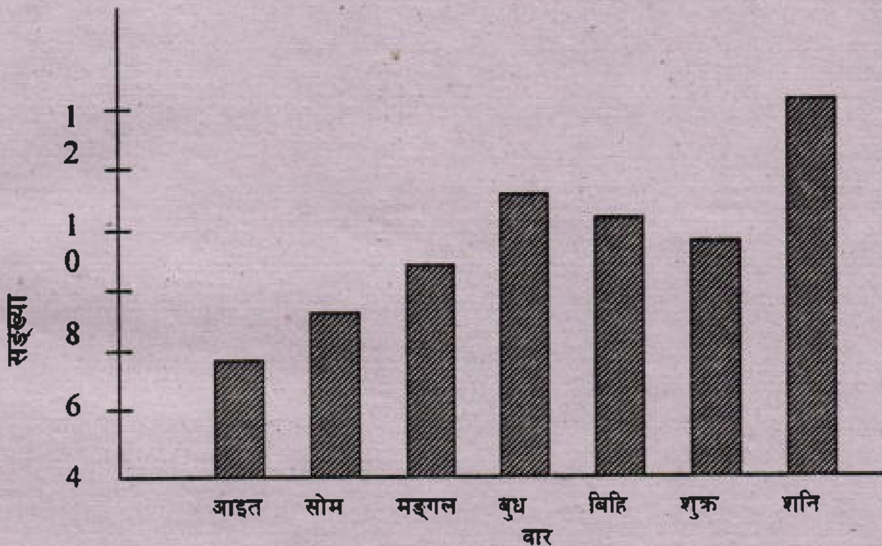
तथ्याङ्कलाई तालिकामा मात्र प्रस्तुत गर्दा सबै मानिसले त्यसलाई सहजै नबुझ्ने हुनसक्दछ । त्यसकारणले एकै झलकमा सबैले सजिलोसँग बुझनेगरी चित्र वा लेखाचित्रमा तथ्याङ्कलाई प्रस्तुत गर्दा आवश्यक सूचनाहरू प्राप्त गर्न र सामान्यीकरण गर्न सजिलो हुन्छ । तथ्याङ्कलाई लेखाचित्रमा देखाउँदा तथ्याङ्कको प्रकृतिअनुसार फरकफरक तरिका वा उपायहरू अपनाउन सकिन्छ । तथ्याङ्कलाई तालिकामा राखिसकेपछि त्यसको स्वरूपअनुसार निम्नअनुसारका कुनै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्ने गरिन्छ । जसका बारेमा यहाँ विस्तृत चर्चा गरिनेछ :

- चित्रलेखाचित्र (Picto graph)
- स्तम्भ लेखाचित्र (Bar graph)
- वृत्तचित्र (Pie chart)
- रेखाचित्र (Line graph)
- हिस्टो ग्राफ (Histograph)
- सञ्चित बारम्बारता वक्र (Ogive)

२.३.१ स्तम्भ लेखाचित्र (Bar graph):

शिक्षक रमेशले स्तम्भ लेखाचित्रको शिक्षण गर्ने समयमा एकजना खसी व्यापारीले एक हप्तासम्म गरेको खसी विक्रीको तथ्याङ्कलाई निम्नअनुसार प्रस्तुत गरे ।

बार	खसीको सङ्ख्या
आइतबार	४
सोमबार	५
मंगलबार	७
बुधबार	१०
बिहिबार	८
शुक्रबार	७
शनिबार	१२



प्राप्त तथ्याङ्कलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिसकेपछि शिक्षक रमेशले विद्यार्थीहरूलाई तलका प्रश्नहरू गरे :

- चित्रमा स्तम्भको उचाइले के जनाएको छ ?
- चित्रमा दुईओटा स्तम्भको दूरी बराबर छ ?
- दिइएको तथ्याङ्कलाई यसरी लेखाचित्रमा किन देखाइएको होला ?
- सबभन्दा कम खसी बिक्री भएको बार कुन हो ?
- सबभन्दा बढी खसी बिक्री भएको बार कुन हो ?

यी र यस्तै प्रश्नहरूका आधारमा छलफल गरिसकेपछि विद्यार्थीहरूलाई यस्तो लेखाचित्र (Graph) लाई के भनिन्छ ? भन्ने प्रश्न गरे । यत्तिकैमा एकजना विद्यार्थीले यसलाई स्तम्भ लेखा चित्र (Bar graph) भनिन्छ भन्ने जवाफ दिए । हो यसलाई स्तम्भमा देखाइने हुनाले "स्तम्भ लेखाचित्र" भन्ने गरिएको हो भन्ने कुरा शिक्षक पिराले अझ स्पष्ट बताइदिए । साथै उनले यस्तो चित्र बनाएमा केके फाइदा हुन्छ ? भन्ने प्रश्न गर्दै निम्न कुराहरू बताइदिए :

- प्राप्त तथ्याङ्क (जानकारी) लाई स्तम्भ लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्दा बुझ्न र तुलना गर्न सजिलो पर्छ ।
- जानकारीहरूलाई अर्थपूर्ण तरिकाले यसलाई बुझाउन सजिलो पर्दछ ।
- पढ्न नसक्ने/नजान्ने मानिसले पनि यसबाट सूचना प्राप्त गर्न सक्दछ ।
- हेर्दा आकर्षक देखिन्छ ।
- स्तम्भ लेखाचित्र बनाउँदा स्तम्भको चौडाइ बराबर हुनुपर्दछ र लम्बाइले जानकारीको सङ्ख्या बताउँछ ।

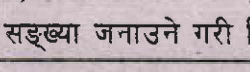
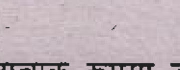
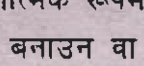
स्तम्भ लेखाचित्रका दुईओटा स्तम्भहरूको दूरी समान हुनुपर्दछ । शिक्षक रमेशले यसपछि विद्यार्थीहरूलाई "तिमीहरूलाई कुन रङ्ग धेरै मनपर्छ ?" भन्ने प्रश्न गर्दै प्राप्त तथ्याङ्कलाई स्तम्भ लेखाचित्रमा देखाउन लगाए । साथै यस्तै अन्य एकएकओटा तथ्याङ्क खोजेर स्तम्भ लेखाचित्रमा देखाउने अभ्यास गर्न पनि भने ।

नोट :
एकभन्दा बढी आपसमा सम्बन्धित तथ्याङ्कहरूलाई स्तम्भ लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । यस्ता एकभन्दा बढी आँकडा/तथ्याङ्कलाई एउटै स्तम्भ लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरिएको लेखाचित्रलाई बहुस्तम्भ लेखाचित्र (Multiple bar graph) भनिन्छ । यस्तो बहुस्तम्भ लेखाचित्र बनाउँदा पनि स्तम्भको चौडाइ बराबर बनाई लम्बाइले सङ्ख्या जनाउने गरी निर्माण गरिन्छ ।

२.३.२ चित्रग्राफ (Picto graph) :

कुनै पनि तथ्याङ्कलाई चित्रद्वारा व्यक्त गरिएमा तुलनात्मक रूपमा जीवन्त देखिन्छ । यस्तो अवस्थामा दिइएको आँकडाका बारेमा बुझ्न, धारणा बनाउन वा प्राप्त सूचनाका आधारमा सामान्यीकरण गर्न सजिलो हुन्छ । यदि प्राप्त आँकडालाई चित्रका आधारमा प्रस्तुत गरियो भने त्यसलाई चित्रग्राफ वा लेखाचित्र (Picto graph) भनिन्छ । प्राप्त तथ्याङ्कलाई अर्थपूर्ण र सजिलोसँग देखाउन सकिने भएकाले ग्राफचित्रमा यसको प्रयोग पर्याप्त मात्रामा भएको पाइन्छ । यसमा जुन कुरा प्रस्तुत गर्न खोजिएको हो, त्यसलाई सोही वस्तुको चित्रले जनाइन्छ । जस्तै :

श्री सरस्वती प्राथमिक विद्यालयको कक्षागत विद्यार्थीहरूको विवरण

कक्षा	विद्यार्थी सङ्ख्या
कक्षा-१	
कक्षा-२	
कक्षा-३	

कक्षा	विद्यार्थी सङ्ख्या
कक्षा-४	
कक्षा-५	

सङ्केत : = 5 जना विद्यार्थी

यो चित्रबाट केके सूचनाहरू थाहा पाउन सकिन्छ ?

- कक्षा एकमा सबभन्दा धेरै ३५ जना विद्यार्थी छन् ।
- कक्षा पाँचमा सबभन्दा कम १५ जना विद्यार्थी छन् ।
- तल्लो कक्षामा भन्दा माथिल्लो कक्षामा विद्यार्थी सङ्ख्या घट्दै गएको छ ।
- कक्षामा विद्यार्थी सङ्ख्या कम्तिमा १५ जना र बढीमा ३५ जना छन् आदि ।

यस्तै प्रकारको अन्य तथ्याङ्कलाई पनि चित्रग्राफमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । यस्तो ग्राफबाट प्रस्तुतीकरण सरल र ठोस खालको हुनजान्छ र सान्दर्भिक पार्न देखिन्छ । ग्राफमा प्रयोगमा ल्याइएको सङ्केत आफै एकाइको बारेमा बोल्दछन् । तर ग्राफमा प्रयोगमा ल्याइने चित्र वा सङ्केत उपयुक्त आकारको हुनुपर्दछ ।

विद्यार्थीहरूलाई चित्रग्राफको शिक्षण गर्ने समयमा शिक्षक रमेशले एउटा आँकडालाई चित्रग्राफबाट प्रस्तुत गरी त्यसलाई अध्ययन गर्न लगाउने र यस्तो ग्राफबाट प्राप्त गर्न सकिने बढीभन्दा बढी सूचनालाई टिपोट गर्न लगाउने गर्दछन् । यसरी चित्रात्मक ढङ्गले कुनै आँकडालाई प्रस्तुत गर्ने तरिकालाई के भन्न सकिन्छ ? भन्ने बारेमा छलफल गर्दछन् । यस्तो ग्राफका बारेमा विद्यार्थीले पूर्ण जानकारी प्राप्त गरेपछि थप अभ्यासका लागि विद्यार्थीहरूमा दैनिक जीवनसँग सम्बन्धित तथ्याङ्कहरू सङ्कलन गरी चित्रग्राफमा देखाउन लगाउने र आवश्यकताअनुसार सुधार गर्न लगाउने गर्दा यसको धारणा राम्रोसँग बस्ने गरेको उनको अनुभव छ ।

२.३.३ हिस्टोग्राम (Histogram) :

तथ्याङ्कशास्त्र पाठको शिक्षण गर्ने क्रममा एकजना विद्यार्थीले रमेशलाई हिस्टोग्राम भनेको कस्तो ग्राफ हो ? यो कसरी तयार गरिन्छ ? भन्ने प्रश्न गरे । उक्त विद्यार्थीको जिज्ञाशा मेटाउनका लागि उनले यसको परिचय र तयार पार्ने तरिकाका बारेमा छलफल गरे । यही क्रममा बारम्बारताको वितरण (Frequency distribution) मा श्रेणी अन्तर (Class interval) लाई ठाडो आयतद्वारा देखाइएको ग्राफ नै हिस्टोग्राम हो भन्ने निष्कर्ष निकालियो तथ्याङ्कलाई श्रेणी अन्तरमा व्यक्त गरिएको अवस्थामा आयतको माध्ययमबाट बारम्बारता जनाई लेखाचित्रमा व्यक्त गर्ने गरिन्छ । यसमा श्रेणी अन्तर फरकफरक भएको अवस्थामा आयतको चौडाइमा फरक हुनआउँछ र त्यसको मान (Frequency) क्षेत्रफलको आधारमा व्यक्त गरिन्छ । प्राप्त तथ्याङ्कमा श्रेणी अन्तर फरकफरक भएको अवस्थामा सबभन्दा पहिला त्यसलाई समान बनाई हिस्टोग्राम बनाउनु पर्दछ । यस्तो तथ्याङ्क श्रेणी अन्तरलाई समान नबनाई हिस्टोग्राम बनाउन पनि सकिन्छ तर यसरी बनाएकामा क्षेत्रफलका आधारमा बारम्बारता प्रस्तुत गर्नुपर्ने भएकाले हेर्दा अलिकठिन देखिनेजस्तो हुन्छ । तसर्थ श्रेणी अन्तरलाई समान बनाइसकेपछि मात्र यसको निर्माण गर्दा आकर्षक र स्पष्ट देखिन्छ । सामान्यतया हिस्टोग्राम बनाउन निम्न चरणहरू अपनाउनु पर्दछ :

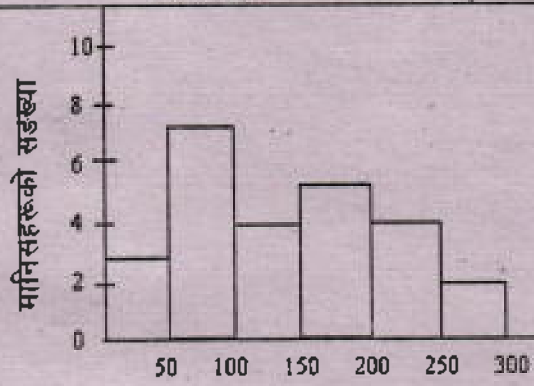
- x-अक्षमा श्रेणीअन्तर र y-अक्षमा त्यसको बारम्बारता देखाउनु पर्दछ ।
- x-अक्षमा श्रेणीअन्तरअनुसारका चौडाइ भएका आपसमा जोडिएका बारम्बारताअनुसारको उचाँइ भएका आयतहरू खिच्नु पर्दछ ।
- y-अक्ष जहिले पनि शुन्यबाट शुरु गर्नुपर्दछ, तर x-अक्ष कुनै पनि उपयुक्त स्थानबाट शुरु गर्न सकिन्छ ।

यसमा आयतका उचाइहरू श्रेणीअन्तरको बारम्बारतासँग समानुपातमा हुन्छन् । यही सबै श्रेणीअन्तरहरू बराबर आकारका भएमा आयतका उचाइहरू श्रेणीअन्तरको बारम्बारतासँग समानुपातमा हुन्छन् । यस अवस्थामा प्रत्येक आयतको उचाइ त्यस श्रेणी अन्तरको बारम्बारतासँग बराबर हुन्छन् । श्रेणीअन्तरको फरक नै आयतको चौडाइ हुन्छ । तर श्रेणीअन्तरका आकार (फरक) बराबर नभएमा आयतको चौडाइ श्रेणी अन्तरको आकार र आवृत्तिको अनुपातमा आयतको उचाइ निर्धारण गरिन्छ । यसका लागि सबैभन्दा सानो श्रेणीअन्तरलाई सन्दर्भ अन्तर मानेर बारम्बारता वितरणका अन्य बारम्बारताको उचाइ निर्धारण गर्नुपर्दछ । तर फरक भएको श्रेणीअन्तरलाई समान श्रेणी अन्तरमा परिवर्तन गरी हिस्टोग्राम तयार पारेमा राम्रो देखिनुका साथै सजिलो हुन्छ ।

हिस्टोग्राम सम्बन्धी केही उदाहरण हेरौं :

क)

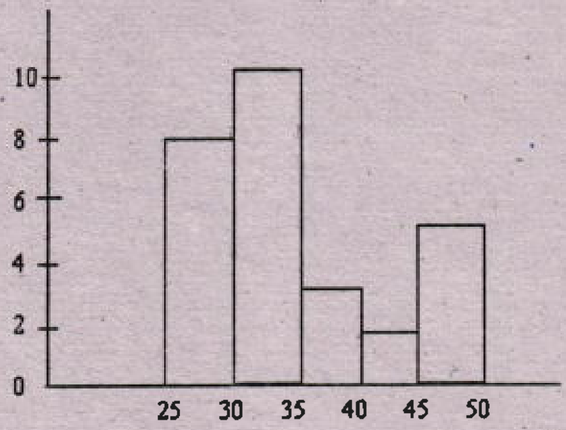
दैनिक आम्दानी (रु मा)	मानिसहरूको सङ्ख्या
0-50	3
50-100	7
100-150	4
150-200	5
200-250	4
250-300	2



दैनिक आम्दानी (रुपैयाँमा)

ख)

शिक्षकहरूको उमेर (वर्षमा)	शिक्षक सङ्ख्या
25-30	8
30-35	10
35-40	3
40-45	2
45-50	5

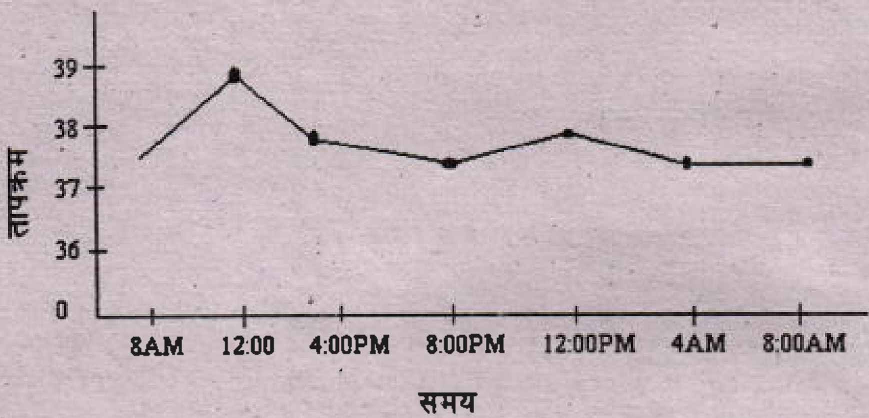


प्राप्त आँकडाको श्रेणीअन्तर शून्य (Origin) बाट सुरु नभई बीचबाट सुरु भएको अवस्थामा त्यस्तो आँकडाको हिस्टोग्राम बनाउने क्रममा शून्यको नजिक x-अक्षलाई भाँचेर (Break) देखाउनु पर्दछ ।

शिक्षक रमेशले त्यसपछि अर्को एउटा तथ्याङ्कको आधारमा हिस्टोग्राम बनाउन लगाए ।

२.३.४ रेखाचित्र (Line-graph)

सबैखालका तथ्याङ्कलाई एउटै खाले लेखाचित्र (Graphs) मा व्यक्त गर्न उपयुक्त हुँदैन । तथ्याङ्कहरूको प्रकृतिअनुसार कुन खालको ग्राफ उपयुक्त हुन्छ भन्ने निर्धारण गरिन्छ । कतिपय तथ्याङ्कलाई अन्य ग्राफबाटभन्दा रेखाग्राफ (Line-graph) बाट बढी प्रभावकारी ढङ्गले व्यक्त गर्न सकिन्छ । तापक्रम, वर्षा, गतिसँग सम्बन्धित तथ्याङ्कहरूलाई चित्रग्राफ, वृत्तचित्र आदि ग्राफबाट प्रस्तुत गर्नुभन्दा रेखाचित्रद्वारा गर्न बढी अर्थपूर्ण र बढी सूचनादायक हुने हुन्छ । त्यसैले यस्ता प्रकृतिका तथ्याङ्कलाई रेखाचित्रमा व्यक्त गर्ने गरिन्छ । उदाहरणको लागि एकजना बिरामीको एक दिनभरिको तापक्रमको विवरण रेखाचित्रमा देखाइएको छ ।



यस्तो रेखाचित्रको शिक्षण गर्ने समयमा उनले माथि प्रस्तुत गरिएको रेखाचित्र विद्यार्थीहरूलाई देखाई तलका प्रश्नहरू गर्ने गर्दछन् ।

- तापक्रम कति समयको फरकमा नापीन्छ ?
- सबभन्दा धेरै र सबभन्दा कम तापक्रम भएको समय कुन हो ?
- एक दिन (२४ घण्टा) मा तापक्रम कतिसम्म पुग्यो ?
- तापक्रममा क्रमशः सुधार आएको छ ? आदि ।

मैले यस्ता प्रश्नहरूमा छलफल गराएपछि विद्यार्थीहरूमा रेखाचित्र पढ्ने सीपको विकास हुनुका साथै यस्तो चित्रको महत्त्व र प्रयोगलाई समेत बुझी विद्यार्थीहरूमा अर्थपूर्ण सिकाइ भएको अनुभव गर्दछु । रेखाचित्रसम्बन्धी यसरी स्पष्ट भइसकेपछि सिकाइलाई दिगो बनाउन थप अभ्यासका लागि आफ्नो विद्यालयको दिनभरको तापक्रम, वर्षको औसत वर्षा, हावाको गति, गाउँमा शिशुहरूको वार्षिक जन्मदर आदि तथ्याङ्कलाई रेखाचित्र बनाई व्यक्त गर्न लगाउन सकिन्छ, जसले गर्दा विद्यार्थीहरुले व्यावहारिकरूपमा रेखाचित्रलाई बुझी आफ्ना क्रियाकलापहरूलाई पनि रेखाचित्रमा व्यक्त गरी हेर्ने मौका पाउँदछन् । जस्तै : आफूलाई हप्ताभरिमा (दैनिक समयमा) विद्यालय पुग्न लागेको समयलाई विद्यार्थी प्रकाशले रेखाचित्र तयार पारी देखाउन सक्छन् ।

२.३.५ **वृत्तचित्र** (Pie-chart/Pie-diagram):

शिक्षक रमेशले कुनै एउटा सिङ्गो वस्तु वा चिजको विभिन्न भाग देखाउन वृत्त चित्र प्रयोग गर्ने गर्दछन् । उनले वृत्तचित्रको प्रयोग गर्दा प्राप्त तथ्याङ्कको कूल (सिङ्गो) परिमाणलाई ३६०° सँग तुलना गरी तथ्याङ्कका प्रत्येक हिस्सा (Items) हरूलाई प्रतिनिधित्व गर्ने कोणहरू निकाल्दछन् । यस्ता हिस्सा (भाग) हरूलाई प्रतिशतमा व्यक्त गर्ने पनि गर्दछन् । शिक्षक रमेशले प्रत्येक हिस्साले प्राप्त गर्ने कोणको नाप पत्ता लगाउन तलको सूत्र प्रयोग गर्दछन् :

हिस्साले जनाउने कोण=(हिस्सा / कूल हिस्सा)×360°

विभिन्न शीर्षकमा दिइएका तथ्यहरूको कुल राशिलाई तिनीहरूको मानको अनुपातमा विभिन्न खण्डमा विभाजित गरी वृत्तमा प्रस्तुत गरिएको चित्रलाई वृत्तग्राफ वा वृत्तचित्र (Pie-chart) भनिन्छ । दुई वा दुईभन्दा बढी तथ्याङ्कको तुलना गर्न यसलाई प्रतिशतमा देखाउनु पर्दछ । त्यस वृत्तको केन्द्रीयकोण ३६०° हुने भएकाले सम्पूर्ण राशिलाई ३६०° मानेर सोहीअनुसार प्रत्येक खण्डको कोण पत्ता लगाई वृत्तलाई सोहीअनुसार भाग लगाउनु पर्दछ । वृत्तग्राफलाई अझ सरल किसिमले बनाउनका लागि तथ्याङ्कलाई प्रतिशतमा प्रस्तुत गर्नुपर्दछ । यसका लागि पूरा वृत्तलाई १००%=३६०° वा १%=३.६° गरी निकाल्न सकिन्छ ।

शिक्षक रमेशले विद्यार्थीहरूलाई वृत्तचित्रको शिक्षण गर्ने क्रममा तलको उदाहरण दिए ।

एक जना मानिसको मासिक खर्च विवरण :

शीर्षक	खर्च
खाजामा	रु १०००
शिक्षामा	रु २०००
घरखर्च	रु ३५००
लुगामा	रु ४०००
यातायात	रु ३०००

यस तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा व्यक्त गर्दा,

जम्मा खर्च =रु १३,५००।-

त्यसैले जम्मा खर्च

रु. $13500=360^{\circ}$

रु. $1=\left(\frac{360}{13500}\right)^{\circ}$

अब,

खाजामा भएको खर्च$=\left(\frac{360}{13500}\times1000\right)^{\circ}=26.7^{\circ}$

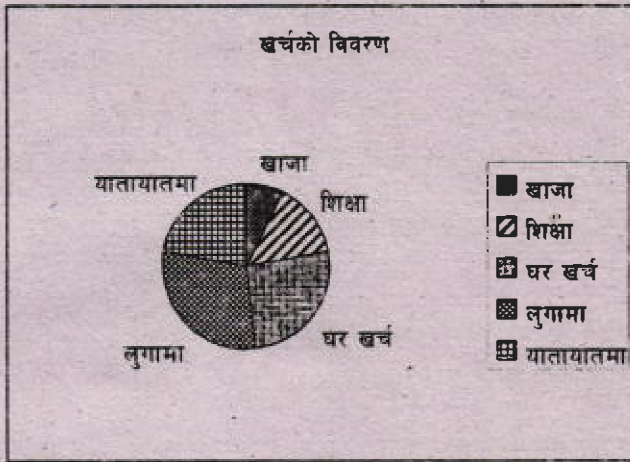
शिक्षामा भएको खर्च$=\left(\frac{360}{13500}\times2000\right)^{\circ}=53.3^{\circ}$

घर खर्च$=\left(\frac{360}{13500}\times3500\right)^{\circ}=93.3^{\circ}$

लुगामा भएको खर्च$=\left(\frac{360}{13500}\times4000\right)^{\circ}=106.7^{\circ}$

यातायातमा भएको खर्च$=\left(\frac{360}{13500}\times3000\right)^{\circ}=80^{\circ}$

अब यो सूचनालाई आधार मानी वृत्तलाई यहाँ निकालिएको डिग्रीका आधारमा बाँडेर वृत्तचित्र तयार पारिन्छ ।



यसप्रकार शिक्षक रमेशले वृत्तचित्रको उदाहरण दिई शिक्षण गरेपछि विद्यार्थीहरूलाई पनि आ-आफ्नो घरमा हुने खर्चको विवरण, पृथ्वीमा भएको जमिन र पानीको भाग, एकदिनमा आफूले गरिने कामका लागि समयको बाँडफाँड, एउटा निर्वाचनमा उम्मेदवारले पाएको मत सङ्ख्या आदि तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा राखी प्रस्तुत गरे ।

२.३.६ सञ्चित बारम्बारता बक्र (Comulative frequency curve or Ogive):

विद्यार्थीहरुलाई प्राप्त तथ्याङ्कहरुको अर्थपूर्ण प्रस्तुतीकरण गर्ने विविध तरिकाहरुमध्ये चित्रग्राफ, वृत्तग्राफ, स्तम्भ लेखाचित्र र रेखाचित्रको बारेमा अध्ययन गराइसकेपछि उनीहरुलाई कुनै थप जिज्ञाशा छ कि भनी बुझ्ने क्रममा एकजना विद्यार्थीले यीबाहेक तथ्याङ्कलाई ग्राफमा प्रस्तुतीकरण गर्ने कुनै तरिका छैनन् सर ? भनी प्रश्न गरे । त्यसपछि मैँले प्राप्त तथ्याङ्कलाई ग्राफमा प्रस्तुतीकरण गर्ने अर्को एउटा तरिका पनि छ भन्दै सञ्चित बारम्बारता वक्र (Ogive) को बारेमा निम्नअनुसार बताइदिएँ ।

यदि कुनै वर्गीकृत तथ्याङ्कको श्रेणीअन्तर (Class-interval) लाई तेर्सो अक्षमा जनाई त्यो श्रेणीअन्तरको सञ्चित बारम्बारतालाई ठाडो अक्षमा सङ्कलन गरी हातले स्वतन्त्र रुपमा खिच्दा (Freehand-drawing) प्राप्त हुने बक्र रेखालाई सञ्चित बारम्बारता बक्र (Cumulative frequency curve or ogive) भनिन्छ । यो एक प्रकारको रेखाग्राफ (Line graph) हो । प्रत्येक आँकडा वा श्रेणीको सञ्चित बारम्बारता निकाली सोको तालिका बनाउँदा निम्नलिखित दुईविधिमध्ये कुनै प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

क) भन्दा कम विधि (Less than method) र

ख) भन्दा बढी विधि (More than method)।

प्राप्त तथ्याङ्कबाट यो बक्र तयार पार्नका लागि बनाइने सञ्चित बारम्बारता तालिकाको निर्माण गर्ने आधारमा यी विधिलाई छुट्टयाउने गरिन्छ । सञ्चित बारम्बारतालाई घट्दो क्रममा राखी यसैका आधारमा बक्र तयार पारिने विधिलाई "भन्दा कम विधि" भनिन्छ । यस विधिबाट

तयार पारिएको बक्र तलबाट माथि उक्लिदैं गएको बन्न आउँछ । त्यस्तै सञ्चित बारम्बारतालाई बढ्दो कममा राखी यसैका आधारमा बक्र तयार पारिने विधिलाई "भन्दा बढी विधि" भनिन्छ । यस विधिबाट बनेको बक्र माथिबाट तल ओर्लदैं गएको बन्दछ । प्राप्त तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता बक्रमा प्रस्तुत गर्दा निम्नअनुसार गर्नुपर्दछ ।

- ग्राफमा तेर्सोतर्फको अक्षमा तथ्याङ्कको श्रेणीअन्तरलाई र ठाडो अक्षमा वारम्बारता (Frequency) राख्ने ।
- तथ्याङ्कलाई कमशः ग्राफमा राख्ने/Plot गर्ने/वा चिन्ह √ लगाउने ।
- चिन्ह लगाइएको बिन्दुहरुलाई कमशः हातले जोड्दै जाने ।
- अब, सञ्चित बारम्बारता बक्र तयार हुन्छ ।

एउटा तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता बक्र तयार पारेर हेरौं ।

कुनै एउटा विद्यालयमा कक्षा ८ को गणित विषयको परीक्षामा विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क र विद्यार्थी सङ्ख्याको विवरण निम्नअनुसार छ :

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या
0-20	10
20-40	15
40-60	20
60-80	10
80-100	5

यस तथ्याङ्कलाई "भन्दा कम विधि" बाट बारम्बारता तालिका बनाउँदा :

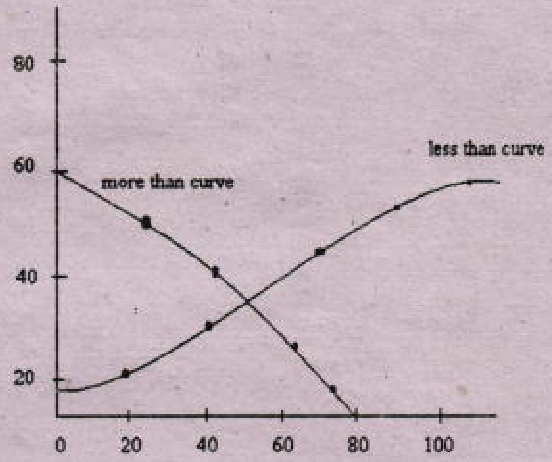
प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या
20 भन्दा कम	10
40 भन्दा कम	25
60 भन्दा कम	45
80 भन्दा कम	55
100 भन्दा कम	60

यही तथ्याङ्कलाई "भन्दा बढी विधि" बाट बारम्बारता तालिका तयार गर्दा,

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या
0 वा 0 भन्दा बढी	60
20 वा 20 भन्दा बढी	50
40 वा 40 भन्दा बढी	35
60 वा 60 भन्दा बढी	15
80 वा 80 भन्दा बढी	5

अब, यी दुवै तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता बक्रमा प्रस्तुत गर्दा, (दुवै विधिबाट)

सञ्चित बारम्बारता बक्र (Ogive)



३. परियोजन कार्य :

- तपाईंको विद्यालयमा विगत पाँचवर्षमा एस.एल.सी. परीक्षा उत्तीर्ण गर्ने छात्रछात्राहरूको विवरण सङ्कलन गर्नुहोस् । त्यसबाट प्राप्त तथ्याङ्कलाई चित्रग्राफ, स्तम्भ लेखाचित्र, हिस्टोग्राम, वृत्तचित्र र रेखाचित्र तयार पार्नुहोस् ।
- आफ्नो विद्यालयमा अध्ययनरत ब्राह्मण, क्षेत्री, दलित र जनजातिका विद्यार्थीहरूको तथ्याङ्क सङ्कलन गर्नुहोस्, तथ्याङ्क, उमेरगत, कक्षागत, छात्रछात्रा, आदि आधारमा लिनु पर्नेछ । यसरी सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्कको आधारमा कुन तथ्याङ्कका लागि कुन ग्राफ बनाउन उपयुक्त हुन्छ, प्रत्येक तथ्याङ्कलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । साथै प्रस्तुत गरिएको लेखाचित्रबाट केकस्ता सूचनाहरू प्राप्त गर्न सकिन्छ ? र यसलाई केकस्तो प्रयोगमा ल्याउन सकिन्छ ? सो पनि उल्लेख गर्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- Asthana, B.N. Elements of statistics, part 1 & 2.
- Gupta. S.P., An Easy approach of statistics.
- Gupta. S.P., Fundamental of statistics.
- Saxena, H.C. Elementary of statistics.

पाठ दुई : मध्यक, मध्यिका, रीत, विस्तार र चतुर्थांशको विस्तार

१. परिचय :

ग्राफ, चार्ट तथा बारम्बारता वितरणका ग्राफहरू आदिबाट हामी तथ्याङ्क कसरी फैलिएर वा वितरित भएर रहेका छन् भन्ने कुराको स्पष्ट जानकारी प्राप्त गर्न सक्दछौं । तर यत्तिले मात्र तथ्याङ्कका अन्य महत्वपूर्ण विशेषताहरूका बारेमा जानकारी प्राप्त गर्न कठिनाइ पर्दछ । त्यसैले तथ्याङ्कहरूलाई सही र अर्थपूर्ण ढङ्गले बुझ्नका लागि ग्राफ, चार्ट र तालिकाबाहेक तथ्याङ्कका थप विशेषताहरू र वास्तविक रूप थाहा पाउनका लागि तथ्याङ्कहरूको बीचमा तुलना गर्नका लागि थप प्रक्रियाहरूको अध्ययन आवश्यक पर्दछ । त्यसैले यस पाठमा मध्यक, मध्यिका, रीत, विस्तार (Range), आन्तरिक चतुर्थांशको विस्तार (Inter quartile range) र यिनीहरूको प्रयोगका बारेमा चर्चा गरिने छ ।

२. विषयवस्तु

२.१ मध्यक (Mean)

क) मैले मध्यकको शिक्षण गर्ने समयमा सबैजना विद्यार्थीहरूलाई आ-आफ्नो पैतालाको लम्बाइ से.मी. मा नाप्न लगाएँ । नापेर निकालेको लम्बाइलाई टिप्न लगाएर बोर्डमा सबैजनाको नाप टिपें । नाप यस्तो आयो

15, 15, 14, 16, 16, 14, 18, 15, 16, 18

यसपछि तलका प्रश्न सोधें :

- तिमीहरू सबैको खुट्टाको नापको प्रतिनिधित्व गर्ने एउटा सङ्ख्या के हुनसक्छ ?
- सबैलाई प्रतिनिधित्व गर्ने त्यस्तो सङ्ख्या कसरी आउँछ होला ?

यस्तो सङ्ख्या "औसत" निकालेर आउँछ । एकजना छात्राले जवाफ दिइन । त्यसपछि सबैजनालाई औसत निकाल्न भनें र निम्नअनुसार निकाले :

$$\text{औसत } (Average) = \frac{15+15+14+16+16+14+18+15+16+18}{10}$$

$$= \frac{157}{10}$$

$$\text{औसत अङ्क} = 15.7$$

यहाँ, सबै विद्यार्थीहरूको पैतालाको लम्बाइलाई प्रतिनिधित्व गर्ने अङ्कलाई अङ्कगणितीय मध्यक (Arithmetic mean) वा औसत अङ्क (Average) भनिन्छ । कुनै पनि तथ्याङ्कको यसरी मध्यक निकाल्दा के फाइदा होला ? भन्ने प्रश्न गर्दै विचार गर्न लगाएँ ।

विद्यार्थीका पैतालाको लम्बाइको मध्यक निकालेजस्तै गरी अन्य यस्तै तथ्याङ्कहरूको पनि मध्यक निकाल्न सकिन्छ ? भन्ने प्रश्नमा सकिन्छ भन्ने जवाफ प्राप्त भएपछि त्यस्तै केही उदाहरणहरू लिएर मध्यक निकाल्ने अभ्यास गर्न लगाएँ ।

विद्यार्थीहरूले प्राप्त तथ्याङ्कहरु सबैलाई जोडेर जतिओटा सङ्ख्या छन् त्यत्तिले नै भाग गरेपछि औसत वा मध्यक निस्कन्छ भन्ने निष्कर्ष निस्केपछि यसलाई सुत्रको रूपमा व्यक्त गर्दा हुन्छ भन्ने कुरा स्पष्ट भयो ।

मध्यक $\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$, जसमा x- वैयक्तिक अङ्क हो ।

विद्यार्थीहरूलाई अङ्कगणितीय मध्यकको शिक्षण गर्दा सामान्य औसतको शिक्षणबाट शुरु गरी क्रमशः वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यक (Mean) तिर डोऱ्याउँदा शिक्षणसिकाइमा सरलता आउँछ । यसका लागि विद्यार्थीको उचाइको औसत, विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्कको औसत जस्ता प्रसस्त उदाहरणहरूबाट धेरै अभ्यास गरेपछि मात्र सूत्रहरूको प्रयोग सिकाउँदा शिक्षणसिकाइ प्रभावकारी हुन्छ । मध्यकलाई $\bar{x}$ ले जनाउने गरिन्छ ।

ख) अर्को दिन मैले विद्यार्थीहरूलाई तलको तथ्याङ्क दिएर मध्यक निकाल्न भने कक्षा ९ का विद्यार्थीहरूले अनिवार्य गणितको पूर्णाङ्क 50 मा लिइएको अर्धवार्षिक परीक्षामा प्राप्त गरेको अङ्क निम्नअनुसार छ :

प्राप्ताङ्क	:	20	25	30	35	40
विद्यार्थी सङ्ख्या	:	5	10	12	8	5

यो तथ्याङ्कको अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्न विद्यार्थीहरू अलमलमा परेको थाहा पाएपछि मैले यो तथ्याङ्कको प्राप्ताङ्कलाई x र विद्यार्थी सङ्ख्यालाई f मानेर निम्नअनुसार तालिका बनाउन लगाएँ :

x	f	fx
20	5	100
25	10	250
30	12	360
35	8	280
40	5	200
विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या(N) = 40		$\sum$fx=1190

यस्तो तालिका बनाएपछि विद्यार्थीहरूले सरल अनुभव गरे । अब उनीहरूले प्राप्ताङ्क र विद्यार्थी सङ्ख्याको गुणनफल जोडेर आएको योगफललाई जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्याले भाग गरेमा अङ्कगणितीय मध्यक निस्कने बताए र यसरी मध्यक निकाले ।

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{1190}{40}$$

$$\therefore \bar{x} = 29.75$$

यहाँ, लेखिएको सूत्रमा f ले बारम्बारता (Frequency), x ले चल सङ्ख्या (Variable) र N ले परिणामको सङ्ख्या (Number of items) लाई जनाउँछ ।

यसपछि विद्यार्थीहरूलाई यस्ता खालका अन्य उदाहरणहरू दिएर र उनीहरू आफैलाई खोज्न लगाएर अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्ने अभ्यास गर्न लगाएँ ।

विद्यार्थीहरूलाई कुनै पनि गणितीय समस्या समाधान गर्ने तरिकाको शिक्षण गरिसकेपछि "यो" केका लागि प्रयोग हुन्छ ? यसबाट के फाइदा हुन्छ ? भन्ने बारेमा छलफल गर्दा बढी उत्प्रेरणा जाग्ने र सिकाइमा सजिलो हुने मेरो अनुभव भएकाले मैले सधैंजसो यस्ता गणितीय धारणाको शिक्षणका क्रममा त्यसको उपयोगिता र प्रयोगका बारेमा छलफल गर्ने र विद्यार्थीहरूलाई बताइदिने गर्दछु । माथिको उदाहरणमा अङ्कगणितीय मध्यक निकालेपछि विद्यार्थीहरूले प्राप्त गरेको औसत उपलब्धिस्तर घट्यो वा बढ्यो ? कुनै एकदुईजना विद्यार्थीले प्राप्ताङ्क कम ल्याए भने कक्षाको उपलब्धि पनि तल झर्छ आदि कुराको जानकारी पाउन सकिन्छ ।

ग) अङ्कगणितीय मध्यककै शिक्षणका क्रममा मैले पुनः तल दिएको अर्को तथ्याङ्क दिएर यसमा मध्यक कसरी निकाल्ने होला ? भन्ने प्रश्न गरेँ :

कक्षा ८ का विद्यार्थीहरूले प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्क निम्नअनुसार छन् :

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या
0-10	4
10-20	6
20-30	10
30-40	20
40-50	6
50-60	4

यो तथ्याङ्कबाट विद्यार्थीहरूलाई मध्यक निकाल्न लगाएँ । मैले उनीहरूलाई आफूसँगसँगै काम गर्न लगाउँदै निम्नअनुसारको तालिका बनाई मध्यक निकाल्न लगाएँ :

प्राप्ताङ्क (श्रेणीअन्तर)	मध्यमान (m)	बारम्बारता (f)	f×m
0-10	5	4	20
10-20	15	6	90
20-30	25	10	250
30-40	35	20	700
40-50	45	6	270
50-60	55	4	220
		N=(∑f)=50	∑fm=1550

अब,

अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्न,

$$\bar{x} = \frac{\sum fm}{N}$$

$$= \frac{1550}{50}$$

$$\therefore \bar{x} = 31$$

दिइएको वर्गीकृत तथ्याङ्कबाट यहाँ उल्लेख गरिएको विधिबाट अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्न सकिन्छ । तर ठूलाठूला सङ्ख्याहरू भएका तथ्याङ्कमा सधैं यो तरिकाबाट मध्यक निकाल्दा हिसाब (Calculation) गर्न गाह्रो हुन्छ । यस्ता तथ्याङ्कबाट मध्यक निकाल्ने अर्को तरिका पनि छ । यसलाई छोटो तरिका (Shortcut method) पनि भनिन्छ । यस तरिकाबाट मध्यक निकाल्दा एउटा संङ्ख्यालाई मध्यक मानी हिसाब गरिन्छ । यसलाई 'a' ले जनाउने गरिन्छ । यसलाई कल्पित मध्यक (Assumed mean) भनिन्छ । कल्पिक मध्यकको प्रयोग गर्दा प्रत्येक मध्यबिन्दु 'm' बाट कल्पित मध्यक a घटाउँदा आएको फरकलाई d ले जनाइन्छ । यस तरिकाबाट मध्यक पत्ता लगाउन निम्न सूत्र प्रयोग गरिन्छ :

$$\bar{x} = a + \frac{\sum fx}{N};$$

यहाँ, a=कल्पित मध्यक,

∑fd=फरक (d) र बारम्बारता (f) को गुणनफलको योगफल

N= बारम्बारताको कूल योग ।

अब,

मैले यो सूत्र प्रयोग गरेर माथिकै तथ्याङ्कको मध्यक निकाल्न लगाएँ । यसका लागि निम्नअनुसार गर्न लगाएँ : मानौ, कल्पित मध्यक (a)=35

प्राप्ताङ्क (श्रेणीअन्तर)	मध्यमान (m)	बारम्बारता (f)	d=m-a	f×d
0-10	5	4	5-35=-30	-120
10-20	15	6	15-35=-20	-120
20-30	25	10	25-35=-10	-100
30-40	35	20	35-35=0	0
40-50	45	6	45-35=+10	+60
50-60	55	4	55-35=+20	+80
		N=50		$\sum$fd=-200

मध्यक निकाल्ने सूत्र प्रयोग गर्दा,

$$\bar{x} = a + \frac{\sum fd}{N}$$

$$= 35 + \frac{-200}{50}$$

$$= 35 - 4$$

$$\therefore \bar{x} = 31$$

यस्तो खालको वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यक निकाल्नका लागि वर्गान्तर (Class-interval) लाई समावेश गरेर पनि निकाल्न सकिन्छ । यस्तो गरी मध्यक निकाल्दा सूत्र निम्नअनुसार हुन्छ :

$$\bar{x} = a + \frac{\sum fd'}{N} \times i$$

यसमा d^1=d/i, i=वर्गान्तर हुन्छ ।

माथिकै तथ्याङ्कलाई यस तरिकाबाट निम्नअनुसार मध्यक निकाल्न लगाउन सकिन्छ । मैले यसको शिक्षण गर्नु पर्दा यसरी गर्ने गर्दछु ।

प्राप्ताङ्क (श्रेणीअन्तर)	मध्यमान (m)	बारम्बारता (f)	d=m-a	d=d/c	fd
0-10	5	4	-30	-3	-12
10-20	15	6	-20	-2	-12
20-30	25	10	-10	-1	-10
30-40	35	20	0	0	0
40-50	45	6	+10	+1	+6
50-60	55	4	+20	+2	+8
		N=50			$\sum fd^1$=-20

यहाँ कल्पित मध्यक (a)=35

वर्गान्तर (i)=10

अब,

$$\bar{x} = a + \frac{\sum fd'}{N} \times i$$

$$= 35 + \frac{-20}{50} \times 10$$

$$= 35 - 4$$

$$\therefore \bar{x} = 31$$

यसरी अङ्कगणितीय मध्यकको शिक्षण गर्दा श्रेणीअनुसार फरकफरक सूत्रको प्रयोग गरी निकाल्ने तरिका सिकाउने गरिन्छ । एउटै खालको श्रेणीबाट मध्यक निकाल्दा पनि एकभन्दा बढी तरिकाबाट सिकाउने र सरल तरिका छान्न लगाउने गर्दा विद्यार्थीहरू बढी स्पष्ट हुने गरेको अनुभव मैले गरेको छु ।

२.२ मध्यिका (Median)

क) अङ्कगणितीय मध्यक (Mean) को बारेको शिक्षण सिकाइ क्रियाकलापको समाप्ति पछि एकजना विद्यार्थीले मध्यिका (Median) भनेको कस्तो हो त सर ? यो पनि मध्यकजस्तै हो ? भनेर प्रश्न गरे । उनको जिज्ञासालाई शान्त पार्न मैले केही विद्यार्थीहरूलाई आआफ्नो तौल भन्न लगाएर बोर्डमा टिप्दै गएँ । विद्यार्थीको तौल कि.ग्रा. मा निम्नअनुसार थियो :

35, 42, 41, 38, 40, 42, 45, 37, 44

प्राप्त तथ्याङ्कलाई सानोदेखि ठूलोको क्रममा मिलाउँदा,

35, 37, 38, 40, <u>41</u>, 42, 42, 44, 45

यहाँ, तथ्याङ्कको ठीक बीचमा परेको मान = 41

त्यसैले मध्यिका 41हुन्छ ।

अर्को तरिका :

यो तथ्याङ्कमा पदहरूको सङ्ख्या (N) = 9 छ, अब, मध्यिका स्थान पत्ता लगाउँदा, $\left(\frac{N+1}{2}\right)$औ पद नै मध्यिका हुन्छ, त्यसैले यहाँ $\left(\frac{9+1}{2}\right)$औ पद=5 औ पद 41 मध्यिका हो ।

यति उदाहरण दिइसकेपछि मध्यिका भनेको के रहेछ त ? यसको अर्थको खोजी गर्न लगाएँ ।

तथ्याङ्कलाई सानोदेखि ठूलो वा ठूलोदेखि सानो क्रममा मिलाएर राख्दा ठीक बीचमा परेको मानलाई तिनीहरूको मध्यिका (Median) भनिन्छ । अर्को शब्दमा भन्दा मध्यिका तथ्याङ्कको एउटा केन्द्रिय भाग हो, जसले तथ्याङ्कलाई ठीक दुई बराबर भागमा विभाजन गर्दछ ।

ख) प्राप्त तथ्याङ्कको सङ्ख्या बिजोर (Odd) भएमा त्यस तथ्याङ्कको बीचमा पर्ने मान मध्यमान हुन्छ, भनी निकाल्न सकिन्छ । तर तथ्याङ्कहरू जम्मा अवलोकनहरूको सङ्ख्या जोर

(even) भएमा के गर्ने ? भन्ने प्रश्न गर्दै यस्तो एउटा तलको उदाहरण दिएर मध्यिका पत्ता लगाउने अभ्यास गर्न लगाएँ ।

विद्यार्थीहरूको तौल : 35, 36, 36, <u>38</u>, <u>40</u>, 41, 43, 45 छ ।

यहाँ,

ठीक बीचमा परेको तथ्याङ्कको मान एउटा मात्र छैन । यस्तो अवस्थामा बीचमा परेका दुईओटा मान 38 र 40 को अङ्कगणितीय मध्यक नै मध्यिका हुन्छ ।

त्यसैले, मध्यिका $= \frac{38+40}{2} = \frac{78}{2} = 39$

यसैलाई मध्यिकाको स्थान पत्ता लगाएर पनि मध्यिका निकाल्न सकिन्छ । यो तथ्याङ्कमा अवलोकनहरूको जम्मा सङ्ख्या (N)=8 छ । अब मध्यिकाको स्थान पत्ता लगाउदा,

$\frac{N+1}{2} = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$ औ पद ।

यसअनुसार मध्यिकाको स्थान, चौथो र पाँचौ पदको बीचमा पर्दछ ।

अर्थात् 38 र 40 को बीचमा हुन्छ ।

त्यसैले मध्यिका $\frac{38+40}{2} = 39$ हुन्छ ।

नोट : कहिलेकाहीं यसरी निकालिएको मध्यिका दिइएको तथ्याङ्कमा नपर्न पनि सक्दछ । यो तथ्याङ्कमा 39 छैन । त्यसैले यो मध्यिकाको अड्कल मात्र हो । यसरी निकालिएको मान यकिन मान नहुन पनि सक्दछ ।

मैले कक्षा ९ का 15 जना विद्यार्थीहरूको जुत्ताको नाप (से.मी.मा) लाई बोर्डमा लेखी तलको प्रश्न गरेँ :

20, 22, 20, 21, 24, 18, 22, 20, 21, 19, 21, 20, 19, 23, 25

ती नापका जुत्ताहरूलाई नापअनुसार क्रमश: लाईनमा मिलाएर राख्दा कुनचाहिँ नापको जुत्ता बीचमा पर्ला ?

यस प्रश्नको उत्तर नै मध्यिका हुन्छ । तथ्याङ्कको बीचमा पर्ने (50%) अवलोकन नै मध्यिका हो । मध्यिकाको स्थान पत्ता लगाउन अवलोकनहरूको सङ्ख्यामा 1 थपी आधा गरिन्छ । यसो गर्न अवलोकनहरूलाई क्रम मिलाएर राख्नु पर्छ । यदि अवलोकनहरूको सङ्ख्या जोर छ भने बीचका दुईओटा मानहरूलाई जोडेर आधा पारी त्यसको स्थान पत्ता लगाउने गरिन्छ । मध्यिका स्थानात्मक (Positional) औसत हो । यसलाई गुणात्मक (Qualitative) तथ्याङ्कमा पनि प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

ग) तल 46 जना विद्यार्थीहरूको तौल (पौण्डमा) दिइएको छ । यसको मध्यिका कति होला ? अभ्यास गरौ :

तौल (lbs)	:	100	150	140	120	130	160

विद्यार्थी सं. : 3 2 16 10 14 1

यस तथ्याङ्कलाई बढ्दा क्रममा मिलाएर राख्दा :

तौल	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
100	3	3
120	10	13
130	14	27
140	16	43
150	2	45
160	1	46
	N = 46	

अब,

मध्यिका $=\left(\frac{N+1}{2}\right)$औं पद,

$=\left(\frac{46+1}{2}\right)$ औं पद,

=23.5 औं पद,

सञ्चित बारम्बारता लहर (Column) को अवलोकनबाट, 23.5 औं पद 130 हो ।

मध्यिका =130 हुन्छ ।

यसरी खण्डित श्रेणीको मध्यिका निकाल्ने गरिन्छ ।

घ) वर्गीकृत तथ्याङ्क (Grouped data) वा निरन्तर श्रेणी (Continuous series) को मध्यिका :

वर्गीकृत तथ्याङ्कमा मध्यिका निकाल्नका लागि सर्वप्रथम मध्यिका पर्ने स्थानको पहिचान गरिन्छ । वर्गीकृत तथ्याङ्कमा मध्यिका पर्ने स्थान $\frac{N}{2}$ औं पद हुन्छ । यसबाट मध्यिका पर्ने स्थानको पहिचान गरिसकेपछि पुनः वास्तविक मध्यिका निकाल्ने गरिन्छ ।

उदाहरणका लागि :

कक्षा ९ का 50 जना विद्यार्थीहरूले गणित विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क विवरण दिइएको छ । यसको मध्यिका कति होला ?

प्राप्ताङ्क : 10-20 20-30 30-40 40-50 50-60 60-70

विद्यार्थी सं.: 4 6 10 15 8 7

यसलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा राख्दा,

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
10-20	4	4
20-30	6	10
30-40	10	20
40-50	15	35
50-60	8	43
60-70	7	50

यहाँ विद्यार्थी सङ्ख्याको आधारमा ठीक बीचमा पर्ने प्राप्ताङ्क अर्थात् मध्यिका पत्ता लगाउन जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या N=50 लाई आधा गरेर पत्ता लगाउन सकिन्छ,

मध्यिका $= \frac{N}{2}$ औ पद

$= \frac{50}{2}$ औ पद

=25 औ पद

अर्थात् 50 जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको अङ्कलाई सानोदेखि ठूलोको क्रममा मिलाएर राख्दा 25 औ विद्यार्थीले प्राप्त गरेको अङ्क नै यस तथ्याङ्कको मध्यिका हुन्छ । माथिको तालिकाबाट पच्चिसौ विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क '40-50' वर्गान्तरमा 40 देखि 50 को बीचमा पर्दछ मात्र भन्न सकिन्छ । यस अवस्थामा मध्यिकाको यकिन गर्न सूत्रको प्रयोग गर्नु पर्दछ । यस्तो अवस्थामा मध्यिका निकाल्ने सूत्र निम्नअनुसार हुन्छ :

मध्यिका $= L + \frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f} \times i$

यहाँ,

L= मध्यिका श्रेणीको तल्लो सीमा (Lower limit)

N= बारम्बारताको योगफल

c.f.= मध्यिका श्रेणीभन्दा एक श्रेणी अगाडिको सञ्चित बारम्बारता

f= मध्यिका श्रेणीको बारम्बारता

i= मध्यिका श्रेणीको श्रेणीअन्तर (Class-interval)

अब माथिको तथ्याङ्कबाट यो सूत्र प्रयोग गरेर मध्यिका निकाल्दा,

मध्यिका $= L + \frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f} \times i$

$$= 40 + \frac{\frac{50}{2} - 20}{15} \times 10$$

$$= 40 + \frac{25 - 20}{15} \times 10$$

$$= 40 + \frac{50}{15}$$

$$= 40 + 3.33$$

$$=43.33$$

वर्गीकृत तथ्याङ्कमा यसरी नै मध्यिका निकाल्ने गरिन्छ । विद्यार्थीलाई यसको शिक्षण गर्ने क्रममा यस्ता केही उदाहरणहरूको प्रस्तुतिपछि अभ्यासका लागि यस्तै प्रसस्त अवस्था र तथ्याङ्कहरू दिने गर्दा सिकाइ प्रभावकारी हुने विश्वास गरिन्छ ।

नोट : मध्यिका पत्ता लगाउन ग्राफबाट पनि सकिन्छ । ग्राफबाट मध्यिका पत्ता लगाउने तरिका र यस सम्बन्धी थप जानकारीका लागि तथ्याङ्क शास्त्रसम्बन्धी विभिन्न पुस्तकहरूको सहयोग लिन सकिन्छ ।

२.३ रीत (Mode)

क) तथ्याङ्कशास्त्रको शिक्षणका क्रममा मैले मध्यक र मध्यिकाको बारेमा शिक्षणसिकाइको काम समाप्त भएपछि रीत (Mode) को बारेमा छलफल चलाएँ । यसै सन्दर्भमा उनीहरूले प्रयोग गर्ने जुत्ताको नम्बर सोध्दै बोर्डमा टिप्दै गएँ । यसमा 11 जनाले निम्नअनुसार साइजका जुत्ता प्रयोग गरेको पाइयो :

4, 4, 5, 5, 6, 6, 5, 5, 4, 5 ,7

अब सबभन्दा धेरै जनालाई मिल्ने जुत्ताको साइज कुन हो ? खोजी गरौ । यो तथ्याङ्क (सूचना) लाई सानोदेखि ठूलो क्रममा मिलाएर राख्दा :

{4, 4, 4}	{5, 5, 5, 5, 5}	{6, 6}	{7}
तीन पटक	पाँच पटक	दुई पटक	एक पटक

यहाँ सबभन्दा बढी प्रयोग भएको जुत्ताको साइज =5 त्यसैले रीत (Mode) 5 हुन्छ ।

तथ्याङ्कको सङ्कलनमा सबभन्दा बढी दोहोरिएको सङ्ख्या वा मानलाई रीत (Mode) भनिन्छ । यदि दिइएको तथ्याङ्क वर्गीकृत रूपमा छ भने, सबभन्दा बढी बारम्बारता भएको वर्गान्तरलाई रीत (Modal class) भनिन्छ ।

तर सबभन्दा बढी दोहोरिने सङ्ख्या एकभन्दा बढी भएको वा समान भएको अवस्थामा रीत अपरिभाषित (Undefined) हुन्छ । यस्तो अवस्थामा रीत निकाल्नका लागि अप्रत्यक्ष विधि (Indirect method) को सहयोग लिइन्छ । यसरी रीत निकाल्दा,

रीत =3×मध्यिका -2×मध्यक गरिन्छ ।

ख) मध्यक र मध्यिका निकाल्ने क्रममा श्रेणीअनुसार फरकफरक प्रक्रियाको अवलम्बन गर्नु परेजस्तै रीत निकाल्न पनि श्रेणीअनुसार फरकफरक प्रक्रिया अपनाउनु पर्ने हुन्छ । खण्डित श्रेणीमा रहेको तलको तथ्याङ्कको रीत कति होला ? हेरौं ।

प्राप्ताङ्क	: 10	12	15	20	25	35	45	50	60
विद्यार्थी सङ्ख्या.	: 4	6	10	14	20	19	10	6	3

खण्डित श्रेणीको यस तथ्याङ्कको रीत पत्ता लगाउनका लागि सबभन्दा पहिले तल दिइएजस्तै समूहगत तालिका (Grouping table) बनाउनु पर्दछ ।

समूहगत तालिका (Grouping table):

<table>
<tr><th rowspan="2">प्राप्ताङ्क (x)</th><th colspan="6">बारम्बारता (f)</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th><th>V</th><th>VI</th></tr>
<tr><td>10</td><td>4</td><td rowspan="2">}10</td><td></td><td rowspan="3">}20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td><td rowspan="2">}16</td><td rowspan="3">}30</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>10</td><td rowspan="2">}24</td><td rowspan="4">}44</td></tr>
<tr><td>20</td><td>14</td><td rowspan="2">}34</td><td rowspan="3">}53</td></tr>
<tr><td>25</td><td>20</td><td rowspan="2">}39</td><td rowspan="3">}49</td></tr>
<tr><td>35</td><td>19</td><td rowspan="2">}29</td></tr>
<tr><td>45</td><td>10</td><td rowspan="2">}16</td><td rowspan="3">}19</td><td rowspan="3">}35</td></tr>
<tr><td>50</td><td>6</td><td rowspan="2">}9</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>60</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

यस तालिकामा बारम्बारतातर्फको पहिलो लहर (Column) मा दिएको बारम्बारता राखिएको छ । दोस्रो (II) मा शुरुबाट दुईदुईओटा बारम्बारता जोडेर आएका सङ्ख्यालाई राखिएको छ । तेस्रो (III) मा पहिलो 4 लाई छाडेर दुईदुईओटा बारम्बारता जोडेर राखिएको छ । चौथो (IV) मा शुरुदेखिको तीनतीनओटालाई जोडेर ग्रुप गरिएको छ । पाँचौ लहरमा पहिलोलाई छाडेर तीनतीनओटा र छैटौं (VI) तहरमा पहिला दुईओटा छोडेर तीनतीनओटालाई जोडेर राखिएको छ । यसरी तयार पारिएको तालिकाका आधारमा मात्र रीत निकाल्न अझै कठिनाई पर्ने हुनाले पुन: विश्लेषण तालिका (Analysis table) बनाउनु पर्दछ ।

विश्लेषण तालिका (Analysis table)

Column No:	Size of the items								
	10	12	15	20	25	35	45	50	60
I					1				
II					1	1			
III				1	1				
IV				1	1	1			
V					1	1	1		
VI			1	1	1				
Total			1	3	6	3	1		

यस तालिकाबाट 25 सबभन्दा धेरै पटक (६ पटक) दोहोरिएको छ, त्यसैले यसको रीत 25 हुन्छ ।

नोट : विश्लेषण तालिका तयार पार्दा समूहगत तालिका वा लहरहरूमा सबभन्दा धेरै बारम्बारता बनाउनका लागि प्रयोग भएको बारम्बारताको सङ्ख्याको टिपोट गरिन्छ ।

ग) निरन्तर श्रेणी (Continuous series) मा भएको तथ्याङ्कको रीत निकाल्नका लागि सबभन्दा पहिला अनुभवबाट (By inspection) वा समूहगत तालिका र विश्लेषण तालिकाको निर्माण गर्ने गरिन्छ । तालिकाहरू बनाउँदा माथि खण्डित श्रेणीको तथ्याङ्कमा तयार गरिएका तालिकाको जस्तै गरी तालिका तयार पारिन्छ । यसरी तालिकाका आधारमा रीत वर्गान्तर (Class interval) पत्ता लगाइसकेपछि रीत निकाल्नका लागि सूत्र प्रयोग गरी निकाल्न सकिन्छ । निरन्तर श्रेणीमा रीत निकाल्दा प्रयोग गरिने सूत्र निम्नअनुसार छ :

रीत (Mode)= $L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

यसमा,

L= रीत पर्ने वर्गको तल्लो सीमा (Lower limit)

f_0=रीत पर्ने वर्गभन्दा अघिल्लो वर्गको बारम्बारता

f_1=रीत पर्ने वर्गको बारम्बारता

f_2= रीत पर्ने वर्गभन्दा पछिल्लो वर्गको बारम्बारता

i= वर्गान्तर

अब यस श्रेणीमा भएको तथ्याङ्कबाट रीत निकाल्नका लागि एउटा उदाहरण हेरौं :

आयकर रकम रु :	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
कर दाताहरूको सङ्ख्या :	7	9	14	17	20	8	5	3

यस तथ्याङ्कलाई समूहगत तालिका बनाउंदा

समूहगत तालिका

प्राप्ताङ्क (x)	बारम्बारता (f)					
	I	II	III	IV	V	VI
200-300	7	}16		}30		
300-400	9		}23		}40	
400-500	14	}31				}51
500-600	17		}37	}45		
600-700	20	}28			}33	
700-800	8		}13			}16
800-900	5	}8				
900-1000	3					

अब समूहगत तालिकाको आधारमा विश्लेषण तालिका बनाउंदा,

विश्लेषण तालिका

Column No:	Size of the items							
	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
I					1			
II			1	1				
III				1	1			
IV				1	1	1		
V		1	1	1				
VI			1	1	1			
Total		1	3	5	4	1		

विश्लेषण तालिकाको आधारमा सबभन्दा धेरै पटक आएको वर्गान्तर '500-600' हो । त्यसैले रीत यही वर्गमा पर्छ ।

अब, रीत निकाल्ने सूत्र प्रयोग गर्दा,

रीत (Mode)= $L+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times i$

$$= 500+\frac{17-14}{2\times 17-14-20}\times 100$$

$$= 500+\frac{300}{34-34}$$

$$=500$$

रीत पत्ता लगाउनका लागि ग्राफको सहयोग लिन पनि सकिन्छ । ग्राफबाट रीत अनुमान गर्नका लागि दिइएको तथ्याङ्कका आधारमा हिस्टोग्राम (Histogram) खिचेर अनुमान गर्नुपर्ने हुन्छ । (यसका लागि थप सन्दर्भ सामग्री खोजेर हेर्नुहोला ।)

अहिले चर्चा गरिएका औसतहरू (मध्यक, मध्यिका र रीत) को शिक्षणको उद्देश्य औसत निकाल्न मात्र नभई त्यसरी निकालिएको औसतलाई हेरी दैनिक जीवनका उदाहरणहरूबाट निष्कर्ष निकाल्ने, अध्ययन गरिएका औसतहरूमध्ये उपयुक्त औसत छानेर प्रयोग गर्ने सीपको विकास गराउनु हो । यसका लागि विद्यार्थीहरूलाई उनीहरूको दैनिक व्यवहारसँग सम्बन्धित प्रसस्त तथ्याङ्कहरू दिएर अभ्यास गराउने र कुन तथ्याङ्कका लागि कुन औसत उपयुक्त हुन्छ भनेर छनोट गर्ने र निकालिएको औसतका आधारमा निष्कर्ष निकाल्न लगाउने गरिन्छ ।

२.४ विस्तार (Range) :

कुनै पनि तथ्याङ्कको वितरणमा भएको सबैभन्दा ठूलो (Largest) पद र सबैभन्दा सानो (Smallest) पदको फरकलाई विस्तार (Range) भनिन्छ । यसले दिइएको तथ्याङ्कको फैलावट कति छ भनेर देखाउँन । जस्तै : नेपालका निजामती कर्मचारीहरूको मासिक तलव स्केल यस प्रकारका छन् :

3500, 4100, 4900, 7500, 8500, 10500, 12000, 15000

यसमा अधिकत्तम तलव, रु 15000 र न्यूनत्तम तलव रु 3500 बीचको अन्तर (फरक) 15000-3500=11500 हुन्छ । त्यसैले यस तथ्याङ्कको विस्तार पनि 11500 हुन्छ । यसलाई सूत्रका रूपमा राख्दा,

विस्तार (R)=L-S हुन्छ ।

यहाँ,

L= सबभन्दा ठूलो पद र

S= सबभन्दा सानो पद हुन्छ ।

वर्गीकृत तथ्याङ्कको विस्तार पत्ता लगाउँदा पनि तथ्याङ्कको सबभन्दा ठूलो वर्गान्तरको उच्च सीमा र सबभन्दा सानो वर्गान्तरको न्यून सीमाबीचको अन्तर निकाल्ने गरिन्छ ।

जस्तै :

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थी सं.	2	5	10	18	3

यहाँ, सबैभन्दा ठूलो वर्गान्तर '40-50' र सबैभन्दा सानो वर्गान्तर '0-10' छ । त्यसैले विस्तार (R) = सबैभन्दा ठूलो वर्गान्तरको उच्च सीमा सबैभन्दा सानो वर्गान्तरको न्यून सीमा =50-0=50 हुन्छ ।

२.५ चतुर्थांशको विस्तार (Inter quartile range):

मैले विद्यार्थीहरूलाई चतुर्थांशको विस्तारको धारणा दिनका लागि निम्न उदाहरण दिने गर्दछु : कक्षा आठका १५ जना विद्यार्थीहरूको जुत्ताको नाप (से.मी.मा) यस प्रकार पाइयो ।

20, 22, 20, 21, 24, 15, 22, 20, 21 ,19, 21, 20, 19, 23, 25

उल्लिखित जुत्ताहरूका साइजलाई क्रमशः मिलाएर राख्दा मध्यिका बीचमा पर्दछ भने सो मध्यिकाभन्दा मुनिका नापका जुत्ताहरूमध्ये बीचमा कुन पर्दछ र सोभन्दा माथिका नापका जुत्ताहरूमध्ये बीचमा कुन पर्छ ? तिनीहरूलाई के भनिन्छ ? भन्ने प्रश्न गर्दै छलफललाई अगाडि बढाउने गर्दछु । यी र यस्तै अन्य क्रियाकलापहरूको सहयोगबाट पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांशको मान निकाल्न लगाइसकेपछि यो चतुर्थांशको विस्तार निकाल्ने औपचारिक तरिकाको खोजी गर्न लगाउने गर्दा यसको धारणा सही ढङ्गले विकास हुने गरेको अनुभव गरेको छु ।

तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) र पहिलो चतुर्थांश (Q_1) बीचको अन्तरलाई चतुर्थांशको विस्तार (Inter quartile range) भनिन्छ । चतुर्थांशको विस्तार आधालाई अर्धचतुर्थांशीय विस्तार (Semi interquartile range) अथवा चतुर्थांशीय भिन्नता (Quartile deviation) भनिन्छ ।

चतुर्थांशीय भिन्नता पत्तालगाउन पहिलो चतुर्थांश (Q_1) र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) पत्ता लगाउनु पर्ने हुन्छ । यसका लागि Q_1 र Q_3 निकाल्न व्यक्तिगत र खण्डित श्रेणीमा निम्नअनुसार गरिन्छ ।

$$Q_1 = \frac{N+1}{4} \text{ औं पद}$$

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$$ औं पद, यसमा N श्रेणीमा रहेको पदहरूको सङ्ख्या हो ।

त्यस्तै वर्गीकृत तथ्याङ्क वा निरन्तर श्रेणी (Continous series) मा Q_1 र Q_3 पत्ता लगाउन, Q_1=N/2 औं पद र Q_3=3N/4 औं पद गरी Q_1 र Q_3 पर्ने श्रेणीअन्तर (Class interval) पत्ता लगाई वास्तविक Q_1 र Q_3 निम्न सूत्रको प्रयोग गरी निकाल्ने गरिन्छ :

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

यसमा,

L=Q_1 पर्ने श्रेणीअन्तरको तल्लो सीमा (Lower limit)

c.f.=Q_1 पर्ने श्रेणीअन्तरभन्दा माथिल्लो श्रेणीअन्तरको सञ्चित बारम्बारता

f=Q_1 पर्ने श्रेणी अन्तरको बारम्बारता

i=श्रेणीअन्तरको आकार

त्यस्तै,

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

यसमा,

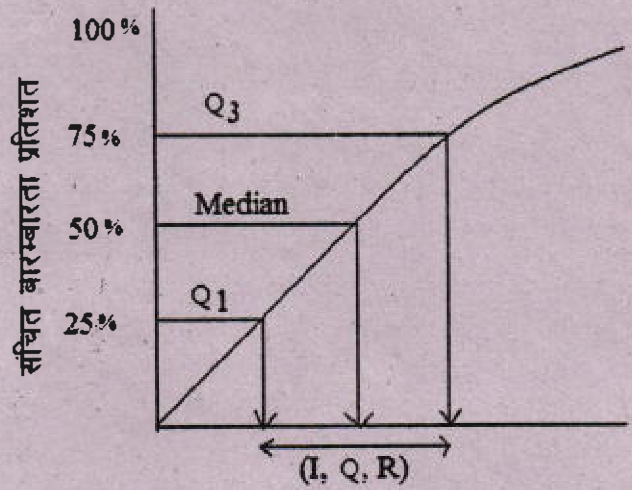
L=Q_3 पर्ने श्रेणीअन्तरको तल्लो सीमा (Lower limit)

c.f.=Q_3 पर्ने श्रेणीअन्तरभन्दा माथिल्लो श्रेणीअन्तरको सञ्चित बारम्बारता

f=Q_3 पर्ने श्रेणी अन्तरको बारम्बारता

i=श्रेणीअन्तरको आकार

कुनै पनि तथ्याङ्कबाट यसै प्रकारले Q_1 र Q_3 पत्ता लगाइसकेपछि चतुर्थांशीय भिन्नता (IQR) गरी पत्ता लगाउने 'Q_3-Q_1' निकालिन्छ । यसलाई ग्राफको माध्यमबाट पनि देखाउन सकिन्छ । जस्तै :



चतुर्थांशीय भिन्नता

यहाँ दिइएको ग्राफका आधारमा निम्न निष्कर्षमा पुग्न सकिन्छ :

- Q_1 भनेको तथ्याङ्कको जम्मा बारम्बारताको 25% को पदको मान हो । अर्थात् N/4 औं मान हो । यसलाई तल्लो चतुर्थांश पनि भनिन्छ ।
- Q_2 भनेको कूल बारम्बारताको 50% को पदको मान हो । अर्थात् 2N/4=N/2 औ मान हो । यसरी आउने मान मध्यिका (Medium) नै हो । अर्थात् मध्यिका दोस्रो चतुर्थांश हो ।
- Q_3 भनेको कूल बारम्बारताको 75% पदको मान हो । अर्थात् 3N/4 औ मान हो । यसलाई माथिल्लो चतुर्थांश पनि भनिन्छ ।

यसरी प्राप्त तथ्याङ्कको Q_1 र Q_3 पत्ता लगाइसकेपछि तथ्याङ्कको चतुर्थांश पत्ता लगाउन "Q_3-Q_1" गरी निकाल्ने गरिन्छ । यसको उदाहरणका लागि एउटा वर्गीकृत तथ्याङ्क लिएर चतुर्थांशको विस्तार (Inter-quartile range) निकालेर हेरौं ।

कुनै एउटा कक्षामा गणित विषयमा विद्यार्थीहरुले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क निम्नअनुसार छ :

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या
5-15	8
15-25	12
25-35	15
35-45	9
45-55	6

यस तथ्याङ्कको चतुर्थांशीय विस्तार पत्ता लगाउनका लागि पहिला पहिलो चतुर्थांश (Q_1) र तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) पत्ता लगाउनु पर्दछ । यसका लागि सर्वप्रथम प्राप्त तथ्याङ्कलाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा परिवर्तन गर्नुपर्दछ ।

प्राप्ताङ्क (Marks)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
5-15	8	8
15-25	12	20
25-35	15	35
35-45	9	44
45-55	6	50

जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या (N)=50

Q_1 =N/4 औं पद

=50/4=12.5 औं पद ।

Q_1 '15-25' को वर्गान्तरमा पर्दछ ।

अब, सूत्र प्रयोग गर्दा,

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

$$= 15 + \frac{\frac{50}{4} - 8}{12} \times 10$$

$$= 15 + \frac{12.5 - 8}{12} \times 10$$

$$= 15 + 3.75$$

Q_1=18.75

फेरि,

Q_3=3N/4 औँ पद

=(3×50)/4 औँ पद

=37.5 औँ पद

त्यसैले Q_3 "35-45" को वर्गरुपान्तरमा पर्दछ ।

अब,

सूत्र प्रयोग गर्दा,

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

$$= 35 + \frac{\frac{3 \times 5.0}{4} - 35}{9} \times 10$$

$$= 35 + \frac{37.5 - 35}{9} \times 10$$

$$= 35 + 2.78$$

Q_3=37.78

फेरि,

चतुर्थांशको विस्तार (Inter quartile range) निकाल्दा,

IQR =Q_3-Q_1

=37.78-18.75

IQR=19.03 हुन्छ ।

३. **परियोजना कार्य :**

- आफूले पढाउने कुनै एउटा कक्षाका विद्यार्थीहरूलाई मिल्ने जुत्ताको नाप उनीहरूलाई नै सोधेर पत्ता लगाउनुहोस् । यसरी आएको तथ्याङ्कबाट मध्यक, मध्यिका, रीत, विस्तार र चतुर्थांशको विस्तार पत्ता लगाउनुहोस् ।
- तपाइँको विद्यालयबाट गएको वर्ष एस.एल.सी. परीक्षामा समावेश हुने विद्यार्थीहरूले गणित विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई निरन्तर श्रेणीको तथ्याङ्कमा राखी त्यसको आधारमा मध्यिका, मध्यक, रीत, विस्तार र चतुर्थांशको विस्तार पत्ता लगाउनुहोस् । यसरी पत्ता लगाइएका नापहरू हाम्रो शिक्षणसिकाइ कार्यका कुनकुन क्षेत्रमा केकसरी प्रयोगमा ल्याउन सकिएला ? सूची तयार पार्नुहोस् र सूचीमा उल्लेख गरिएका कुरालाई गणित शिक्षणको समयमा प्रयोगमा ल्याउने अभ्यास गर्नुहोस् । यसबाट के नतिजा आयो ? पछि निष्कर्ष बनाउनुहोस् ।
- कुनै एउटा कक्षाका विद्यार्थीहरूको उचाइ पत्ता लगाई त्यसलाई निरन्तर श्रेणीमा राखी त्यसबाट मध्यक, मध्यिका, चतुर्थांश र विस्तार पत्ता लगाउनुहोस् ।

४. **सन्दर्भ सामग्री :**

- Asthana, B.N., Elements of statistics, part 1 & 2.
- Gupta, S.P., An Easy approach of statistics.
- Gupta, S.P., Fundamental of statistics.
- Saxena, H.C., Elementary of statistics.

१. परिचय :

यो विषय माध्यमिक तहको अनिवार्य गणित पाठ्यक्रममा समावेश गरिएको छ । यो विषय प्रयोगात्मक भएकाले विद्यार्थीहरूलाई यसका पदहरूको परिभाषा तथा विभिन्न चरणका धारणाहरू बताउन कक्षामा सकेसम्म प्रयोग गरिनु आवश्यक हुन्छ । यस तहमा संभाव्यताका साधारण परिचय तथा यसका जोड र गुणन सिद्धान्तको साधारण क्रियाहरू गर्ने बारे छलफल गरिनेछ ।

२. विषयवस्तु :

२.१ सम्भाव्यताको आधारभूत धारणा

गणित शिक्षक रीताजी प्रायजसो गणित कक्षामा केही न केही सामग्रीको प्रयोग गर्नुहुन्छ । आजको पाठमा उहाँले विद्यार्थीहरूलाई ६ समूहमा विभाजन गर्नुभयो र प्रत्येक समूहलाई एकएकओटाका दरले सिक्का, स्पीनर (Spinner), घन, तास, गोटी वितरण गर्नुभयो र प्रश्न गर्नुभयो "यी सामग्रीहरू केका लागि हुन् ? कसरी खेल खेल्छौं ? आदि" । केही समयपछि प्रत्येक समूहले एकएकओटा फरक सामग्रीको प्रयोग बारे प्रस्तुत गर्न लगाउनुभयो । जस्तै कि पहिलो समूहले एउटा सिक्का उफार्दा के आउँछ ? दोस्रो समूहले स्थिर वस्तु घुमाउँदा के आउँछ भनेर हेर्ने भन्दै प्रयोग गरेर पनि देखाए । त्यस्तै तेस्रो समूहले गोटी र चौथो समूहले तासको एक प्याकबाट एउटा तास झिक्ने र के आउँछ भनेर हेर्ने भने । यी सबै परीक्षण (Experiment) का उदाहरण हुन भनी उहाँले प्रष्ट पार्नुभयो । केही कार्य गरेको वा कुनै अवस्थाको अवलोकन गरी प्राप्त परिणामहरुको रेकर्ड गरिने कार्यलाई परीक्षण भनिन्छ । (क) स्पीनर घुमाउने, सिक्का फाल्ने जस्ता कार्य, (ख) मानिसहरुले बस स्टपमा बस कुर्न खर्च गर्ने समय, वा विद्यार्थीले अध्ययनमा राखेको समयको रेकर्ड गर्ने दुवै कार्य परीक्षणका उदाहरण हुन् । तर यी दुईमा भिन्नता पनि छ । गोटी फ्याक्ने, सिक्का फ्याक्ने दोहोऱ्याउन सकिने हुन्छन् । तर मानिसले बस चढ्दा खर्च गर्ने समय अवलोकन जस्ता दोहोऱ्याउन नसकिने खाले हुन्छ । फेरि उहाँले माथिका परीक्षणका नतिजाहरू केके हुन्छन् ? भनी प्रत्येक समूहलाई प्रश्न गर्नुभयो र नतिजाहरू एकजना विद्यार्थीलाई बोर्डमा लेखाउनुभयो । जस्तै : एउटा सिक्का उफार्दा दुईओटा पाटोमध्ये एउटा पाटो पल्टिन्छ । पल्टेको पाटो Head भए त्यो एउटा नतिजा हो । यस परीक्षणको अर्को नतिजा Tail हो । प्रत्येक खेलमा नतिजा आएकै हुन्छ भनी विद्यार्थीले भने ।

त्यसपछि उहाँले पाठ्यपुस्तकको "संभाव्यता" पाठ हेर्न लगाउनुभयो र त्यहाँ भएका पदहरू (Terms) टिपोट गर्न लगाई समूहगत रूपमा बोर्डमा लेख्न लगाउनुभयो ।

जुन यस प्रकार थिए :

२.१ यादृच्छिक परीक्षण (Random experiment)

२.२ परिणाम (Outcome)

२.३ समान संभाव्य परिणाम (Equally likely outcome)

२.४ संभाव्य परिणाम (Possible outcome)

२.५ नमूना क्षेत्र (Sample space)

२.६ घटना (Event)

२.७ प्रारम्भिक घटना (Elementary outcome)

२.८ संभाव्यता स्केल (Probability scale)

२.९ पारस्परिक निषेधक घटना (Mutually exclusive events)

२.१० अनाश्रित घटना (Independent event)

२.११ पराश्रित घटना (Dependent event)

२.१२ वृत्त चित्र (Tree diagram)

२.१३ जोड सिद्धान्त (Addition law)

२.१४ गुणन सिद्धान्त (Multiplication law)

यी माथिका पदहरूको व्याख्या गर्ने क्रममा रीताजीले निम्नअनुसारका प्रयोग गर्नुभयो । उहाँले ६ ओटै पाटामा रातो रङ्गीएको एउटा गोटी र नं. १ देखि नं. ६ सम्म दिएको अर्को एउटा गोटी लिनुभयो । यी दुबै गोटीलाई बेन्चमा उफार्नुभयो । पहिलो गोटीले जहिले पनि रातो मात्र पल्टेको देखायो । त्यसैले यस परीक्षणको परिणाम यही आउँछ भनी किटान गर्न सकिन्छ । त्यसैले यो परीक्षणलाई गोटीको सबै पाटामा रातो लगाइएको हुँदा परीक्षणपूर्व नै रातो पाटा आउने निश्चित रुपमा भन्न सकिन्छ । परीक्षण वा अवलोकनपूर्व नै कुनै परिणामको किटानी गर्न सकिने खालका परीक्षण वा अवलोकनलाई पक्षपाती परीक्षण (Baised experiment) भनिन्छ । त्यस्तै अर्को गोटी उफार्दा उहाँले प्रश्न गर्नुभयो "यही परिणाम आउँछ भनी भन्न सकिन्छ ?" तर विद्यार्थीले नसक्ने उत्तर दिए । त्यसैले यस्तो परीक्षणलाई यादृच्छिक परीक्षण (Random experiement) भनिन्छ भनी व्याख्या गर्नुभयो । परीक्षण वा अवलोकन गर्दा कुनै निश्चित परिणामलाई किटानी साथ आउँछ भन्न नसकिने भएमा यस्ता परीक्षण वा अवलोकनलाई यादृच्छिक परीक्षण (Random experiment) भनिन्छ । अर्को प्रयोगहरूमा पनि यादृच्छिक परीक्षणका सामग्रीहरू कस्तो हुनुपर्छ भनी छलफल गर्नुभयो ।

उहाँले एउटा सिक्का उफार्नुभयो र के पल्टिन्छ भनी प्रश्न गर्नुभयो । विद्यार्थीले Head वा Tail मध्ये कुनै एउटा पल्टिन्छ भने । त्यसैले यहाँ एउटा परिणाम (Outcome) Head अथवा अर्को परिणाम Tail हुन्छ । जुन संभाव्य परिणाम (Possible outcome) हो जसका परिणामहरू

आउने संभावना समान रहन्छ वा प्रत्येक परिणाम आउने संभावना उत्तिकै हुन्छ । त्यसैले यो समान संभाव्य परिणाम (Equally likely outcome) हो भनी छलफल गर्नुभयो ।

त्यस्तै उहाँले परिणामहरूको समूहलाई बोर्डमा {H, T} लेख्नुभयो । यसरी परीक्षणमा निस्कने सबै परिणामहरूको समूहलाई नमूना क्षेत्र (Sample space) भनिन्छ भन्नुभयो । यसलाई S={H, T} लेख्नुभयो । यसपछि प्रत्येक समूहलाई आआफ्नो प्रयोगको नमूना क्षेत्र बोर्डमा लेख्न लगाउनुभयो । सम्भाव्यता नमुना क्षेत्र निश्चित र अनिश्चित दुवै खाले समूह हुन्छन् । डाइस फाल्ने परीक्षणमा बन्ने नमुना क्षेत्र s={1, 2, 3, 4, 5, 6} निश्चित समूह (Finite set) हो । विद्यार्थीले गणितको अध्यापनमा खर्चेको समयको रेकर्ड गर्ने परीक्षणको नमुनाक्षेत्र अनिश्चित (Infinite) समूह हुन्छ । यसको नमुनाक्षेत्र तयार पारी पुष्टि गर्न कसरी सकिएला ? रीताजीले प्रश्न गर्नुभयो "परीक्षणको घट्ना (Event) भनेको के हो ?

उहाँले एउटा सिक्का उफार्नुभयो । एकजना विद्यार्थीलाई बोर्डमा परिणामहरूको समूह लेखाउनु भयो जुन {H, T} थियो । त्यसको उपसमूहहरू (Subsets) पनि लेखाउनु भयो, जुन {H}, {T}, {H, T} र Φ थिए । परीक्षणको नमूनाक्षेत्रका प्रत्येक उपसमूहलाई त्यस परीक्षणको घटना (event) भनिन्छ भनी छलफल गर्नुभयो । प्रत्येक समूहलाई ३ भाग भएको स्पीनर र गोटीको घटना सङ्ख्या निकाल्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीहरूले असजिलो अनुभव गरे पछि उहाँले कुनै समूहको उपसमूह सङ्ख्या निकाल्ने तरिकाको पुनरावलोकन गर्नुभयो । उपसमूहको सङ्ख्या निकाल्न $n(S)=2^n$ प्रयोग गर्नुभयो, जहाँ उपसमूहको सङ्ख्या सो समूहमा भएको सदस्य सङ्ख्या (n) को अनुसार 2^n हुन्छ । यस्तै : ३ रङ्गमा रङ्गीएको स्नीपरको उपसमूह सङ्ख्या $2^3=8$ ओटा हुन्छ । यहाँ स्पीनर घुम्ने परीक्षणको नमुनाक्षेत्र नै तीनओटा तरिकाहरुका अंशहरु हुन् ।

घटनाहरु विशेष प्रकृतिका हुन्छन् भन्ने चिनाउने क्रममा शिक्षिकाले दुईओटा वर्गमा विभाजन गर्नुभयो : (क) प्रारम्भिक वा सामान्य घटना (Elementary or Simple Event), (ख) असम्भव र निश्चित घटनाहरु ।

- डाइस फ्याक्दा ९ आउने घटना,
- तासको विटोबाट एउटा तास थुत्दा पानको १५ आउने,
- दुईओटा सिक्कालाई टेबुलमा फ्याक्दा {H, H, H} आउने ।

यी माथिका नतिजाहरु आउने गरी यी तीनओटै परीक्षणहरुको कुनै पनि नमूना क्षेत्र परिभाषित हुन सक्दैनन् । उल्लिखित नतिजाहरुबाट समावेश भएका घटनाहरू पनि बन्दैनन् । तसर्थ यी तीन उदाहरणहरु असम्भव घटनाहरु हुन् । खाली समूह जनाउने घटनाहरु नै असम्भव घटनाहरु हुन् ।

यदि यसो हो भने सबै सम्भाव्य नतिजाहरु समावेश भएको घटना अर्थात् नमूनाक्षेत्र नै समावेश भएको घटना निश्चित घटना हुनेभयो । यो भनाइको पुष्टि गराउन विद्यार्थीहरुबाटै उदाहरण प्रस्तुत गराउने काम गराउनुभयो । तपाईं पनि यसबारे विचार गर्नुहोस् ।

यदि घटनामा एउटा मात्र सदस्य (नतिजा) छ भने त्यस्तो घटनालाई प्रारम्भिक घटना (Elementary event) भनिन्छ । यसलाई {H} वा H मात्रै पनि लेख्ने चलन छ भन्नुभयो ।

एउटामात्र नतिजा (Outcome) भएको घटना प्रारम्भिक घटना हो । वास्तवमा घटना नतिजाहरुबाट बनेका समूहहरु हुन् ।

असम्भव र निश्चित घटनाहरु पनि ती घटनाहरुले समावेश गरेका नतिजा (Outcome) का आधारमा निर्धारण हुन्छ भन्ने धारणा निम्न उदाहरणहरुबाट दिने कोशिस गर्नुभयो । शिक्षिका रीताजीले संभाव्यताको परिभाषा यस प्रकार दिनुभयो:

सिक्का उफार्ने परीक्षणमा H आउने संभाव्यता भनेको H परिणाम आउने सङ्ख्या र जम्मा परिणामको सङ्ख्या (नमूना क्षेत्र) को अनुपात हो ।

त्यसैले,

P(H)=n(H)/n(S)=H को सङ्ख्या / जम्मा परिणाम सङ्ख्या

=1/2

त्यसपछि उहाँले वितरण गरिएका सामग्रीहरूको संभाव्यता निकाल्न समूह कार्य दिनुभयोर समूहलाई आआफ्नो निष्कर्ष प्रस्तुत गर्न लगाउनुभयो । जस्तै : 52 पत्ति तासमा ४ आउने संभाव्यता निकाल्न, 4 को सङ्ख्या चारओटा हुन्छन् भने जसमा पत्ती ५२ ओटा हुन्छ । त्यसैले,

P(4)=4 को सङ्ख्या / जम्मा पत्तीको सङ्ख्या

=4/52=1/13 हुन्छ ।

उहाँले प्रश्न राख्नुभयो कुनै घटनाको अधिकतम संभाव्यता कति हुनसक्छ ? त्यस्तै न्यूनतम संभाव्यता कति हुनसक्छ ?

यस प्रश्नको उत्तरका लागि उहाँले निम्नकुराहरूको छलफल गर्नुभयो ।

सिक्का उफार्ने परीक्षणमा P(H)=1/2 छ भने P(T)=1-P(H) =1-1/2=1/2 हुन्छ । त्यसैले कुनै घटना A को संभाव्यता x छ भने त्यसको पूरक घटना A को संभाव्यता 1-x हुन्छ ।

अर्थात्,

P(A)=x भए $P(\bar{A})$=1-P(A) जहाँ $\bar{A}$ भनेको A को पूरक हो ।

कुनै घटनाको संभाव्यता 0 र 1 को बीचमा पर्ने भएकाले यसलाई स्केलमा जनाउने पनि चलन छ । संभाव्यता जनाउने स्केललाई संभाव्यता स्केल (Probability scale) भनिन्छ ।

उहाँले निम्न बुँदाहरू लेखिएको कार्ड विद्यार्थीहरूलाई देखाउनुभयो र संभाव्यता स्केलमा कहाँकहाँ पर्छ विद्यार्थीहरूलाई भन्न लगाउनुभयो ।

- गोटी गुडाउँदा 5 आउने (उत्तर : 1/6)
- 52 पत्ति तासबाट एउटा तास नहेरी झिक्दा पानको एक्का आउने ।
- सिक्का उफार्दा H पल्टने ।
- रातो, नीलो र पहेलो रङ्ग भएको स्पीनरमा रातो पर्ने ।
- नं. 1 देखि नं. 6 सम्म कुँदिएको गोटी गुडाउँदा नं 7 पर्ने ।
- सुत्केरी हुँदा छोरी पाउने ।
- तीनओटा राता बलहरू भएको झोलाबाट एउटा बल झिक्दा रातो पर्ने ।
- MATHEMATICS मा E आउने ।
- ALGEBRA अक्षरमा नहेरी एउटा अक्षर छुँदा B पर्ने ।

संयुक्त घटनाहरु यस्तै प्रकारका उदाहरणहरू विद्यार्थीहरूलाई पनि बनाउन लगाउनुभयो ।

रीताजीले पारस्परिक निषेधक घटना र ती घटनाहरूको जोड सिद्धान्त, संयुक्त परिणामहरू निकाल्न वृक्षचित्र, अनाश्रित तथा पराश्रित घटनाहरू तथा अनाश्रित घटनाहरूको गुणन सिद्धान्त बारे कक्षामा निम्न क्रियाकलापहरू गराउनुभयो ।

उहाँले एउटा गोटी गुडाउनुभयो र विद्यार्थीहरूलाई सोध्नुभयो यसका नमूना क्षेत्र के हुन्छ ? विद्यार्थीले उत्तर निम्नअनुसार दिए,

s={1,2,3,4,5,6}

यसका कुनै तीनओटा घटनाहरू बनाउन लगाउनुभयो । विद्यार्थीहरूले यस प्रकार बनाए ।

A={1,2}, B={3,4}, C={1,5}

यदि सो गोटी फाल्दा 1 पल्ट्यो भने A र C घटयो भन्छौ । तर B घट्यो भन्दैनौ किन कि 1 एउटा नतिजा हो, यो समूह A र C मा छ । तर समूह B मा यो नतिजा छैन् । यहाँ घटना A र घटना B लाई पारस्परिक निषेधक घटनाहरू भन्दछौ । अर्थात् एउटै परीक्षणका दुईओटा अलगिएका (Disjoint) घटनाहरू अर्थात् नतिजाको समानता नदेखिएका घटनाहरुलाई पारस्परिक निषेधक घटनाहरू भन्दछौ ।

यहाँ $A \cap B = \Phi$, यहाँ A र B पारस्परिक निषेधक घटना हुन् तर $A \cap C = \{1\} \neq \Phi$ हुन्छ । त्यसैले A र C पारस्परिक निषेधक घटनाहरू होइनन् ।

त्यसपछि उहाँले अरु उदाहरणहरू विद्यार्थीलाई बनाउन लगाउनुभयो र त्यसपछि केही उदाहरणहरुको कक्षामा छलफल गर्नुभयो ।

उहाँले पारस्परिक निषेधक घटनाहरूको जोड सिद्धान्तको सूत्र प्रतिपादन गर्न समूहको सहायताले यस प्रकार प्रमाणित गर्नुभयो । माथि कै उदाहरणअनुसार,

S={1,2,3,4,5,6},

A={1,2},

B={3,4}, र

C={1,5}

यहाँ,

n(S)=6, n(A)=2, n(B)=2, n(C)=2 हुन्छ ।

P(A ∩ C)=1, n(A ∪ C)=3

$$P(A \cup C) = P(A)+P(C)-P(A \cap C)$$
$$= \frac{2}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}$$
$$= \frac{3}{6}$$
$$= \frac{1}{2} \text{ हुन्छ ।}$$

यस सिद्धान्तलाई संभाव्यताको जोड् सिद्धान्त भनिन्छ । यसैलाई फेरि पारस्परिक निषेधक घटनाहरू A र B बाट लिँदा,

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$
$$= \frac{2}{6}+\frac{2}{6}-\frac{0}{6}$$
$$= \frac{4}{6}$$
$$= \frac{2}{3} \text{ हुन्छ ।}$$

त्यसैले A र B पारस्परिक निषेधक घटनाहरू भए P(A ∪ B)=P(A)+P(B) हुन्छ ।

यसैअनुरूप उहाँले प्रत्येक विद्यार्थीलाई समस्याहरू बनाउन लगाई समाधान पनि गर्न लगाउनुभयो ।

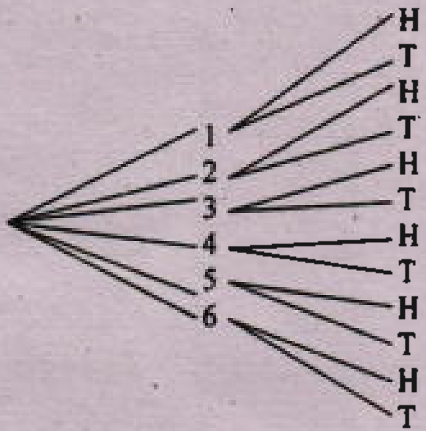
संयुक्त परीक्षण : एउटा पूर्ण परीक्षणलाई दुई वा दुईभन्दा बढी ससाना परीक्षण एकाइहरुमा विभाजित गरिन्छ भने यिनीहरुलाई Trail भनिन्छ । संयुक्त परीक्षणका नमुनाक्षेत्र परिभाषित गर्ने कार्य जटिल हुन्छ । यसलाई शिक्षिका रीताले उदाहरणहरुबाट प्रस्ट गर्नुभएको थियो ।

२.२ वृक्ष चित्र (Tree diagram):

रीताजीले एउटा गोटी र सिक्काको परीक्षण गर्नुभयो । पहिले गोटी गुडाउनुभयो र त्यसपछि सिक्का उफार्नुभयो । यी दुई परीक्षणका परिणामहरू मिलाएर बनेको परिणाम एउटा संयुक्त परीक्षणको परिणाम हो ।

यसलाई वृत्त चित्रमा यस प्रकार प्रस्तुत गर्न लगाउनुभयो ।

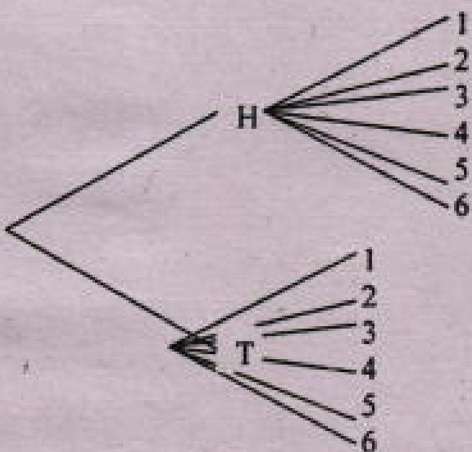
सम्पूर्ण परिणाम



1H
1T
2H
2T
3H
3T
4H
4T
5H
5T
6H
T6

त्यस्तै पहिले सिक्का र पछि गोटी गुडाउँदा भने वृक्ष चित्र यस प्रकार गर्नुभयो ।

सम्पूर्ण परिणाम



H1
H2
H3
H4
H5
H6
T1
T2
T3
T4
T5
T6

यस परिक्षणको परिणामलाई तालिकामा पनि यस प्रकार देखाउन सकिने बारे छलफल गर्नुभयो ।

सिक्का / गोटी

सिक्का		1	2	3	4	5	6
	H	H1	H2	H3	H4	H5	H6
	T	T1	T2	T3	T4	T5	T6

यहाँ दुईओटा परीक्षणहरु सिक्का फ्याक्ने (X_1) र गोटी फ्याक्ने (X_2) छन् । यी दुईओटा परीक्षणको कार्टेसियन गुणनफल (Cartesian product) ले अर्को एउटा परीक्षण जनाउँछ । मानौं त्यो x भए, $X=X_1 \times X_2=\{(x_1,x_2)/x_1 \in X_1, x_2 \in X_1\}$ । तसर्थ नमूना क्षेत्र क्रमजोडाहरुले बनेको हुन्छ । माथिको उदाहरणबाट नमुनाक्षेत्र S_x={1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T} हुन्छ ।

यस्तै गरी अरु पनि संयुक्त परीक्षणहरुका उदाहरण बनाउने र घटनाहरुको निर्माण गर्ने र सम्भाव्यता निकाल्ने कार्य विद्यार्थीहरुलाई दिनुभएको थियो । तपाईं पनि यस्ता अभ्यासहरु निर्माण गरी विचार गर्नुहोस् ।

२.३ अनाश्रित (Independent) तथा पराश्रित (Dependent) घटना :

रीताजीले ५ ओटा सेतो, ३ ओटा नीलो र २ ओटा रातो टेबुलटेनिस बलहरू एउटा झोलामा राख्नुभयो । प्रश्न गर्नुभयो नहेरी कुनै एउटा बल झिक्दा नीलो पर्ने संभाव्यता कति होला ? विद्यार्थीले २/१० भनी उत्तर दिए किनभने ३ ओटा नीलो र जम्मा बलको सङ्ख्या १० ओटा छन् । फेरि सो बल झोलामा फर्काउँदा फेरि नीलो पर्ने संभाव्यता ३/१० नै हुन्छ भने सेतो पर्ने संभाव्यता ५/१० र रातो पर्ने २/१० हुन्छ । यस्ता घटनाहरूमा एउटा घटनामा भर परेको छैन् । अथवा, एउटा घटना घट्दा अर्को घटनाको संभाव्यतालाई कुनै असर गर्दैन भने त्यस्ता घटनाहरूलाई अनाश्रित घटना भनिन्छ ।

सो झोलाबाट एउटा बल झिक्दा नीलो पर्ने संभाव्यता २/१० हुन्छ । यदि सो नीलो बल फेरि झोलामा नफर्काउने हो भने नीलो बलको सङ्ख्या घटयो त्यसैले दोस्रो पटक पनि नीलो बलको सङ्ख्या घट्यो त्यसैले दोस्रो पटक पनि नीलो बल पर्ने संभाव्यता १/९ हुन्छ । जहाँ पहिलो घटनाले दोस्रो घटनालाई असर गर्‍यो र त्यसैले एउटा घटना घट्दा अर्को घटनालाई असर गर्छ भने त्यस्ता घटनाहरूलाई आश्रित घटना भनिन्छ ।

यस अनाश्रित घटनालाई तालिकामा उदाहरणद्वारा यस प्रकार देखाउनुभयो :

एउटा रातो, एउटा नीलो र दुईओटा सेतो बल भएको झोलाबाट एउटा बल झिक्ने र फेरि झोलामा फर्काउने हो भने अर्को पटक फेरि एउटा बल झिक्दा हुने संभाव्यताहरूलाई तालिकामा यसप्रकार देखाउनुभयो :

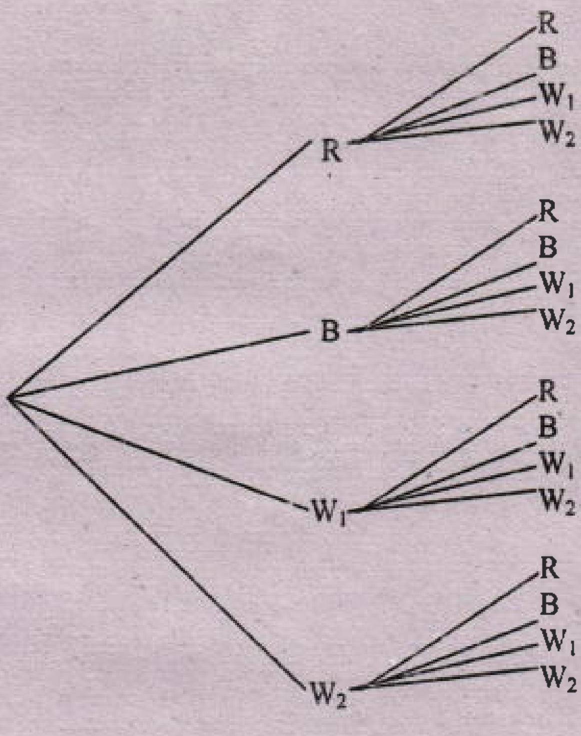
	R	B	W_1	W_2
R	RR	RB	RW_1	RW_2
B	BR	BB	BW_1	BW_2
W_1	W_1R	W_1B	W_1W_1	W_1W_2
W_2	W_2R	W_2B	W_2W_1	W_2W_2

माथिको तालिकामा छायाँ परेको क्षेत्रमा भएका सबै जोडा नतिजाहरुले यो परीक्षणको नमुना क्षेत्र बनाउँछ । यसलाई वृक्ष चित्रमा यसरी देखाइएको थियो ।

आश्रित घटनाको उदाहरण यसरी प्रस्तुत गर्नुभयो । त्यसैगरी झोलाबाट झिकिएको एउटा बल नफर्काउने हो भने अर्को पटकका लागि हुने संभाव्यताहरूलाई निम्नअनुसारका तालिकामा देखाउनुभयो ।

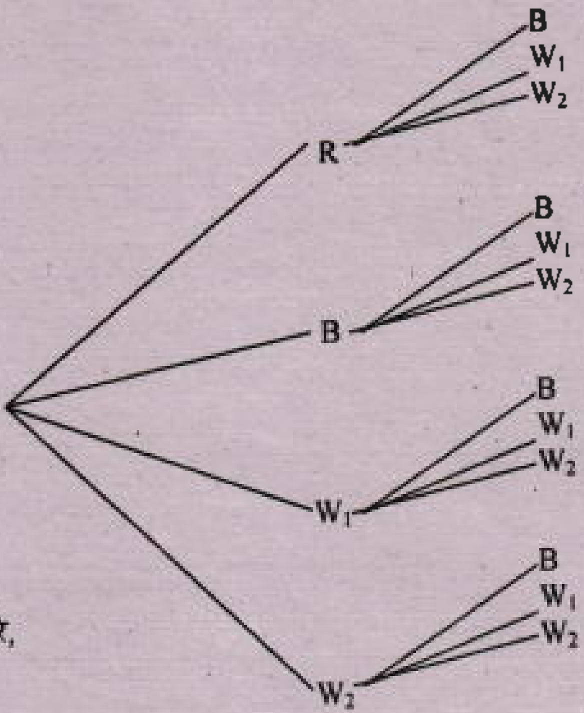
	R	B	W_1	W_2
R	RR	RB	RW_1	RW_2
B	BR	BB	BW_1	BW_2
W_1	W_1R	W_1B	W_1W_1	W_1W_2
W_2	W_2R	W_2B	W_2W_1	W_2W_2

उहाँले माथिको उदाहरणहरूको वृत्तचित्र क्रमैसँग यस प्रकार देखाउनुभयो ।



नमुना क्षेत्र

RR
RB
RW_1
RW_2
BR
BB
BW_1
BW_2
W_1R
W_1B
W_1W_1
W_1W_2
W_2R
W_2B
W_2W_1
W_2W_2



नमुना क्षेत्र

RR
RW_1
RW_2
BR
BW_1
BW_2
W_1R
W_1B
W_1W_2
W_2R
W_2B
W_2W_1

फेरि,

यो उदाहरणमा, पहिलो पटक आएको नतिजापछि कुनै बल (मानौं R) लाई पुनः झोलामा नराख्दा, अब आउने प्रत्येक घटनाको नतिजामा फरक परेका पाइयो । यसर्थ यो अवस्थाका घटनाहरु आश्रित हुन पुगे ।

यहाँ, अनाश्रित घटनाको अवस्थामा,

पहिलो बल रातो आउने घटना

$R=\{RR, RB, RW_1, RW_2\}$

दोस्रो बल नीलो आउने घटना

$Q=\{RB, BB, W_1B, W_2B\}$

सम्भाव्यताको परिभाषाअनुसार, (जम्मा नतिजाहरु १६ ओटा छन् र तीमध्ये पहिलो पटक रातो आउने ४ ओटा र दोस्रो पटक नीलो आउने नतिजाहरु ४ ओटा छन्)

त्यस्तै,

$P(R)=4/16$ र $P(B)=4/16$

तालिकाबाट,

$P(R$ र $B)=P(R \cap B)$

$=1/16$

$=(1/4)\times(1/4) \quad =(4/16)\times(4/16)$

$=P(R)\times P(B)$

त्यसैले, यदि दुईओटा घटनाहरू A र B अनाश्रित छन् भने

P(A र B)=$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ हुन्छ ।

त्यस्तै आश्रित घटनाहरूको अवस्थामा,

पहिलो बल रातो आउने घटना $R=\{RB, RW_1, RW_2\}$

दोस्रो बल नीलो बल आउने घटना $B=\{RB, W_1B, W_2B\}$

यहाँ,

P(R र B)=1/12 (किन कि, पहिले R र दोस्रो नीलो आएको घटना नमूना क्षेत्रमा एउटा मात्र छ)

अब, अलगअलग हेरौं

P(R र B)$\neq 3/12\times 3/12$ (पहिले R आउन, र दोस्रोमा नीलो आउनेको अलगअलग सम्भाव्यता गुणन गर्दा)

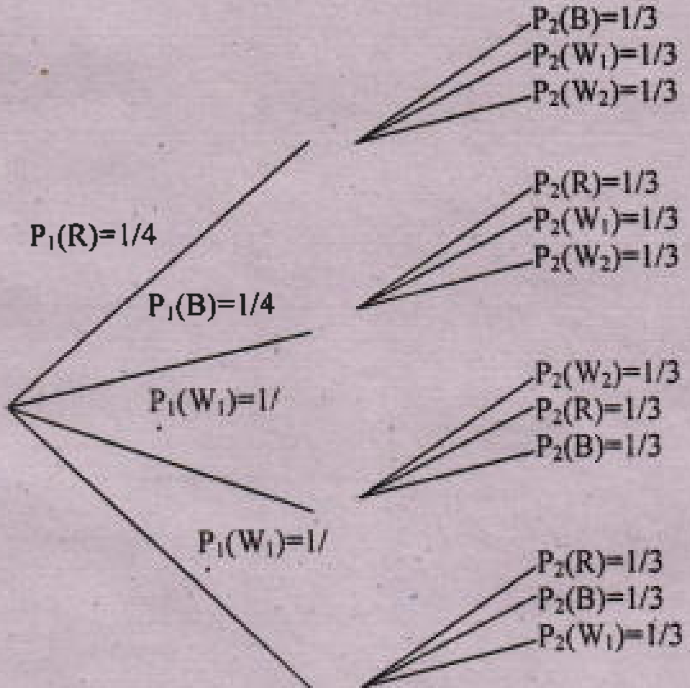
$=1/16$

$\neq P(R)\times P(B)$

त्यसैले, यदि दुईओटा घटना A र B पराश्रित छन् भने

P(A र B)=$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

तर यसलाई सम्भाव्यता सङ्ख्याको वृक्ष चित्रमा यस प्रकार देखाउन सकिन्छ ।



त्यसैले पहिले रातो र पछि नीलो बल आउने संभाव्यता

=P(R र B)

=1/4×1/3

=1/12 हुन्छ ।

३. परियोजना कार्य :

निम्नलिखित कार्य विद्यार्थीहरुलाई गर्न लगाउनुहोस् र उनीहरुको कार्यसम्पादनका आधारमा सम्भाव्यता शिक्षणमा प्रयोगात्मक कार्यहरुको महत्वबारेमा प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् ।

- एउटा सिक्का 100 चोटी उफार्दा संभाव्यता कतिकति भए ?
- एउटा गोटी 600 पटक गुडाउनु र प्रत्येक नं. आउने संभाव्यताहरूबीच के सम्बन्ध भयो ?

एकाइ छ
त्रिकोणमिति

Competency: Understand trigonometric concepts, simple identities and use of the concepts and priciples.

१. परिचय :

त्रिकोणमितिको उत्पत्तिका बारेमा इतिहास खोज्ने हो भने यो सँस्कृत शब्दको गलत भाषिक रूपान्तरणबाट भएको देखिन्छ । आठौ शताब्दीमा इण्डियाबाट Sine function अरबतिर स्थानान्तर भएको इतिहासमा भेटिन्छ । अहिले भनिने Sin लाई ज्या x को अवधारणाबाट हिन्दु गणितज्ञहरूले बुझाउने गरेका थिए । आर्यभट्टले ५०० इ.पूर्व तिर ज्या–अर्धको तालिका दिइसकेका थिए । "ज्या" शब्दलाई "जीवा" अथवा "जीव" भनेर रूपान्तरण गरियो । प्राचीन अरेवियन गणितीय पुस्तकहरूबाट ल्याटिन भाषामा रूपान्तर गर्दा जीवाको अर्थ अपभ्रंश भई "जीवा" लाई "जौव" भनेर लेखिएको थियो । यसको अर्थ हुन्थ्यो महिलाहरूले घाँटीमा लगाउने गहनाको खुला भाग । यही अर्थलाई ल्याटिन भाषामा शब्द खोज्दा 'Sinus' मिल्ने भयो । 'Sinus' को अर्थ हुन्थ्यो "पत्र", "समुद्रको बाहिरबाट पस्ने बक्राकार भाग", अथवा "बक्र आकार" । यसरी हेर्दा त्रिकोणमितिको विकास Sine सँग सम्बन्धित भएको देखिन्छ । हाल त्रिकोणमितिको अध्ययनको आरम्भ समतलमा खिचिने त्रिभुजहरूमा आधारित भएर गरिन्छ । तर यसको उत्पति ज्योतिष विज्ञान (Astronomy) र गोलामा बन्ने त्रिभुजहरूको अध्ययनबाट भएको पाइन्छ । छैठौं शताब्दीअघि, ज्योतिष विज्ञान पृथ्वी जोडिएका गोलाहरूको (Nested spheres) बीचमा रहेको मान्यतामा आधारित भएर ताराहरू वा ग्रहहरूको स्थिति पत्ता लगाइन्थ्यो । प्राचीन त्रिकोणमितीय फलनहरू वृत्तका जीवाहरूसँग सम्बन्धित थियो र कोण x ले लिने जीवाको लम्बाई $2\sin\frac{x}{2}$ मानिन्थ्यो । त्रिकोणमितीय फलन Tangent र Cotangent को विकास विभिन्न उचाइका वस्तुहरूले बनाउने छायाँको लम्बाइ बारे अध्ययन गर्ने क्रममा भएको भनिएको छ । थ्यालसले 600 इ.पू. तिर पिरामिडको उचाइ पत्ता लगाउन छाँयाको दूरीलाई प्रयोगमा ल्याएको पाइन्छ । सबै काममा tan लाई प्रयोग गरिन्थ्यो । इण्डियन र अरेवियनहरूले त्रिकोणमितिलाई छाँयाको लम्बाइसँग सम्बन्धित गरेको परम्परा युरोपियन गणितज्ञका लागि पनि प्रभावकारी भयो । Secant र Cosecant फलन १५ औ शताब्दीतिर समुद्रयात्रीहरूले विकास गरेको तालिकामा सर्वप्रथम प्रयोग गरेको पाइएको थियो ।

शब्द उत्पत्ति विज्ञानले सर्वप्रथम Trigonometry शब्द 'Trigonometria' शब्दको प्रयोगबाट आएको बताउँछ । Trigonometria को शाब्दिक अर्थ "त्रिभुजहरूको नाप" हो । सन् १५९५

तिर बारथोलोमियो पिटिकस (Bartholomeo pitiscus) द्वारा प्रकाशन गरिएको पुस्तकमा Trigonometria शब्दको प्रयोग भएको थियो । त्रिकोणमितिको विकास शास्त्रीय पढाइभन्दा पनि प्रयोगको हिसाबले भएको पाइन्छ । अहिलेको आधुनिक त्रिकोणमितिको प्रयोग सर्भे विज्ञान, भौतिक विज्ञान, समुद्रविज्ञान, आदि विधामा प्रयोग हुन्छ । मेशिनको निर्माणका सिद्धान्तहरूमा यसको प्रयोग पाइन्छ ।

त्रिकोणमितिको उपयोगिताको महत्वलाई बुझेर विद्यालय तहको पाठ्यक्रममा समावेश गरिएको छ । विगतमा त्रिकोणमितिलाई ऐच्छिक गणितले चिनिन्थ्यो । तर अहिले यसको उपयोगिता साधारण पेशागत तालिमहरू (Polytechnical trades related trainings) मा समेत आवश्यक देखिएकाले अनिवार्य गणितमा पनि यसलाई ठाउँ दिइएको छ । यस एकाइमा शिक्षकहरूलाई आवश्यक पर्ने त्रिकोणमितीय ज्ञान र प्रयोगका विषयवस्तुहरूलाई प्रस्तुत गरिएको छ । उच्च त्रिकोणमितिका पाठ्यांशहरू अध्ययन गरिसकेकाहरूका लागि यो साधारण ज्ञान मात्रै हो तर पनि विद्यालय तहका विद्यार्थीहरूका लागि यो ज्ञानको संयोजन कुन क्रममा कसरी र कतिसम्म दिने भन्ने सिद्धान्तमा आधारित भएर यस एकाइको व्यवस्था गरिएको छ । यस एकाइलाई विभिन्न उप-एकाइमा विभाजन गरी छलफल गरिएको छ ।

२. विषयवस्तु :

२.१ त्रिकोणमिति सिक्नका लागि आधारभूत ज्ञान :

हाम्रो पाठ्यक्रमले पाठ्यक्रमको एकीकृत सिद्धान्तलाई अङ्गिकार गर्ने प्रण गरेको भए पनि व्यवहारमा पाठ्यक्रम सामग्रीहरूको लेखन एवम् विकास तथा कक्षाकोठाको शिक्षण सिकाइमा एकल रूपमा गणितलाई सिक्नेसिकाउने गरेको पाइन्छ । त्रिकोणमिति शिक्षण गर्दा सङ्ख्या प्रणाली, फलन, कोअर्डिनेट पद्धति, ग्राफ खिच्ने कुराहरू लगायत अन्य संरचनासँग त्रिकोणमितिलाई राम्ररी सम्बन्धित गराएर लगिएको पाइँदैन । पुस्तकहरूले Sinx लाई एउटा फलनका रूपमा लिएर प्रस्तुत गरेको छ तर पनि कक्षाकोठा शिक्षणमा सूत्रहरूको रूपमा धेरै ध्यान दिलाउने, अर्थपूर्ण सिकाइमा कम ध्यान दिने अवस्था देखा पर्ने गरेका छन् । त्रिकोणमिति राम्ररी सिक्न विद्यार्थीहरूले वास्तविक सङ्ख्या (Real number) को गुणहरू, निर्देशाङ्क पद्धति, ग्राफ र फलनका अवधारणाहरू र महत्वपूर्ण सिद्धान्तहरू जानिसकेको हुनुपर्छ । यी आधारभूत सीपहरूको विकास विद्यार्थीमा नभए सोको विकास गराउनुपर्छ । तर त्रिकोणमितिका सिद्धान्तहरूको प्रयोग मात्र गरेर समस्या समाधान गर्ने भएमा यी माथि उल्लेख गरिएका अवधारणाहरूको गहिरो ज्ञान भने जरुरी हुँदैन ।

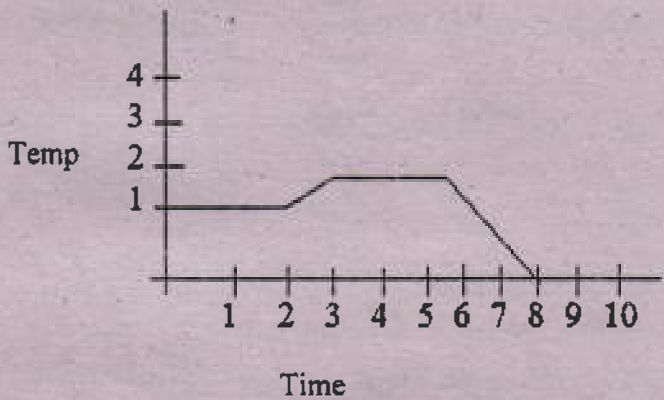
वास्तविक सङ्ख्या प्रणालीका गुणहरू, निर्देशाङ्क पद्धतिका बारेमा प्रशस्त चर्चा यस पुस्तिकाको अन्य खण्डहरूमा पनि गरिसकेका छन् । ग्राफको बारेमा पनि चर्चा भएकै छन् तर

पनि केही आधारभूत कुराहरू जुन विद्यालय तहमा पनि उपयोगी र विद्यार्थीहरूका लागि चाख लाग्ने खाले छन् तिनलाई यहाँ समावेश गरिएको र सँगसँगै फलनको कुरा पनि गरिएको छ ।

२.२ रेखाचित्र (Graph) :

रेखाचित्रको प्रयोग भौतिक विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, वाणिज्यशास्त्र, अर्थशास्त्र लगायत सबै विद्यामा चलहरूबीचको सम्बन्ध र सम्बन्धको प्रकृति र प्रवृत्तिको व्याख्या, विश्लेषणका लागि र प्रयोग गरिएको पाइन्छ । तलको चित्रमा कुनै प्रयोगमा एकखाले घोलको तापक्रममा देखिएको परिवर्तनलाई देखाइएको छ ।

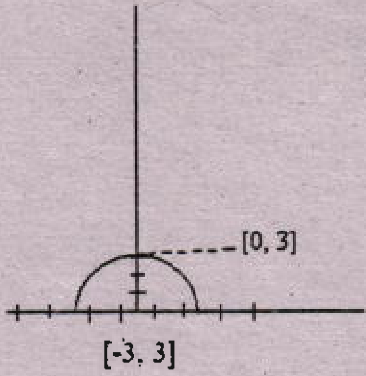
यस चित्रले प्रयोगको पहिले ३ मिनेटमा तापक्रम बढ्यो त्यसपछि ५ मिनेटसम्म त्यही तापक्रम निरन्तर रह्यो र त्यसपछि घट्न शुरु गरेको देखाइएको छ । यो चित्रले एउटा लामो तालिकाले समय र तापक्रमबारेमा जुन अदलबदलीको अवस्था देखाउनसक्छ त्योभन्दा राम्रोसँग देखाएको छ ।

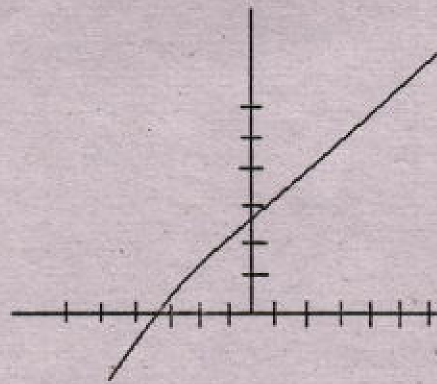


ग्राफ खिच्ने र विश्लेषण गर्ने कार्य फलनको अवधारणाबाट गराउनुपर्छ । सामान्यत फलनलाई y=f(x) ले जनाइन्छ । यहाँ दुईओटा चलहरू x र y को बीचको सम्बन्ध देखाइएको हो यो सम्बन्धमा हरेक एउटा x को मानले अर्को एउटा मात्र y को मानसँग एकएक क्रमजोडा बनाएको अवस्था हो । यसर्थ x का मानहरूलाई क्षेत्र र y का मानहरूलाई विस्तार (Range) भनिन्छ । हरेक x लागि मात्र y को मान हुने हुँदा फलनलाई रेखाचित्र द्वारा व्यक्त गर्दा रेखाचित्र खिचिएको समतलमा खिचिने ठाडो रेखाहरूले फलनको रेखाचित्रलाई एक ठाउँमा मात्र काट्छन् । यही प्रयोगबाट दुई चलहरू बीचको सम्बन्ध फलन हो/होइन निधो पनि गरिन्छ । तल दिइएका फलनहरूलाई ग्राफकापीमा खिच्नुहोस् र यिनका क्षेत्र र विस्तार समूह परिभाषित गर्नुहोस् :

१. फलन $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, (चित्र १)

२. फलन $f(x)=2x+3$, (चित्र २)





उदाहरण १ र २ का फलनहरूको गुणहरूलाई कसरी व्याख्या गर्ने ? के उदाहरण १ को फलन घटोत्तर फलन (Decreasing function) र उदाहरण २ को फलन बढोत्तर फलन (Increasing function) हो ? यी दुई प्रश्नहरूलाई विद्यार्थीहरूमा कसरी बुझाउने ?

चित्रमा फलन क्षेत्रको सानो मानका लागि विस्तारको मान सानैदेखि शुरु हुन्छ वा यसको उल्टो छ ?

चित्रमा देखिने माथिल्लो प्रवृतिले घटोत्तर फलनको उदाहरण दिन्छ, भने दोस्रो प्रवृतिले बढोत्तर फलन ।

गणितीय रूपमा फलन f को

मानौ S क्षेत्रको उपसमूह छ र x_1 र x_2 उपसमूह S का सदस्यहरू हुन् भने

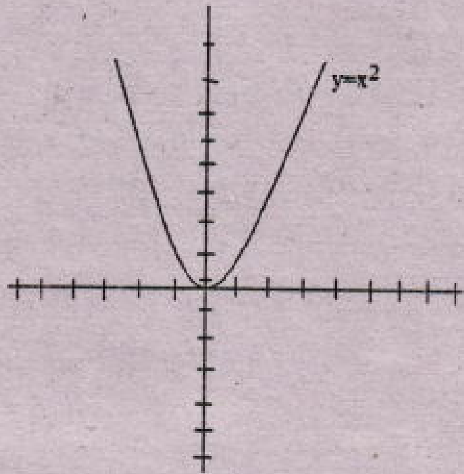
- फलन f, क्षेत्र S को लागि बढोत्तर हुन्छ, यदि $f(x_1)<f(x_2)$.
- फलन f, क्षेत्र S को लागि घटोत्तर हुन्छ, यदि $f(x_1)>f(x_2)$.
- फलन f, क्षेत्र S को लागि स्थीर हुन्छ, यदि $f(x_1)=f(x_2)$.

फलनका माथि छलफल गरिएका अवधारणाहरू र सम्बन्धहरूलाई त्रिकोणमितीयफलनको अध्ययन र अध्यापनमा प्रयोगमा ल्याउनुपर्छ ।

साथै रेखाचित्रबाट फलनको सममिति र रेखांचित्रलाई स्थानान्तरण गर्ने अवधारणा पनि महत्वपूर्ण मानिन्छ । यी अवधारणालाई पनि त्रिकोणमितीय फलनको सिकाइ तथा शिक्षणमा प्रयोग गर्नुपर्छ ।

२.३ चित्रको सममिति र स्थानान्तर:

फलन $y=x^2$ को रेखाचित्र खिच्नुहोस् र यो रेखाचित्रमा कतिओटा सममिति रेखाहरू हुन्छन् ? छुटयाउनुहोस् ।



यो फलन बढोत्तर वा घटोत्तर कुन होला र किन ?

यो रेखाचित्र y-अक्षमा सममिति छ अर्थात् रेखाचित्र बनेको कागज (समतल)लाई y-अक्षमा पट्याएमा दुई भाग बराबर भएर खप्टिन्छ ।

यो फलनको क्षेत्र (Domain) मा पर्ने x का हरेक मानहरू x र -x (अर्थात् 2 र -2, 5 र -5 आदि) प्रतिस्थापन गर्दा आउने विस्तार क्षेत्र (Range) को मान एउटै आउँछ । यस्तो अवस्था हुने फलनलाई जोरफलन (Even function) भनिन्छ । जोरफलनबाट आउने सबै रेखाचित्रहरू सममिति हुन्छन् ? कारण विचार गर्नुहोस् ।

यदि कुनै फलनमा क्षेत्रको -x मानका लागि विस्तार क्षेत्रको मान ऋणात्मक वा -f(x) हुन्छ भने यस किसिमको फलन बिजोर फलन हो । बिजोर फलन (Odd function) को रेखाचित्र सममिति हुँदैन । कारण विचार गर्नुहोस् ।

फलन $y=x^2$ को रेखाचित्रलाई y-अक्षको (0,4) बिन्दुमा काटिएर सममिति बनाउने गरी जाने कसरी बनाउन सकिन्छ ?

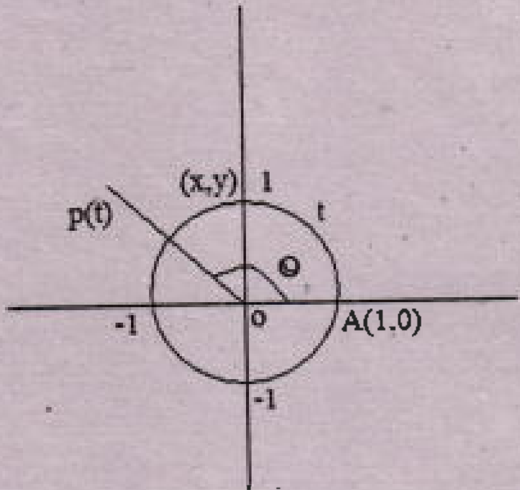
तलका फलनहरूको रेखाचित्र बनाउनुहोस् र रेखाचित्र स्थानान्तरणको नियम निकाल्नुहोस् ।

- $y=x^2-4$
- $y=x^2+4$
- $y=(x-4)^2$
- $y=(x+4)^2$

- फलन y=f(x) लाई C एकाइमाथि र तल लैजान, दिएको फलन y=f(x) लाई y=f(x)+c, र y=f(x)-c बनाउनु पर्छ ।
- फलन y=f(x) लाई C एकाइ दायाँ वा बायाँ लैजान, दिएको फलन y=f(x) लाई y=f(x-c) र y=f(x+c) बनाउनु पर्छ ।

२.४ त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric function):

त्रिकोणमितीय फलनलाई परिभाषित गराउने दुईओटा तरिका प्रचलनमा छन् । एकाइ वृत्तमा आधारित फलन र समकोण त्रिभुजमा आधारित फलन । अहिलेको इञ्जिनियरिङ्ग विज्ञानमा पनि समकोण त्रिभुजमा आधारित फलन धेरै नै प्रचलनमा छ । तर अन्य कतिपय नयाँ प्रयोगमा कोणमा आधारित फलन प्रयोग हुँदैन । यहाँ सर्वप्रथम एकाइ वृत्तको आधारमा त्रिकोणमितीय फलनलाई परिभाषित गरिन्छ ।



चित्रमा अर्धव्यास एकाइ नाप भएको वृत्तलाई आयताकार निर्देशाङ्क पद्धतिमा राखिएको छ । जसअनुसार $\overline{OA}$ अर्धव्यास हो र यहाँ A को निर्देशाङ्क (1,0) छ । वृत्तलाई $x^2+y^2=1$ समीकरणले जनाउन सकिन्छ । दिइएको t वास्तविक सङ्ख्या (Real number) का लागि t चक्रीयनापले (रेडियन नाप) स्तरीय अवस्थामा बनाउने θ कोणको एकएक क्रमजोडा बन्छ । चित्रमा $0<\theta<2\pi$ को लागि जनाउने एउटा सम्भाव्य उदाहरण देखाइएको छ । यहाँ θ कोण बनाउने घुम्ने रेखाको स्थितिले अर्थात् घुम्ने रेखाले एकाइ वृत्तको एउटा बिन्दुमा काटेको छ र यो अवस्थालाई p(t) ले जनाइन्छ ।

चित्रमा t जुन वास्तविक सङ्ख्या हो । यसको एकाइ वृत्तको खण्डको नापलाई जनाएको छ र p(t) ले घुम्ने रेखाको र एकाइ वृत्तको अन्तरक्षेदन बिन्दुलाई जनाउँछ ।

p(t) को निर्देशाङ्क (x,y) लाई त्रिकोणमितीय फलनहरू परिभाषित गर्न प्रयोग गरिन्छ ।

यदि t एउटा वास्तविक सङ्ख्या हो र p(x,y), t ले सम्बन्ध राख्ने (Correspond) एकाइ वृत्तको एउटा बिन्दु हो भने

- $\sin t=y$
- $\cos t=x$
- $\tan t=\frac{y}{x}(y\neq 0)$

- $\operatorname{cosec} t = \frac{1}{y} (y \neq 0)$
- $\sec t = \frac{1}{x} (x \neq 0)$
- $\cot t = \frac{x}{y} (y \neq 0)$

यी माथिका शुत्रहरूले दिने मानहरू एकाइ वृत्तका क्रमजोडाहरूसँग सम्बन्धित हुने हुँदा यी फलनहरूलाई वृत्तीय फलन (Circular function) पनि भनिन्छ ।

त्रिकोणमितीय फलनहरू

sint=y र cost=x का क्षेत्र (Domain) र विस्तार क्षेत्र (Range) कुन होलान् ?

यहाँ t पनि वास्तविक सङ्ख्या (R) र x,y दुवै पनि वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् । त्यसैले $t \in R, x, y \in R$ भएकोले फलन sint र cost का क्षेत्र र विस्तार क्षेत्र दुवै वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् ।

तर tan र sec फलनका लागि सबै वास्तविक सङ्ख्याहरू क्षेत्र हुन सक्दैनन् । परिभाषाअनुसार $\tan t = \frac{y}{x}, \sec t = \frac{1}{x}$ मा सङ्ख्या x हरमा रहेको हुँदा, x को मान O हुनसक्दैन किन ? त्यसैले t को मान जसले एकाइ वृत्तका बिन्दुहरू (0,1) र (0,-1) दिन्छ, तिनलाई tan र sec फलनको क्षेत्रमा लिन सकिदैन । अर्थात् tan र sec फलनहरूका क्षेत्रले $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, जहाँ n पूर्ण सङ्ख्या हो । बाहेकका सबै वास्तविक संङ्ख्याहरूलाई लिन्छ ।

यसै गरी, cot र cosec फलनका क्षेत्रलाई परिभाषित गर्नुहोस् । (n π बाहेकका सबै वास्तविक सङ्ख्याहरू cot र cosec फलनको क्षेत्रं हुन्छन् कसरी ?)

यी छलफलमा p(x,y) एकाइ वृत्तको बिन्दु हो । तसर्थ $|x| \leq 1$, $|\cos t| \leq 1$; $|\operatorname{cosec} t| \geq 1$, र $|\sec t| \geq 1$ हुन्छ । कसरी ? अब यी त्रिकोणमिंतीय फलनहरूको विस्तार क्षेत्र कतिकति हुन्छन् तिनको पहिचान गर्नुपर्छ ।

sin र cos फलनको विस्तार क्षेत्र [-1,1] र cos र sec को विस्तार क्षेत्र -1 र साना सबै वास्तविक सङ्ख्याहरू 1 र सो भन्दा ठूलो सबै वास्तविक सङ्ख्याहरू पर्छन् ।

उदाहरण : १

दिइएको मानका आधारमा त्रिकोणमितीय फलनहरूको नाप निकाल्नुहोस् :

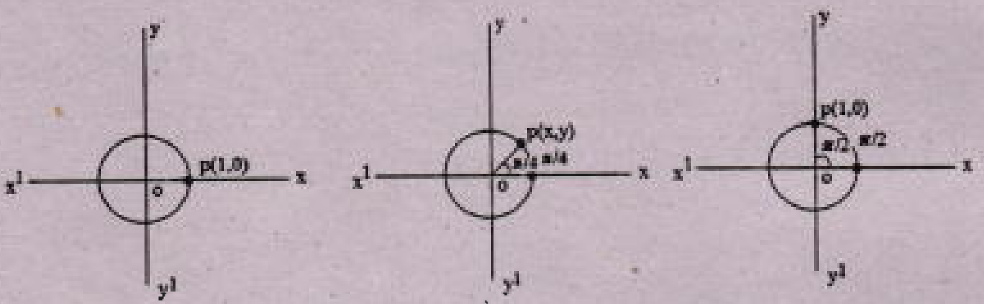
क) $t=0$

ख) $t=\frac{\pi}{4}$

ग) $t=\frac{\pi}{2}$

समाधान :

दिइएका t का मानहरूले क्रमजोडा कायम गर्ने एकाइ वृत्तका बिन्दुहरूलाई तलका चित्रहरूमा देखाइएको छ ।



क) यदि t=0 छ, भने p बिन्दुको निर्देशाङ्क (1,0) हुन्छ । अर्थात् x=1 र y=0.

अब, त्रिकोणमितीय फलनहरूमा x र y का यी मानहरू राख्दा,

sint=y

cost=x

tant=y/x

or, sin0=0 or, cos0=1, tan0=0/1=0

sin0=0, cos0=1, tan0=0

$cosect=\frac{1}{y}=\frac{1}{0}$ (अनिश्चित)

sect=1/x, sec0=1/1=1, sec0=1

$cott=\frac{x}{y}=\frac{1}{0}$ (अनिश्चित)

ख) यदि $t=\frac{\pi}{4}$ छ भने यसले जनाउने कोण रेडियन नापमा $\frac{\pi}{4}(45^o)$ हो । रेडियन नाप $\frac{\pi}{4}$ को कोण बनाउँदा पहिलो चतुर्थांशलाई ठीक दुईभाग लगाउँछ । तसर्थ, p को निर्देशाङ्क दुवै बराबर हुन्छ अर्थात् p को निर्देशाङ्क (x,x) हुन्छ । यो बिन्दु p एकाइ वृत्तको एउटा बिन्दु पनि हो । तसर्थ,

$x^2+y^2=1$

$x^2+x^2=1$

$2x^2=1$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

तसर्थ, p को निर्देशाङ्कअनुसार,

$\sin t=y,$ $\cos t=x,$ $\tan t=\frac{y}{x}$

or, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ or, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ or, $\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}$

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1/\sqrt{2}}$ or, $\sec t=\sqrt{2}$ or, $\cos\frac{\pi}{4}=1$

$\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

ग) यदि $t=\frac{\pi}{2}$ छ भने, यसले जनाउने कोणको रेडियन नाप $\frac{\pi}{2}$ (90^o) हुन्छ । यस अवस्थामा p(t) ले दिने बिन्दुको निर्देशाङ्क (0,1) हुन्छ । यसर्थ p को निर्देशाङ्क x=0, र y=1 हुन्छ ।

अब,

परिभाषाअनुसार

$\sin t=y$	$\cos t=x$	$\tan t=y/x$
$\sin\pi/2=1$	$\cos\pi/2=0$	$\tan\pi/2=1/0=\infty$
$\sin\pi/2=1$	$\cos\pi/2=0$	$\tan\pi/2=\infty$

तसर्थ,

$\text{cosec}\,\pi/2=1$	$\sec\pi/2=1/0=\infty$	$\cos\pi/2=0$

२.५ आधारभूत सर्वसमिका:

i. cosect=1/sint
ii. sect=1/cost
iii. cott=1/tant
iv. tant=sint/cost
v. cott=cost/sint
vi. $\sin^2 t+\cos^2 t=1$
vii. $1+\tan^2 t=\sec^2 t$
viii. $1+\cot^2 t=\text{cosec}^2 t$

यी माथिका सबै समीकरणहरूलाई त्रिकोणमितीय फलनहरूको परिभाषाका आधारमा प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उदाहरण :

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$

यदि p(x,y) एकाइ वृत्तको एउटा बिन्दु हो भने,

$x^2+y^2=1$ हुन्छ ।

त्रिकोणमितीय फलनको परिभाषाअनुसार,

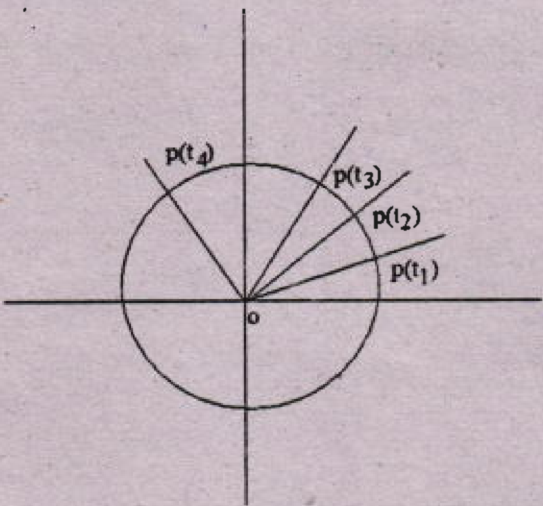
sint=y and cost=x

यी मानलाई $x^2+y^2=1$ मा प्रतिस्थापन गर्दा,

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$

प्रमाणित भयो ।

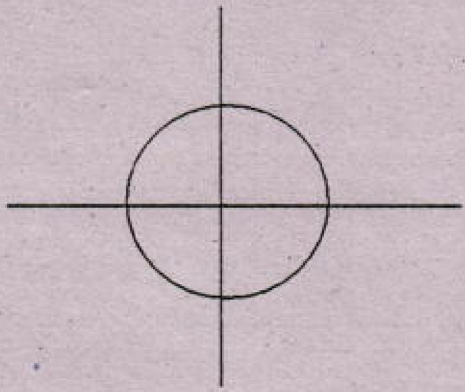
२.५ त्रिकोणमितीय फलनहरूको विचरण (The variations of trigonometric function):



चित्रमा एकाइ वृत्त देखाइएको छ र विभिन्न वास्तविक सङ्ख्याहरू t_1, t_2, t_3, t_4 का लागि $p(t_1)$, $p(t_2)$, $p(t_3)$, (t_4) बिन्दुहरूले क्रमजोडा पूरा गर्छन् । यी p(t) मा विभिन्न बिन्दुहरू (x,y) पर्छन् । t का मानहरू परिवर्तन हुँदै जाँदा त्रिकोणमितीयफलनहरूका मानमा कसरी परिवर्तन हुँदै जान्छन् भन्ने कुरा नै त्रिकोणमितीयफलनमा देखिने विचरणको पद्धति हो । उदाहरणका लागि t को मान 0 देखि $\pi/4$ सम्म बढ्दै जाँदा sint=y, cost=x को मान कसरी बढछ ? भन्ने कुरा नै त्रिकोणमितीयफलनको विचरण पद्धति हो । अब यस कुरालाई तालिका बनाई हेरौं ।

यहाँ,

sint=y को अध्ययन गर्दा t ले 0 देखि $\pi/4$ सम्मका मान लिँदा y ले कुनकुन मानहरू लिन सक्छ ? त्यसको विश्लेषण गर्नुपर्छ ।



t y

0 0

$\frac{\pi}{4}$ $1/\sqrt{2}$

$\frac{t}{0 \rightarrow \frac{\pi}{4}}$ $\frac{p(x, y)}{(10) \rightarrow (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}$ $\frac{\sin t = y}{0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}}$

यसरी नै तालिका पूरा गर्नुहोस् :

t	p(x,y)	sint=y	cost=x
$0 \rightarrow \pi/2$	$(1,0) \rightarrow (0,1)$	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$
$\pi/2 -> \pi$	$(0,1) \rightarrow (-1,0)$	....	....
$\pi \rightarrow 3\pi/2$	....	....	....
$3\pi/2 \rightarrow 2\pi$	....	....	....

नोट : (→) चिन्हले कुनै एउटा मानबाट अर्को मानतिर बढ्दै जाने सङ्केत गर्छ ।

तलको तालिकामा sint र cost का मानहरूको विचरण, $0 \le t \le 2\pi$ को लागि दिइएको छ :

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
sint	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
cost	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

यो तालिकाको आधारमा t को मान 2π बाट 4π हुँदै जाँदा, p(x,y) ले पुनः एकाइ वृत्तलाई विभिन्न बिन्दुहरू दोहोऱ्याएर ट्रेस गर्दै जान्छ होला ?.

अवश्य, केही मानहरू लिएर परीक्षण गर्नुहोस् । जब t को मान 2π देखि 4π तिर बढ्दै जान्छ, तब p(x,y) ले पुनः एकाइ वृत्तका उही बिन्दुहरूलाई सङ्केत गर्दैजान्छ र sint र cost का मानहरूमा उस्तै स्वरूप दोहोरिदै जान्छ अर्थात् 0 देखि 2π सम्म जुनजुन मानहरू sint र

cost ले लिन्थे, तिनै मानहरू फेरि दोहोरिएर आउँदै गर्छन् । यो स्वरूप 4π र 6π तिर t को मान बढ्दै जाँदा पनि कायम हुन्छ ।

तसर्थ,

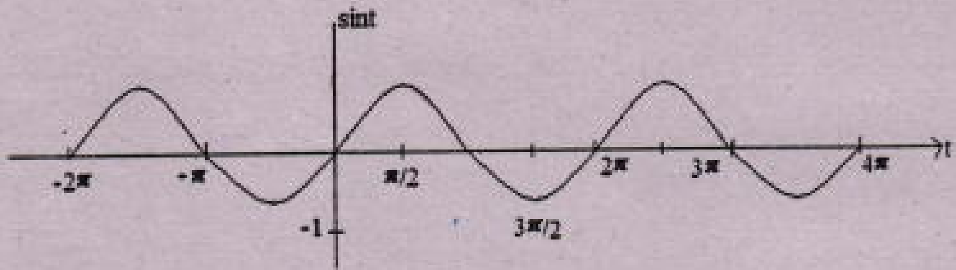
$\sin t(t+2\pi n)=\sin t$

$\cos(t+2\pi n)=\cos t$ हुन्छ ।

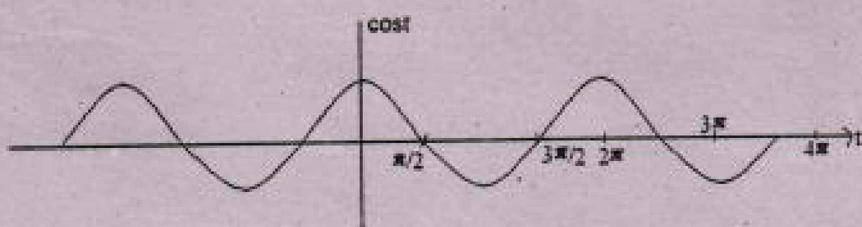
sin र cos फलनको मानमा देखिने दोहोरिने प्रवृत्तिलाई आवधिकता (Periodicity) भनिन्छ र यी फलनलाई आवधिक फलन (Periodic function) भनिन्छ । sin र cos फलनका लागि period 2π हो । यसको अर्थ $[0, 2\pi]$ को फलन क्षेत्रमा sine र cosine को मान जे आउँछ, $[2\pi, 4\pi]$ को क्षेत्रमा पनि सोही मानहरू आउँछन् ।

sine र cosine फलनका रेखाचित्रहरू हेर्नुहोस् :

sin फलन :



cos फलन :



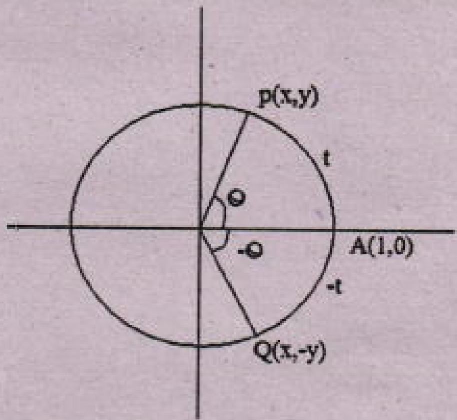
माथिको रेखाचित्रहरूमा विभिन्न बिन्दुहरूलाई समतलमा राखिएको छ । यी बिन्दुहरू t, sint वा (t, cost) को क्रमजोडाले निर्धारण गरेकोछ । 2π यी फलनका Period भएकाले 2π एकाइको अन्तरालमा रेखाचित्रको स्वरूप दोहोरिएको छ ।

अब,

- Secant र Cosecant फलनका लागि पनि रेखाचित्रहरू बनाउनुहोस् र Period को मान कति हो पत्ता लगाउनुहोस् ।
- Tangent र Cotangent फलनको पनि रेखाचित्र खिच्नुहोस् र Period परिभाषित गर्नुहोस् ।
- चित्रमा देखाइएको Sine र Cosine फलनहरूको "बढोत्तर" र "घटोत्तर" स्वरूपका बारेमा छलफल गर्नुहोस् र निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

- यस्तै अन्य त्रिकोणमितीय फलनहरूको "बढोत्तर" र "घटोत्तर" गुण बारेमा तपाईंलें खिचेका चित्रहरूको आधारमा सामुहिक छलफल गर्दै निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।
- एकाइ वृत्तलाई प्रयोगमा ल्याउँदै तलका सम्बन्धलाई प्रमाणित गर्नुहोस् ।
    - sint(-t)=-sint (Note: sin(-t)=-y=-sint, how?)
    - cos(-t)=cost
    - tan(-t)=-tant

२.६ ऋणात्मक t का लागि सूत्र (Formula for Negatives)



sin(-t)=-sint

cos(-t)=cost

tan(-t)=-tant

प्रमाण :

चित्रमा एउटा एकाइ वृत्त लिइएको छ । t नापको वृत्तखण्डले घडी घुम्ने दिशामा बिन्दु A देखि वृत्तको P बिन्दुसम्म ढाकेको छ । त्यस्तै यही नापको t तर घडी घुम्ने दिशाको विपरीततिर बिन्दु Q सम्म ढाकेको छ । अब P को निर्देशाङ्क (x,y) र Q को निर्देशाङ्क (x,-y) हुने भयो । त्रिकोणमितीय फलनको परिभाषाअनुसार

Sint=y....................(i)

or, Sin(-t_=-y=-sint.......................(ii)

त्यस्तै, cost=x.................(i)

cos(-t)=x=cost

Likewise,

tan(-t)=-y/x=-(y/x)=-tant

क्रियाकलाप १

a देखि c का सम्बन्धहरू t को मान जुनसुकै हुँदा पनि सत्य हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

a. cosec(-t)=-cosect

b. sec(-t)=sect

c. cot(-t)=-cott

क्रियाकलाप २

Tangent फलन बिजोर (Odd) फलन हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् । यो भनाइले यस फलनको रेखाचित्र बारे के बताउँछ ?

२.७ कोणका आधारमा त्रिकोणमितीय फलन

त्रिकोणमितीय फलनको क्षेत्र (Domain) वास्तविक सङ्ख्या (Real number) नलिइकन यसको सट्टामा कोणहरूको समूह लिई फलनको परिभाषा गरिने पद्धति प्रयोगको दृष्टिकोणले महत्वपूर्ण मानिन्छ । त्रिकोणमितिको अर्को रूप कोणमा आधारित छ । यसरी लिने कोण सामान्यत रेडियन नापमा लिने गरिन्छ ।

कोणहरूको त्रिकोणमितीय फलनको परिभाषा : यदि θ कोण t रेडियन नाप भएको कोण हो भने हरेक θ को त्रिकोणमितीय फलन t वास्तविक सङ्ख्याको मान हो ।

तसर्थ, यदि t वास्तविक सङ्ख्या θ कोणको रेडियन नाप हो भने, $\sin\theta$=sint, $\cos\theta$=cost, $\tan\theta$=tant आदि सत्य हो ।

θ काणका लागि त्रिकोणमितीयफलनहरूको मानहरू घुम्ने रेखाको अन्तिम स्थितिमा सो रेखामा रहेको कुनै एक बिन्दुको सहायताले निर्धारित गरिन्छ । जस्तै θ कोण बनाउने रेखाको बिन्दु Q(a,b) उदगम् बिन्दुबाहेकको बिन्दु हो र r उदगम् बिन्दुदेखि Q बिन्दुसम्मको दूरी छ भने

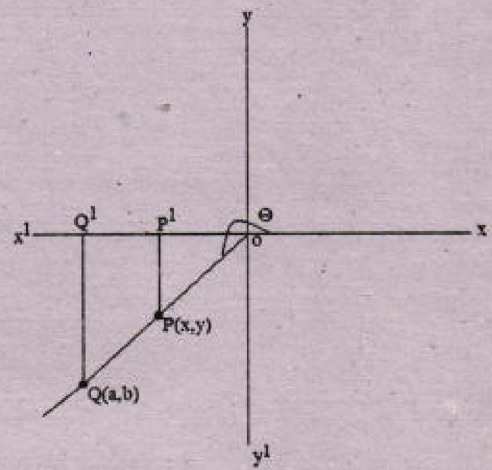
$r=\sqrt{a^2+b^2}$ हुन्छ ।

यो अवस्थामा Q(a,b) एकाइ वृत्तको बिन्दु हुन जरुरी छैन । यस अवस्थामा r को मान 1 भन्दा फरक हुनसक्छ ।

यदि θ कोण बनाउने घुम्ने रेखामा कुनै बिन्दु P(x,y) भने P बिन्दु एकाइ वृत्तमा पर्ने d(o,p)=1 हुनुपर्छ । तसर्थ,

Sinθ=sint=y

cosθ=cost=x



त्यसरी नै बिन्दु P र Q बाट x-अक्षमा लम्बहरू PP^1 र QQ^1 खिच्यौं भने बन्ने Δ^s। ΔOPP^1 र ΔOQQ^1 समरूप हुन्छन् ।

तसर्थ,

$$\frac{d(P^1,P)}{d(O,P)}=\frac{d(Q^1,Q)}{d(O,Q)}$$ हुन्छ ।

अथवा,

$$\frac{|Y|}{1}=\frac{|b|}{r}$$

यहाँ b र y को सङ्ख्यात्मक मान सधै एकै खाले (धनात्मक वा ऋणात्मक) हुने हुँदा,

y=b/r, अथवा $\sin\theta$=y=b/r लेख्न सकिन्छ ।

यसरी नै,

$\cos\theta$=a/r,

$\tan\theta=\sin\theta/\cos\theta$=(b/r)/(a/r)=b/a हुन्छ ।

बाँकी तीनओटा त्रिकोणमितीय फलनहरू त यी फलनहरूका विपरीत (Reciprocal) हुन् । यी तीनओटा परिभाषित भएपछि बाँकी तीनओटा परिभाषित भइहाल्छन् ।

२.८ अनुपातको रूपमा त्रिकोणमितीय फलनहरू

माथिको छलफलबाट अनुपातको रूपमा त्रिकोणमितीय फलनहरूलाई परिभाषित गर्न सकिन्छ । मानौ कुनै कोण θ आयताकार निर्देशाङ्क प्रणालीको स्तरीय स्थितिमा बनेको कोण छ । बिन्दु Q(a,b), θ कोण बनाउने रेखामा पर्ने उदगम् बिन्दुभन्दा बाहेकको बिन्दु हो । यदि d(O,Q)=r=$\sqrt{a^2+b^2}$ छ ।

भने,

$\sin\theta$=b/r　　　　cose θ=r/b (b $\neq$ 0)

$\cos\theta = a/r$ $\sec\theta = r/a\ (a \neq 0)$

$\tan\theta = b/a\ (a \neq 0)$ $\cot\theta = a/b\ (b \neq 0)$

१. यी माथिका फलनहरू एकाइ वृत्तका आधारमा परिभाषित गरिएअनुसारको त्रिकोणमितीय फलन हुन कुन शर्त पूरा हुनुपर्छ छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

२. बिन्दु Q(-15,8) को स्थितिले परिभाषित हुने गरी त्रिकोणमितीय अनुपातहरू लेख्नुहोस् । (माथिको सूत्र प्रयोगमा ल्याउनुहोस्) ।

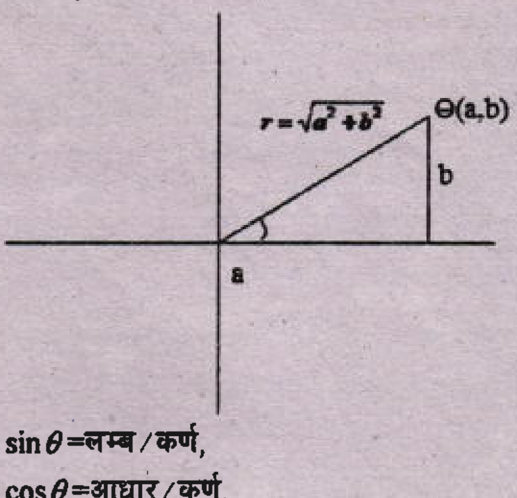
३. $\theta = 270^0$ कोणको आधारमा त्रिकोणमितीय फलनहरू पत्ता लगाउनुहोस् । (माथिको सूत्र प्रयोगमा ल्याउनुहोस्) ।

अनुपातका रूपमा θ कोणको त्रिकोणमितीय फलनहरूलाई परिभाषा गर्नेमा एउटा विशेष अवस्थाका लागि समकोण त्रिभुजलाई प्रयोगमा ल्याउन सकिन्छ ? त्यो कुन अवस्था होला ?

न्यूनकोणहरूका त्रिकोणमितीय फलनहरूको मानलाई समकोण त्रिभुजका भुजाहरूका नापको अनुपातमा लेख्न सकिन्छ । माथिको छलफलमा परिभाषा गरिएका

$\sin\theta = b/r$, $\cos\theta = a/r$ लाई समकोण त्रिभुजको भुजाहरू प्रयोग गरी कसरी लेख्न सकिन्छ ? छलफल गरौ ।

चित्रमा प्रष्ट देख्न सकिन्छ । $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ हुँदा, b लम्ब र a आधार र r कर्णमा परेका छन् । त्यसैले,



$\sin\theta$ = लम्ब / कर्ण,

$\cos\theta$ = आधार / कर्ण,

$\tan\theta$ = लम्ब / आधार हुन्छन् ।

अरु तीनओटा अनुपात यिनीहरू कै विपरीत हुन् । तिनलाई कसरी लेखिएला ?

३. **परियोजन कार्य :**

माध्यमिक तहको त्रिकोणमिति शिक्षणको लागि सिकाइ मोडुलहरु तयार पार्नुहोस् ।

एकाइ सात

समूह

Competency :	Understand set theory as basic language of mathematics.

१. परिचय :

समूहको प्रयोग मानव जीवनको शुरुवातसँगै भएको मानिन्छ । मानव इतिहासको ढुङ्गे युग देखि नै मानिसहरू समूहमा बस्ने, शिकार गर्ने र बाँडचुड गरी खाने, जनावर आदिको आक्रमणबाट बच्न समूहमा हिड्ने गर्दथे । त्यही समयदेखि नै यो शब्दको प्रयोग केही न केही रूपमा हुँदै आएको छ । गणितमा औपचारिक रूपमा यसको प्रयोग उन्नाइसौं शताब्दीको मध्यतिरबाट मात्र हुन थालेको हो । गणितमा समूहको धारणा समावेश भएपछिको गणितलाई आधुनिक गणित (Modern mathematics) र यस अगाडिको गणितलाई परम्परागत गणित (Traditional mathematics) भनेर छुट्याउने गरिएको छ । आजभोलि समूहलाई गणितका सबै जसो विद्याको आधारभूत धारणा रूपमा लिने गरिएको छ । गणितमा समूहको प्रवेश सँगै गणितीय धारणाहरूको शिक्षणसिकाइमा सरलता आएको अनुभव गरिएको छ । त्यसैले अधिकांश गणितीय धारणाहरूलाई यही समूहको आधारमा व्याख्या गर्न थालिएको छ । यसको सहयोगबाट शिक्षण गर्दा विद्यार्थीहरूको दैनिक जीवनसँग सम्बन्धित कुराहरू प्रयोगबाट दिन सकिने हुनाले यसको महत्वलाई अझ बढाएको छ ।

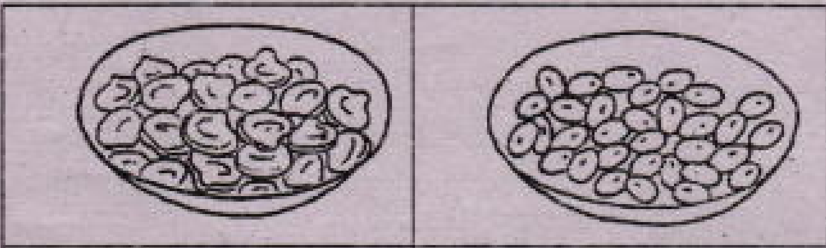
समूहको शाब्दिक अर्थ Group, Collection, Aggregate आदि हुन्छ । विद्यालयस्तरको गणितलाई आधुनिक गणितका धारणाहरूसँग समायोजन गरी उच्च शिक्षाका लागि आधार तयार पार्ने मान्यताअनुसार गणित विषयमा समूहलाई समावेश गरिएको हो । विद्यालयस्तरमा समूह शिक्षणको उद्देश्य यसको प्रारम्भिक ज्ञान दिई केही गणितीय समस्याको समाधानमा समूहको प्रयोग गर्न सहयोग गर्नु हो । त्यसैले यस एकाइमा समूहको अर्थ र सङ्केत, समूहको वर्णन (Specification of sets), समूहका प्रकार, समूहको गणनात्मक सङ्ख्या, समूहहरूको बीचको सम्बन्ध, भेन चित्र र समूहका क्रियाहरू र समूहको प्रयोग जस्ता कुराहरूका बारेमा चर्चा गरिएको छ ।

२. विषयवस्तु (Content):

२.१ समूहको अर्थ र सङ्केत (Meaning and notation of sets) :

प्रधानाध्यापक प्रदिपलाई शिक्षिका सहनशीलाको गणितको कक्षा अवलोकन गर्ने विचार आयो र गणितको कक्षामा समूह शिक्षण गर्दैगरेकी शिक्षिकाको कक्षा अवलोकन गर्नका लागि पसे ।

शिक्षिका सहनशीलाले "समूह" को अर्थ र सङ्केतको धारणा दिनका लागि एकपोका मकैको गेडा र एकपोका भट्मासका गेडा लिई दुईतिरका विद्यार्थीहरूलाई "यो के को पोका होला ?" अनुमान गर्न लगाइन् । अनुमान गर्न लगाइसकेपछि दुबै पोका खोलेर देखाउँदै यसलाई गणितीय भाषामा मकैको पोकामा रहेका मकैको थुप्रोलाई "मकैको समूह" र भट्मासको पोकामा रहेको भटमासको थुप्रोलाई "भट्मासको समूह" भनिन्छ, भनी बताइन् ।



मकै | भट्मास

फेरि उनले केही केटीहरूलाई एकातिर र केटाहरूलाई अर्कोतिर उभिन लगाइन् र विद्यार्थीहरूलाई गणितीय भाषामा यी दुईतिर उभिएकाहरूलाई छुट्टाछुट्टै भन्दा कसरी भन्न सकिएला ? भनी प्रश्न गरिन् ।

दुईतर्फ उभिएका विद्यार्थीहरूलाई केटाको समूह र केटीको समूह भन्न सकिन्छ । त्यस्तै उनले केटाको समूहमा कोको छन् ? केटीको समूहमा नि ? जस्ता प्रश्नहरूको सहयोगबाट कुनै पनि "समूहमा भएका" व्यक्तिलाई त्यस समूहको सदस्य र समूहमा "कति" जना सङ्ख्या छन् त्यसलाई समूहको सदस्य (Member) सङ्ख्या भनिन्छ र सँगसँगै अगाडिको मकै र भट्मासको पोकामा नपरेका मकै र भट्मास अनि अगाडि केटा र केटीको समूहमा नपरेका बाँकी विद्यार्थीहरूलाई ती समूहका सदस्य भनिदैन भनी सम्झाइन् । शिक्षिका सहनशीलाले समूहको शिक्षण गर्नका लागि आफ्नो वरिपरि भएका, घरमा भएका, कक्षाकोठामा भएका वस्तुहरूलाई प्रयोगमा ल्याउने गर्दछिन् ।

विद्यार्थीहरूलाई यस्ता अरु समूहका उदाहरणहरू बनाउन लगाइन, विद्यार्थीहरूले निम्नअनुसारका समूह बनाए :

- बाख्राहरूको समूह,
- पशुपँक्षीहरूको समूह,
- खेलौनाहरूको समूह,
- नराम्रा विद्यार्थीहरूको समूह,
- घरपालुवा जनावरहरूको समूह आदि ।

यही क्रममा पुष्पाले बनाएको समूह "नराम्रा विद्यार्थीहरूको समूह" लाई लिएर यस समूहमा कोको पर्छ ? भन्ने प्रश्न गरिन् । प्रश्नको स्पष्ट जवाफ आएन । को राम्रो र को नराम्रो स्पष्ट भएन । त्यसपछि उनले निम्नअनुसारको निष्कर्ष बताइन् :

समूह बनाउँदा कुनै पनि सदस्य समूहमा पर्छ वा पर्दैन भनेर स्पष्ट किटान गर्न सकिने हुनुपर्छ । सङ्कलित "वस्तुहरू" स्पष्ट रूपमा समूहको सदस्य हो वा होइन भनी किटान गर्न नसकिने भएमा त्यो समूह हुन सक्दैन । त्यसैले समूह भनेको राम्ररी परिभाषित वस्तुहरूको सङ्कलन हो, यस्तो सङ्कलनलाई राम्ररी परिभाषित समूह (Well-defined set) भनिन्छ ।

शिक्षिका सहनशीलाले समूहलाई जनाउन सधैं Capital letters A,B,C,.........,X,Y,Z को मात्र प्रयोग गर्छिन् र विद्यार्थीहरूलाई पनि यसै गर्न लगाउछिन् । समूहका सदस्यहरूलाई मझ्यौला कोष्ठ { } भित्र राखी अर्धबिराम (,) बाट छुट्याउन लगाइन् । जस्तै :

A={स्याउ, सुन्तला, आँप, केरा, अङ्गुर}

X={बस, ट्याक्सी, ट्रक, मोटरसाइकल}

Z={1,2,3,4,5}

समूहलाई यसरी जनाउने तरिकालाई नै समूहको सङ्केत (Notation of set) भनिन्छ, भनी निष्कर्ष सुनाइन् ।

२.२ समूहको वर्णन वा समूहलाई व्यक्तगर्ने तरिका (Specification of sets) :

शिक्षिका सहनशीलाले शिक्षण गर्ने तरिका मलाई मन पर्छ । उनले समूहलाई व्यक्तगर्ने तरिका सिकाउन तल दिइएअनुसार गरिन् :

क) विद्यार्थीहरूलाई विभिन्न रंगका कलमका बिर्कोहरू, डाइसहरू, विभिन्न अन्नका दानाहरू आदि मिसाई वितरण गरिन र निम्नअनुसार समूह बनाउन लगाइन् ।

- अन्नहरूको समूह,
- घनहरूको समूह,
- रातोवस्तुहरूको समूह,
- विरुवाका पातहरूको समूह ।

ख) विद्यार्थीहरूले बनाएका समूहहरूलाई अवलोकन गर्दा विद्यार्थीहरूले समूहलाई व्यक्तगर्ने तरिका फरकफरक पाइयो । त्यसपछि समूहलाई एकभन्दा बढी तरिकाद्वारा व्यक्त गर्न सकिन्छ भन्दै तलको तालिका बनाई प्रस्तुत गरिन् ।

वर्णनात्मक विधि (Descriptive method)	सूचीकरण विधि (Listing method)	समूह निर्माण विधि (Set builder method)
हप्ताका सात बारहरूको	{आइतबार, सोमबार,	{x:x एउटा बार हो ।}

समूह	मङ्गलबार, बुधबार, बिहिबार, शुक्रबार, शनिबार}	
कक्षा आठमा टोपी लगाउने विद्यार्थीहरूको समूह	{प्रदिप, सुरज, शिव, हरि}	{x:x एउटा टोपी लगाउने विद्यार्थी हो ।}
१० भन्दा ठूला र २० भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरूको समूह	{12, 14, 16, 18}	{x:x, 10 भन्दा ठूलो र 20 भन्दा सानो जोर सङ्ख्या हो ।}

समूहलाई व्यक्त गर्ने तरिका उदाहरणहरूसहित तालिका प्रस्तुत गरिसकेपछि उनले तलको निष्कर्ष बताइन् ।

- समूहमा पर्ने वस्तुहरूको गुणलाई विचार गरी शब्द वा वाक्यद्वारा अभिव्यक्त गरिने विधिलाई वर्णनात्मक तरिका (Descriptive method) भनिन्छ ।
- समूहमा सबै सदस्यहरूलाई मझौला कोष्ठ { } भित्र अर्धविराम { , } ले छुट्याएर सूची बनाई राख्ने तरिकालाई सूचीकरण विधि (Listing method) भनिन्छ ।
- समूहका कुनै एउटा सदस्यको साझा गुणको आधारमा चलको व्याख्या गरिने विधिलाई समूह निर्माण विधि (Set builder method) भनिन्छ । यहाँ यस्तो (:) चिन्हले "भनेको" अर्थात् 'Such that' भन्ने जनाउँछ ।

ग) निष्कर्ष सुनाइसकेपछि विद्यार्थीहरूलाई तल दिइएका समूहहरूलाई माथि उल्लेख गरिएका बाँकी दुईओटा तरिकाबाट लेख्न लगाइन् ।

P = एकदेखि दशसम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह ।

A = {a,e,i,o,u}

N = 20 सम्मका रुढ सङ्ख्याहरूको समूह ।

V = {आँप, केरा, स्याउ, अम्बा}

M = {x:x ज्यामिति बाकसभित्र रहेको एउटा सामान हो}

R = {I,V,X,L,C,D,M}

घ) सहनशीलाले समूहको सदस्यता जनाउने शिक्षण क्रियाकलाप यसरी बनाइन् ।

यहाँ समूह A का सदस्यहरू 1,2,3 र 4 हुन् । अङ्क 5 समूह A को सदस्य होइन । यसलाई गणितीय ढङ्गमा कसरी जनाउने होला ? भन्ने प्रश्न गरिन् र एकछिन विद्यार्थीहरूलाई सोच्ने अवसर दिइन । विद्यार्थीबाट भएका प्रयासहरूको कदर गर्दै र समेट्दै उनले समूहको सदस्यता जनाउने निश्चित सङ्केतको प्रयोग गर्ने प्रचलन रहेको जानकारी दिइन् । यसका लागि समूह A का सदस्यहरूको सहयोगमा यसरी देखाइन् :

A={1,2,3,4}

यो समूहमा 1 छ,

त्यसैले, $1 \in \{1,2,3,4\}$

त्यस्तै, यो समूहमा 3 पनि छ,

त्यसैले, $3 \in \{1,2,3,4\}$ अर्थात्, $3 \in A$

1,2,3,4 समूह A का सदस्यहरू हुन् ।

तर 5 समूह A को सदस्य होइन ।

त्यसैले, $5 \notin \{1,2,3,4\}$। अर्थात् $5 \notin A$

कुनै पनि समूहको सदस्य हो वा होइन भनेर व्यक्त गर्न $\in$ र $\notin$ चिन्हको प्रयोग गर्ने गरिन्छ ।

- चिन्ह $\in$ ले सदस्य हो अथवा समूहमा पर्छ, भन्ने जनाउँछ ।
- चिन्ह $\notin$ ले सदस्य होइन अथवा समूहमा पर्दैन भन्ने जनाउँछ ।

अन्तमा उनले तलका समूहहरूलाई सूचीकरण विधि (Listing method) मा परिणत गरी समूहमा पर्ने र नपर्ने सदस्यहरूलाई $\in$ र $\notin$ ले जनाउन निर्देशन दिइन ।

- आफ्नो कोठामा भएका सामानहरूको समूह
- दशभन्दा साना सङ्ख्याहरूको समूह
- दशभन्दा साना बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह
- हप्ताका सात बारहरूको समूह ।

२.३ समूहको गणनात्मकता (Cardinality a set) :

समूह A={ बिरालो, भेडा, गाई, भैंसी }

यो चारओटा घरपालुवा जनावरहरूको समूह हो । यसमा जम्मा चारओटा सदस्यहरू छन् । यदि V ले अङ्ग्रेजी वर्णमालामा स्वरहरूको समूह जनाउँछ भने

V={a,e,i,o,u}, यसमा समूह V का सदस्यहरूको सङ्ख्या 5 छ । त्यस्तै एकजना शिक्षकले आफ्नो दराजमा 17 ओटा शिक्षण सामग्रीहरू राखेका छन्, उनको दराजमा राखेका सामग्रीहरूको समूहलाई M मान्दा समूह M का सदस्यहरूको सङ्ख्या 17 हुन्छ ।

माथिका यस्ता उदाहरणहरूलाई सङ्केतको रूपमा जनाउँदा,

$n(A)=4$

$n(V)=5$ र

$n(M)=17$ हुन्छ ।

यहाँ n ले सदस्य सङ्ख्यालाई जनाउँछ ।

समूहमा भएका सदस्यहरूको सङ्ख्यालाई समूहको गणनात्मकता (Cardinality of set) भनिन्छ ।

समूह B={1,1,1,2,2,2,1} को गणनात्मकता कति होला ? यस्तो जवाफमा विद्यार्थीहरूले 7 भन्न सक्दछन् । समूहको गणनात्मकता समूहमा देखिने सदस्यहरूको सङ्ख्या होइन,

फरकफरक सदस्य सङ्ख्या मात्र हो । त्यसैले समूह B को गणनात्मकता 2 मात्र हुन्छ । यसलाई n(B)=2 लेखिन्छ ।

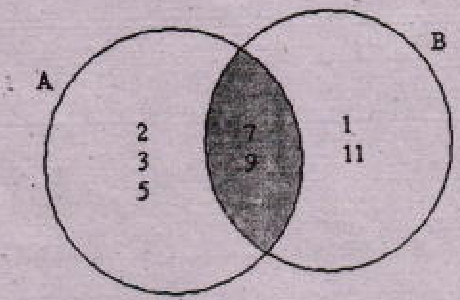
२.४ भेन चित्र (Venn diagram):

समूह वा समूहका विभिन्न सम्बन्धहरूलाई जनाउने चित्रात्मक प्रस्तुतिलाई भेनचित्र (Venn diagram) भनिन्छ । ब्रिटिस गणितज्ञ John venn ले सन् १८७६ मा सर्वप्रथम यसको प्रयोग गरेकाले उनैको नामबाट यस चित्रको नाम पनि भेनचित्र भनी राखिएको हो । समूहलाई चित्रात्मक प्रस्तुतिका लागि यस्ता चित्रहरूको प्रयोग गरिन्छ । सर्वव्यापक समूहका लागि आयताकार क्षेत्रको प्रयोग गरिन्छ भने अन्य समूहका लागि गोलाकार क्षेत्रको प्रयोग गरिन्छ । अर्थात समूहका प्रत्येक सदस्य (Element) हरूलाई वृत्ताकार क्षेत्रभित्र प्रस्तुत गरिन्छ । साथै सो वृत्ताकार क्षेत्र एक आपसमा बराबर हुनु पर्दछ । समूहमा यसको प्रयोगले त्यसलाई बुझ्न र सम्बन्ध पत्ता लगाउन सजिलो हुन्छ ।

A={2,3,5,7,9}

B={1,7,9,11}

समूह A र B लाई भेनचित्रमा निम्नअनुसार देखाइन्छः



२.५ समूहका प्रकार (Types of sets):

शिक्षिका सहनशीलाले "समूहको प्रकार" को शिक्षण गर्ने सिलसिलामा तल दिइएअनुसार गर्ने गर्दछिन् । उनको शिक्षण गर्ने तरिका मलाई ज्यादै मन पर्छ । उनले समूहलाई निम्नअनुसार वर्गीकरण गरी शिक्षण गर्ने गर्दछिन् ।

क) सीमित र असीमित समूह (Finite and Infinite sets):

तलका समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्न लगाइन् ।

i. 30 भन्दा साना रुढ सङ्ख्याहरूको समूह

ii. 5 भन्दा ठूला गन्ती सङ्ख्याहरूको समूह

iii. एउटा रेखाखण्डमा भएका बिन्दुहरूको समूह

iv. नेपालका अञ्चलहरूको समूह ।

यी सबै समूहहरूको सूची बनाउन सक्यौ ? भन्ने प्रश्न गरिन् यहाँ (i) र (iv) मा बनेका समूहहरूका सदस्य सङ्ख्या सीमित वा गन्ती गर्न सकिन्छ र (ii) र (iii) मा भएका समूहहरूको सदस्य सङ्ख्या गन्ती गर्न वा सबै सदस्यहरूको सूची बनाउन सकिँदैन । त्यसैले यस्ता समूहहरूलाई क्रमशः सीमित (Finite) र असीमित (Infinite) समूह भनिन्छ, भन्दै तलको निष्कर्ष सुनाइन् ।

कुनै पनि समूहमा रहेका सबै सदस्यहरूलाई गणना गर्न सकिन्छ भने त्यसलाई सीमित समूह र सबै सदस्यहरू अनगिन्ती छन् भने त्यस्तो समूहलाई असीमित समूह भनिन्छ ।

ख) खाली समूह (Empty set) :

यस समूहको शिक्षण गर्दा विद्यार्थीहरूलाई तलका समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्न लगाउन सकिन्छ ।

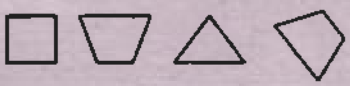
- पुच्छर भएको मानिसको समूह,
- ३ वर्षभन्दा कम उमेरका कक्षा आठमा पढने विद्यार्थीहरूको समूह,
- 5000 kg तौल भएका शिक्षकहरूको समूह,
- नेपालका हालसम्मका महिला प्रधानमन्त्रीको समूह,
- 12 feet अग्ला नेपालीहरूको समूह ।

माथि दिइएका समूहहरूको गणनात्मक (Cardinality) कतिकति छ वा सबै समूहमा कतिकति सदस्य छन् ? भनी प्रश्न गर्ने ।

यसरी शिक्षकबाट गरिएका प्रश्नहरूको जवाफमा विद्यार्थीहरूबाट सदस्य नै छैन वा सदस्य शुन्य छ वा समूहको गणनात्मकता शुन्य हुन्छ भन्ने जवाफ प्राप्त भएपछि यस्तो समूहलाई खाली समूह वा शुन्य समूह भनिन्छ भनी निष्कर्ष दिन सकिन्छ । खाली समूहलाई ϕ वा { } बाट जनाउने प्रचलन छ ।

ग) समतुल्य र बराबर समूह (Equivalent and equal sets):

शिक्षक प्रशान्तले विद्यार्थीहरूलाई समतुल्य र बराबर भिन्नको अर्थ बुझाउनका लागि तल दिइएको प्रक्रिया अपनाउने गर्दछन् । उनले तलका समूहहरू बारेमा विद्यार्थीहरूलाई अध्ययन गर्न लगाए ।

A = {  }

B={बिरालो, मुसा, चरा}
C={a,b,c,d}
D={c,b,d,a}

यी समूहहरूको बीचमा केके समानता र असमानताहरू छन् ? भन्ने प्रश्न गरे । विद्यार्थीहरूबाट आएका जवाफहरूलाई समेट्दै समूह A र समूह C मा सदस्य सङ्ख्या 4 समान छ तर समूहका सदस्यहरू फरकफरक छन् । त्यस्तै समूह C र समूह D सदस्य सङ्ख्या 4/4 छ भने सदस्यहरू पनि समान छन् । माथिको उदाहरणमा समूह A र C, A र D समतुल्य Equivalent) समूह र समूह C र D बराबर वा समान (Equal) समूहका उदाहरणहरू हुन् ।

यदि दुईओटा समूहहरू A र B मा भएका सदस्यहरूको सङ्ख्या बराबर छ भने n(A)=n(B) लेख्न सकिन्छ । यस्ता समूहहरू A र B लाई नै समरूप समूह भनिन्छ । यसलाई A~B लेख्न सकिन्छ ।

यदि दुईओटा समूहका सदस्यहरू उत्तिकै र उही छन् भने ती दुई समूहहरू बराबर हुन्छन् । माथिको उदाहरणमा C र D बराबर छन् । यसलाई C=D लेखिन्छ ।

घ) खप्टिएका र अलग्गिएका समूहहरू (Overlapping and disjoing sets):

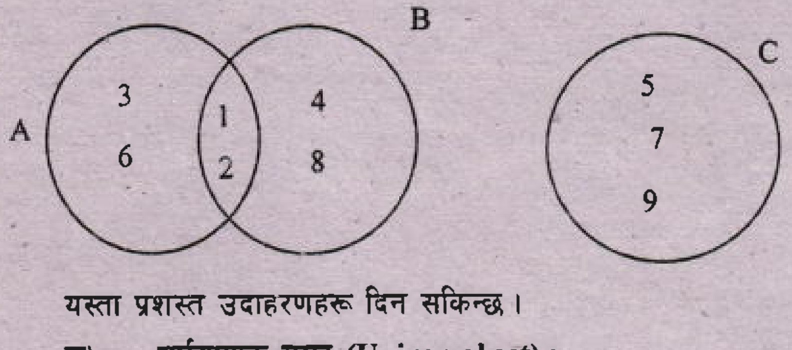
यी समूहहरूको शिक्षण गर्दा केही सदस्यहरू साझा भएमा समूहहरू तथा कुनै पनि सदस्य साझा नभएका समूहहरू निर्माण गरी उदाहरण स्वरूप देखाउन सकिन्छ । जस्तै :

6 लाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याको समूह, A={1,2,3,6}

8 लाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याको समूह, B={1,2,4,8}

3 भन्दा ठूलो र 10 भन्दा सानो बिजोर सङ्ख्याको समूह C={5,7,9}

यी समूहहरूमा A र B का साझा सदस्यहरू 1र 2 छन् भने A र C वा B र C का कुनै पनि सदस्यहरू साझा छैनन् । यहाँ A र B लाई खप्टिएका समूह (Overlapping sets) र A र C वा B र C लाई अलग्गिएका समूह (Disjoint sets) भनिन्छ । यी समूहलाई भेन चित्रमा देखाउदा,



यस्ता प्रशस्त उदाहरणहरू दिन सकिन्छ ।

ङ) सर्वव्यापक समूह (Universal set) :

पूर्णसङ्ख्याको समूह w={0,1,2,3,....................} लिऔ र विद्यार्थीहरूलाई निम्न समूहहरू बनाउन लगाऔ :

- जोर सङ्ख्याहरूको समूह E,
- गन्तीका सङ्ख्याहरूको समूह N,

- वर्ग सङ्ख्याहरूको समूह S,
- बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह O।

अब समूह W र अन्य समूहहरूको बीचमा कस्तो सम्बन्ध छ ? विचार गर्न लगाऔ ।

यस्तै अन्य प्रसस्त उदाहरणहरू दिइसकेपछि समूहको क्षेत्र (Scope) आधारमा सर्वव्यापक समूहलाई परिभाषित गर्ने गरिन्छ । कुनै एउटा खास उदाहरणका निमित्त आवश्यक भएका सम्पूर्ण सदस्यहरूको समूहलाई सर्वव्यापक समूह भन्ने गरिन्छ । हामी हप्तामा आउने दिनहरूको उदाहरण लिएका अवस्थामा A={आइतबार, मङ्गलबार} छ भने हप्तामा आउने सबै बारहरूको समूहलाई सर्वव्यापक समूह भन्छौ । त्यसैले सबै खाले समूहहरू र समूहका क्रियाहरू अटाउनसक्ने एउटै विशाल समूहलाइ सर्वव्यापक समूह (Universal set) भनिन्छ । नेपालका जिल्लाहरूको कुरा गर्दा ७५ ओटा जिल्लाहरूको समूह सर्वव्यापक समूह हुन्छ । अञ्चलको कुरा गर्दा १४ ओटा अञ्चल सर्वव्यापक समूह हुन्छ । सर्वव्यापक समूह भन्नाले ब्रहमाण्डका सबै वस्तुहरूको समूह नभई जुन सन्दर्भमा छलफल गर्न लागिएको हो सोही अर्थमा सर्वव्यापक समूहको क्षेत्र निर्धारण हुन्छ । त्यसैले छलफलका लागि तय भएका सदस्यहरू छान्न सकिने सदस्यहरू रहेको ठूलो समूह नै सर्वव्यापक समूह हो । निष्कर्षमा भन्दा,

कुनै एउटा निश्चित समूहमा छलफलभित्र आउन सक्ने सबै प्रकारका समूहहरू समावेश भएका छन् भने सो निश्चित समूहलाई सर्वव्यापक समूह (Universal set) भनिन्छ । यस्तो समूहलाई U ले जनाइन्छ । भेन चित्रमा देखाउँदा यसलाई आयतबाट देखाउने चलन छ ।

निम्नलिखित अवस्थामा आउने सर्वव्यापक समूहहरू कुनकुन होलान् ? विचार गरौ ।

- महिनाहरूको अध्ययन
- एक अङ्कले बनेका सङ्ख्याहरूको अध्ययन
- प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको अध्ययन
- कक्षा ९ मा पढने विद्यार्थीहरू
- पर्वत जिल्लाका महिला शिक्षिकाहरू

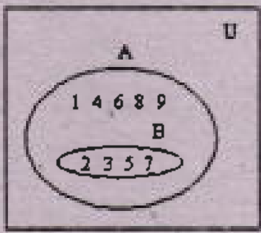
च) समूहभित्रको समूह वा उपसमूह (Subset):

शिक्षक प्रशान्तले उपसमूह सिकाउन यस्तो क्रियाकलाप गर्दै सिकाए ।

A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

B={2,3,5,7}

यसलाई भेन चित्रमा देखाए ।



यहाँ, समूह A र समूह B का बीचमा केकस्तो सम्बन्ध रहेको छ ? यसको जवाफ विद्यार्थीहरूबाट खोजे । दिइएको उदाहरणमा समूह B का सबै सदस्यहरू समूह A मा पर्दछन् । अर्थात् समूह B का सबै सदस्यहरू समूह A का पनि सदस्यहरू हुन्, त्यसकारण समूह B समूह A को उपसमूह हो ।

साधारणतया एउटा समूहका सदस्यहरूबाट अर्को समूह वा अरू समूहहरू बनेका छन् भने त्यस्ता समूहहरूलाई पहिलेको समूहको उपसमूह भनिन्छ । माथिको उदाहरणमा समूह B समूह A को उपसमूह हो । यसलाई सङ्केतमा लेख्दा $B \subset A$ वा $A \supset B$ लेखिन्छ र पढ्दा समूह B, समूह A को उपसमूह हो भनेर पढिन्छ । जुनसुकै समूहमा खाली समूह त्यसको उपसमूह हुन्छ ।

नोट :

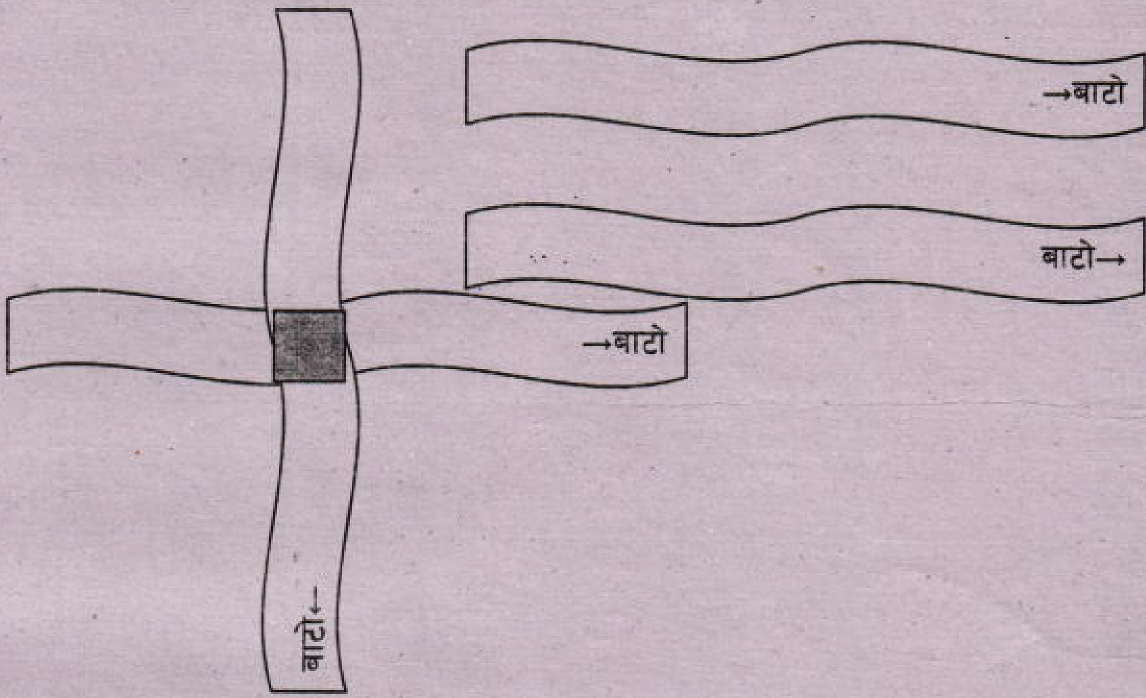
यदि समूह A समूह B को उपसमूह होइन भने समूह A को कम्तिमा एउटा सदस्य समूह B को सदस्य नभएको हुनुपर्दछ । अन्यथा समूह A समूह B को उपसमूह हुन्छ ।

२.६ समूह चित्र र समूहका क्रियाहरू (Venn diagram and Set operation)

समूहहरूका क्रियाअर्न्तगत विद्यालयमा शिक्षण गर्दा शैक्षिक सामग्रीको रूपमा आफ्नो वरिपरि पाइने जुनसुकै वस्तुहरूको सङ्कलन गरी प्रयोगमा ल्याउन सकिन्छ । यस्ता वस्तुहरूको सहयोगबाट कक्षाकोठामा समूहका क्रियाहरू जनाउने गरी सिकाइ क्रियाकलापहरू सञ्चालन गर्न सकिन्छ । समूहका क्रियाहरू निम्नअनुसार छन् :

क) **समूहहरूको प्रतिच्छेदन (Intersection of sets):**

शिक्षक प्रशान्तले समूहहरूको प्रतिच्छेदनको धारणा शिक्षण गर्दा तल दिइएको जस्तै चित्र बनाए र निम्नअनुसार गर्दै गए :



पहिलो चित्रमा दुईओटा बाटाहरू छायाँ परेको भागमा काटिएका छन् । दुबै बाटोको साझा भागलाई के भन्न सकिएला ? त्यस्तै दोस्रो चित्रमा दुईओटा बाटाहरू कुनै पनि ठाउँमा काटिएका छैनन् । यसलाई गणितीय भाषामा के भन्न सकिएला ?

उनले फेरि तलका दुई समूहहरू बोर्डमा लेखे :

स्याउ मन पराउने विद्यार्थीहरू A={राम, हरि, प्रदिप, पुष्पा}

सुन्तला मन पराउने विद्यार्थीहरू B={कृष्ण, पद्मा, प्रदिप, पुष्पा}

समूह A र समूह B दुबैमा भएका अर्थात स्याउ र सुन्तला दुबै मन पराउने विद्यार्थीहरू समूह C={प्रदिप, पुष्पा} बनाउन लगाए, र यस समूहलाई समूह A र B को प्रतिच्छेदन भनिन्छ भनी बताइदिए ।

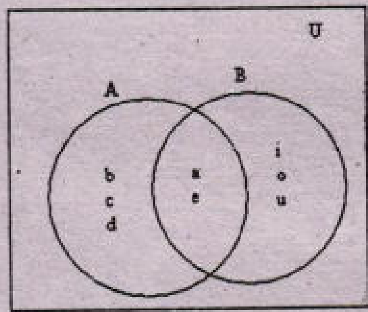
समूहहरू A र B को प्रतिच्छेदनमा A र B दुबै समूहहरूका साझा सदस्यहरूलाई मात्र लिइन्छ । यसलाई $A \cap B$ ले जनाइन्छ । यसलाई पढदा A प्रतिच्छेदन B $(A \cap B)$ भनिन्छ ।

यसलाई समूह चित्रमा देखाउँदा,

यदि, A={a,b,c,d,e}

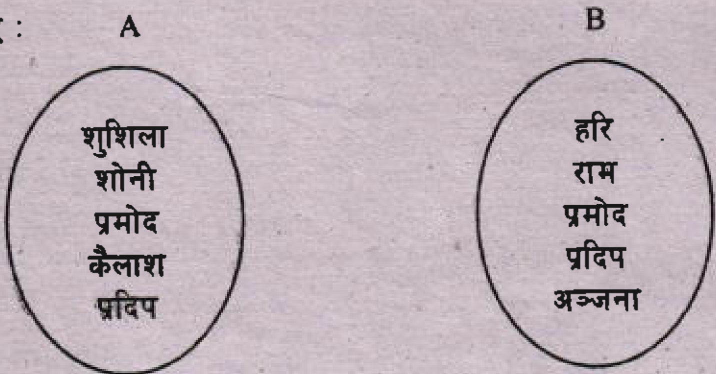
B={a,e,i,o,u} भए

$A \cap B$={a,e} हुन्छ ।



ख) समूहहरूको संयोजना (Union of Sets)

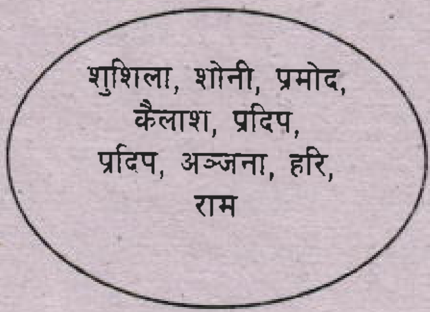
शिक्षणका क्रममा शिक्षक प्रशान्तले कक्षाकोठाबाटै आठजना विद्यार्थीहरू लिई तल दिइए जस्तै समूह बनाए :



विद्यार्थीलाई A र B दुबै समूहका सदस्यहरू पर्ने गरी एउटै समूह बनाउन सकिन्छ ? भन्दै त्यस्तो समूह बनाऊन लगाए । विद्यार्थीहरूले

यस्तो समूह बनाए :

C =

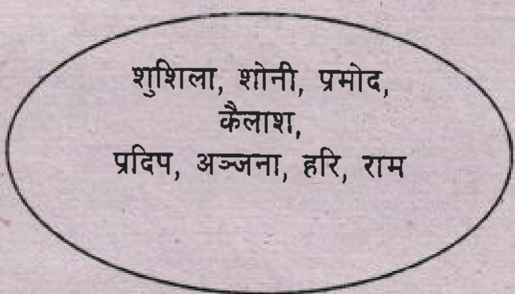


अब प्रशान्तले समूहको संयोजनको अर्थ बताए र विद्यार्थीहरूले बनाएको समूहलाई परिमार्जन गर्न लगाए ।

समूहहरू A र B को सदस्यहरूबाट बनेको समूहलाई ती दुई समूहको संयोजन भनिन्छ । यसलाई $A \cup B$ ले जनाइन्छ । यसलाई A संयोजन B अर्थात् (A union B) भनेर पढिन्छ । यसरी बन्ने समूहमा समूहका सदस्यहरू दोहोरिनु हुँदैन ।

संयोजनको अर्थ स्पष्ट भइसकेपछि विद्यार्थीहरूले माथि आफूले बनाएको संयोजन समूह C मा परिमार्जन गरी यस्तो समूह बनाए :

C=



ग) समूहको पूरक (Complement of a set):

शिक्षक प्रशान्तले समूहको पूरकका बारेमा शिक्षण गर्दा सधैजसो एउटा सर्वव्यापक समूह परिभाषित गरी त्यही सर्वव्यापक समूहको उपसमूह निर्माण गर्दछन् । जस्तै :

उनीसँग बिहानी कक्षामा पढ्न आउने विद्यार्थीहरूको समूह (U)={प्रदिप, सुरज, पुष्पा, शोनी, प्रतिक्षा, प्रकाश}

यीमध्ये गणित विषय मन पराउने विद्यार्थीहरूको समूह A={प्रदिप, सुरज, शोनी}

अब, सर्वव्यापक समूहका सदस्य भएका तर A को सदस्य नभएका विद्यार्थीहरूको समूहलाई "पूरक समूह" भनिन्छ भनी बताए ।

यहाँ, A को पूरक समूह $\overline{A}$={पुष्पा, प्रतिक्षा, प्रकाश}हुन्छ ।

यस्तै गरी उनले अर्को उदाहरण पनि दिए :

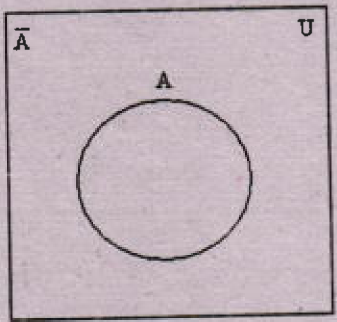
मानौ,

U={नेपालमा आउने पर्यटकहरू}

A={नेपालका हिमाल चढ्ने पर्यटकहरू}

यहाँ समूह A सर्वव्यापक समूह U को उपसमूह हो । हिमाल नचढने पर्यटकहरू समूह U का सदस्यहरूबाट बन्ने समूहलाई समूह A का पूरक समूह (Complement of set A) भनिन्छ । चित्रमा छायाँ परेको भागले समूह A को पूरक समूहलाई जनाउँछ ।

भेन चित्र हेरेर तलका सम्बन्धहरू लेख्न सकिन्छ ?



$U = A \cup \overline{A}$

$A \cap \overline{A} = \phi$

समूहहरू A को पूरक समूह (Complement of set A) भनेको समूह A का सदस्यहरूबाहेकका सर्वव्यापक समूह U को सदस्यहरूबाट बन्ने समूह हो । यस पूरक समूहलाई $\overline{A}$ ले जनाइन्छ ।

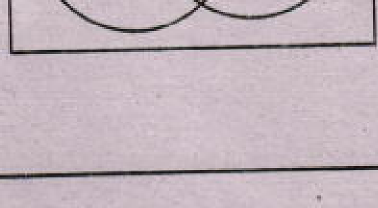
घ) **समूहहरूको फरक** (Difference of sets)

समूहहरूको फरकको शिक्षण गर्दा शिक्षक प्रशान्तले दुईओटा खप्टिएका समूहहरू (Overlapping sets) निर्माण गरी देखाए :

A={1,3,4,5}

B={3,4,6,7}

यी दुई समूहलाई भेन चित्रमा पनि देखाए :



अब,

चित्रमा समूह A को 1 र 5 ले बनेको समूहलाई A र B को सम्बन्ध देखाई कसरी व्याख्या गर्न सकिन्छ ? छलफल गराए ।

"1 र 5 को समूह" भन्दा B को सम्बन्ध देखिएन । तर "B मा नपरेका A का सदस्यहरू" भन्नाले के बुझिन्छ ? के B मा नपरेका A का सदस्यहरूको समूहमा 3 र 4 पर्छन् ? पर्दैनन् । यो समूहलाई A-B ले जनाइन्छ र A-B लाई A फरक B (A differencee B) भनिन्छ ।

> "समूह A बाट समूह B सँग खप्टिएको भाग हटाएको समूह" लाई A-B ले जनाइन्छ, र पढदा "A फरक B" भनेर पढिन्छ ।

समूहको प्रयोग (Application of set)

उन्नाइसौ शताब्दीका मध्यसम्म समूहको प्रयोग गणितमा भएको मानिदैन । जब यस शताब्दीको मध्यतिर गणितमा यसले औपचारिक रूपमा प्रवेश पायो, त्यसपछि यसको प्रयोगको क्षेत्रमा विस्तार हुँदैगयो । नेपालमा बि.सं.२०४० को दशकसम्म पनि समूहको अध्ययन उच्च शिक्षामा मात्र गरिन्थ्यो र यसलाई जटिल धारणाको रूपमा मानिन्थ्यो । तर विस्तारै समूहको धारणालाई ज्यादै सरल र बहुउपयोगी गणितीय धारणाका रूपमा स्वीकार गरी हाल प्राथमिक तहका कक्षाबाट उच्च शिक्षासम्म नै समावेश गरिएको छ । समूहको प्रयोगले केवल यसको अध्ययनका लागि मात्र नभएर गणितका ससाना Initial धारणाहरूको शिक्षणदेखि जटिल गणितीय समस्याहरू समाधानमा समेत प्रयोगमा ल्याई ती कार्यहरूमा सरलता ल्याइएको देखिन्छ । हाल आएर प्राय: जसो सबै गणितीय धारणाहरूको व्याख्या यसैका आधारमा गरिन थालेबाट समूहको प्रयोगको क्षेत्र र महत्वलाई अनुमान लगाउन सकिन्छ ।

विद्यालय तहको गणित शिक्षण सिकाइका क्रममा कक्षा १ मा सङ्ख्याको ज्ञानदेखि ऐकिक नियमका कठिन समस्याहरूलाई सरलता प्रदान गर्न समूहको प्रयोग गर्ने गरिन्छ । हाम्रो निम्नमाध्यमिक तथा माध्यमिक तहको गणितको पाठ्यक्रमले केही गणितीय समस्याको समाधानमा समूहको प्रयोगलाई जोड दिएको छ । जस्तै : ऐकिक नियमका समस्याहरू, प्रतिशतका समस्याहरु, Lowest common factor (L.C.M.) र Highest common factor (H.C.F.) सँग सम्बन्धित समस्याहरू, गणितीय शाब्दिक समस्याहरू आदिको शिक्षणमा समूहको प्रयोगबाट शिक्षणलाई ज्यादै उपयोगी र प्रभावकारी मानिन्छ ।

३. परियोजना कार्य :

- माध्यमिक तहका कक्षहरुमा समूह शिक्षणको लागि सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

एकाइ आठ

भेक्टर

Competency :	**Interprete vector as a system and apply it in proving the plane geometric properties.**

१. परिचय :

माध्यमिक गणित शिक्षाको इच्छाधीन विषयमा भेक्टर ज्यामितिको विषयवस्तुहरूलाई समावेश गरिएको छ । भेक्टर ज्यामिति प्रणाली भौतिक विज्ञानको अध्ययनका लागि अति आवश्यक आधारभूत ज्ञान मानिन्छ । माध्यमिक शिक्षा पूरा गरिसकेपछिको उच्च अध्ययनका क्रममा विद्यार्थीहरूले प्रयोगात्मक विज्ञान (Applied science), गणित, भौतिक विज्ञान क्षेत्रको अध्ययन गर्दा भेक्टरलाई एउटा साधन, भाषा एवम् गणितीय स्वरूपमा अध्ययन एवम् प्रयोग गर्नु पर्छ । भेक्टरको अवधारणालाई अर्थपूर्ण तरिकाले बुझाई, यिनको प्रयोग राम्ररी बुझ्ने गरी अध्यापन माध्यमिक तहमा हुनसके माथिल्ला तहको अध्ययनमा विद्यार्थीहरूको सफलता निश्चित प्राय हुन्छ । यस एकाइ/मोडुलबाट भेक्टर ज्यामिति शिक्षण-सिकाइलाई प्रभावकारी बनाउन कुन क्रम र हदसम्मका विषयवस्तुहरू समावेश गर्ने भन्ने बारेमा एउटा उपाय प्राप्त हुनसक्छ । यस मोडुललाई सकेसम्म पूर्णता दिन खोजिएको छ र विषयवस्तुहरूलाई शीर्षक एवम् शीर्षकहरूमा वर्गीकरण गरी प्रस्तुत गरिएको छ ।

२. विषयवस्तु :

२.१ भेक्टरको धारणा

हाम्रो संसारमा भएका विभिन्न चिजवस्तुहरू एवम् घटनाहरूलाई सङ्ख्यात्मक रूपमा व्यक्त गर्ने काम गणितले गर्छ । तसर्थ गणितलाई "A science of quantification" (सांखिकीकरणको विज्ञान) भन्ने गरिएको छ । हुन त गणितलाई यति साँगुरो रूपमा परिभाषित गर्न मिल्दैन । गणितको परिभाषा गर्दा केचाहिँ गणित होइनबाट सुरु गर्नुपर्छ । हाम्रो जीवन र जगत वरिपरिका चिजवस्तुलाई लामो-छोटो, हलुको-गाह्रो, कुनै निश्चित दिशामा गतिशील भइरहेको वा भएर स्थिर रहेका अवस्थाहरू जस्तै कुनै चिजलाई घिसारी रहनु, धकेलिरहनु, जहाज उडिरहनु, मिसाइल एक ठाउँबाट अर्को ठाउँमा प्रक्षेपण गरिनु जस्ता अनगिन्ति पक्षहरूलाई साङ्खिकीकरण/परिमाणीकरण (Qunatification) गर्नु पर्छ । हलुको/गह्रौं तौलको रूपमा १० ग्राम, २० ग्राम, १ किलो, ५ किलो जस्ता परिमाणले जनाइन्छ । परिमाणलाई मूलतः दुई प्रकारमा वर्गीकरण गर्न सकिन्छ :

- एउटाले कति ठूलो, सानो, लामो, छोटो, धेरै, थोरै, आदि मात्र भन्छ,

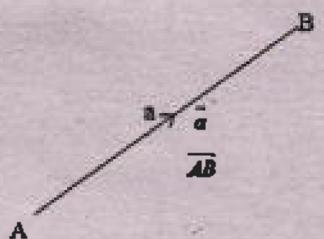
- अर्कोले कति ठूलो/सानो, धेरै/थोरै लगायत कुन दिशातिर चालसमेत भन्छ ।

कोठाको आकार लम्बाइ, चौडाइ, जमिनको क्षेत्रफल, मानिसको शरीरमा कायम भएको तापक्रम, तौल आदिलाई व्यक्त गर्ने परिभाषा (Quantity) लाई स्केलर परिमाण (Scalar quantity) भनिन्छ । यस्ता परिमाणलाई कति ठूलो/सानो, धेरै/थोरै, लामो/छोटो जस्ता गुणलाई नाप वा स्केल सङ्ख्यामा लेखिन्छ । तर हवाइजहाज काठमाडौँबाट पोखरा जाने, मोटर एउटा स्टपबाट अर्को स्टपमा जाने, बन्दुकको गोलिले भित्तामा प्वाल पार्ने जस्ता परिमाणले कति ठूलो/सानो, छिटो/ढिलो गुण नाप वा स्केललाई सङ्ख्यामा व्यक्त गर्नुका साथै एक ठाउँ देखिको अर्को ठाउँसम्मको विस्थापन दिशा पनि दिन्छ । तसर्थ भेक्टर परिमाणले मात्रा र दिशा दुवै बताउँछ ।

स्केलर र भेक्टर दुबै खाले परिमाणहरूको एउटा सूची बनाई त्यस सूचीलाई कक्षाकोठामा विद्यार्थीहरूलाई समूह क्रियाकलाप गराउन वा सामान्य ड्रिल गराउन पनि प्रयोग गर्न सकिन्छ । त्यो सूची दिएर स्केलर र भेक्टर परिमाण वर्गीकरण गर्न लगाउन र किन दुई अलगअलग वर्गमा राखियो कारण उल्लेख गर्न लगाउनु । साथै विद्यार्थीहरू स्वयम्लाई पनि आ-आफ्नो सूची बनाउन लगाउन सकिन्छ ।

भेक्टर दिशा निर्देशित रेखाखण्ड हो । (A vector is a directed line segment)

भेक्टर वस्तुको विस्थापन (नाप र दिशा) जनाउने परिमाण हो । (A vector is a displacement of an object)

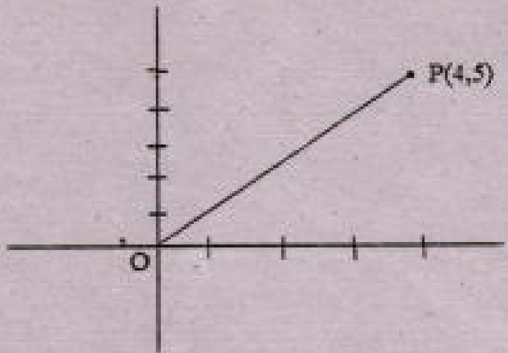


भेक्टरलाई जनाउने विभिन्न तरिकाहरू/चिन्हहरू छन् :

$\overline{AB}, \vec{a}, a$ आदि ।

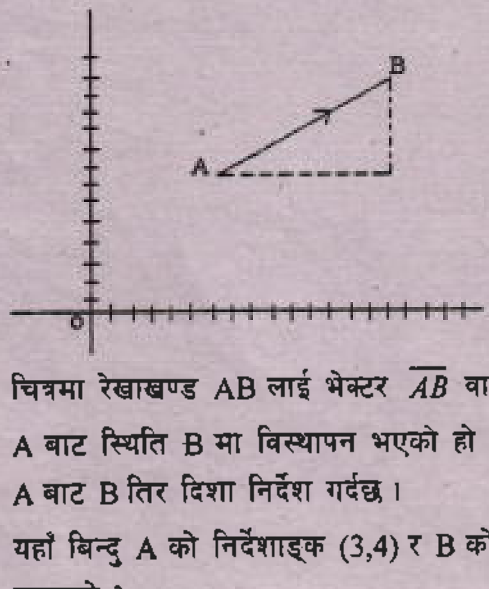
$\overline{AB}$ ले भेक्टरको पुच्छर A बिन्दुमा र टाउको B बिन्दुमा छ भन्ने जनाउँछ । साथै वस्तु बिन्दु A बाट बिन्दु B मा विस्थापन भयो र विस्थापनको मात्रा $\overline{AB}$ रेखाखण्डको नाप बराबर बनायो भन्ने अर्थ दिन्छ । भेक्टरको अवस्थिति बारे कुरा गर्दा पुच्छर (Tail) र टाउको (Head), अर्थात् प्रारम्भ बिन्दु (Initial point) र अन्तिम बिन्दु (Terminal point) निश्चित गर्नु पर्छ ।

२.२ भेक्टर र बिन्दु :



चित्रमा बिन्दु P को स्केल निर्देशाङ्क (4,5) छ । यो बिन्दु P लाई भेक्टरले जनाइन्छ । यो भेक्टरको पुच्छर O (उदगम बिन्दु) र टाउको P मा पर्छ । यो भेक्टरलाई स्थिति भेक्टर (Position vector) भनिन्छ । भेक्टरलाई लेख्दा निर्देशाङ्क लेखेजस्तो गरी लेखिँदैन । यसलाई पङ्क्तिको रुप (Column form) मा लेख्नुपर्छ जस्तै $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ ।

२.३ भेक्टर र रेखाखण्ड :



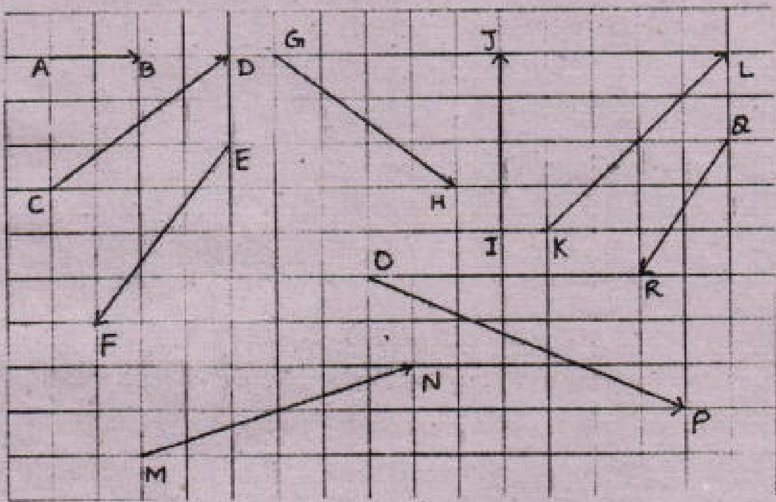
चित्रमा रेखाखण्ड AB लाई भेक्टर $\overline{AB}$ वा भेक्टर $\overline{BA}$ बाट जनाइन्छ । यदि कुनै वस्तु स्थिति A बाट स्थिति B मा विस्थापन भएको हो भने रेखाखण्ड $\overline{AB}$ को नापले विस्थापनको नाप र A बाट B तिर दिशा निर्देश गर्दछ ।

यहाँ बिन्दु A को निर्देशाङ्क (3,4) र B को (7,7) छ । यो अवस्थामा भेक्टर $\overline{AB}$ लाई कसरी जनाउने ?

भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ लाई X अक्षमा हुने $\overrightarrow{AB}$ को प्रतिबिम्बनको नाप र Y अक्षमा हुने प्रतिबिम्बनको नापबाट जनाइन्छ । यी दुई नाप भेक्टर $\overline{AB}$ का अंशहरू हुन् । यहाँ भेक्टर $\overline{AB}$ लाई $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ले जनाइन्छ । यो स्थिति भेक्टर होइन, साधारण भेक्टर (Ordinary vector) हो ।

तलका क्रियाकलापहरू विद्यार्थीहरूलाई गराउन सकिन्छ ।

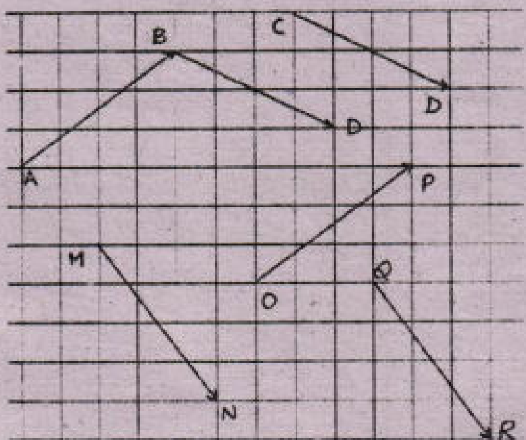
चित्रमा देखाइएका भेक्टरहरूलाई भेक्टर अंश (Vector components) को आधारमा स्तम्भ भेक्टर (Column vector) मा लेख्नुहोस् ।



उदाहरण : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

२.४ भेक्टर स्थानान्तरण (Transfer of vector)

तपाइँले भेक्टरलाई एक स्थानबाट अर्को स्थानमा स्थानान्तरण वा कुनै एक भेक्टरको नाप र स्थितिलाई कायम राखी अर्को कुनै बिन्दुबाट शुरु गर्न सकिन्छ । माथिको चित्रमा दिइएको भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ लाई भेक्टर $\overrightarrow{CD}$ को शीर D बाट शुरु गरी स्थानान्तरण गर्न सकिन्छ ।



चित्रमा दिइएको भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ को शीर B बाट भेक्टर $\overrightarrow{CD}$ लाई शुरु गर्दा B बाट 4 एकाइ दायाँ र 2 एकाइ तलको बिन्दुमा शीर पर्ने गरी भेक्टर बनाउनु पर्छ ।

- चित्रमा दिइएको भेक्टर $\overrightarrow{OP}$ लाई बिन्दु M बाट शुरु गरी लेख्नुहोस् ।

- $\overline{QR}$ लाई X बिन्दुबाट शुरु गरी स्थानान्तरण गर्नुहोस् ।

यी माथिका भेक्टरहरूलाई स्थानान्तरण गर्दा तलका कुनकुन गुणहरू कायम भए ? कारण सहीत लेख्नुहोस् :

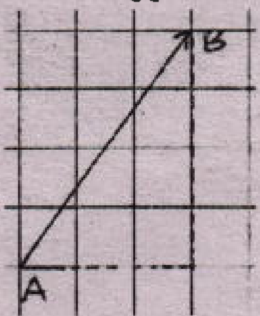
- के भेक्टरको नाप र दिशा एउटै हुन्छ ?
- के भेक्टरको पुच्छर र शीरका बिन्दु पनि एउटै हुन्छ ?
- के भेक्टरको पुच्छर र शीरका बिन्दु पनि परिवर्तन हुन्छ ?

हरेक भेक्टरलाई एक स्थानबाट अर्को स्थानमा स्थानान्तरण गर्ने भन्नुको अर्थ सो भेक्टरको नाप र दिशा एउटै हुने गरी अर्को बिन्दुबाट भेक्टरको शुरुआत गर्नु र दिशाले निर्देशित गर्ने बिन्दुमा अन्त्य गर्नु हो ।

- कक्षाकोठामा शिक्षणको प्रयोजनका लागि भेक्टर स्थानान्तरणको अभ्यासका लागि Worksheet तयार पार्नुहोस् । अभ्यासका लागि बनाइने Worksheet मा वास्तविक जीवनका समस्याहरू पनि समावेश हुनुपर्छ ।

२.५ भेक्टरको किसिम :

भेक्टरको किसिम बारे अध्ययन गर्नुअघि भेक्टरको नाप (Magnitude) र दिशा (Direction) बारे स्पष्ट हुनुपर्छ ।



चित्रमा देखाइएको भेक्टर $\overline{AB}$ को अङ्गहरू (Component) x Component 4 र Y Component 5 छ । पाइथागोरसको (समकोण त्रिभुज) साध्यअनुसार $\overline{AB}$ को लम्बाइ

$d(AB)=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$

अर्थात्,

$|\overline{AB}|=\sqrt{41}$

भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ को नाप (Magnitude) भन्नाले $\overrightarrow{AB}$ को Component हरू x, र y को वर्गको योगफलको वर्गमूल हुन्छ ।

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, x र y $\overrightarrow{AB}$ का Components हुन् ।

माथिको चित्रमा भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ को दिशा कति तरिकाले बताउन सकिएला ?

१. भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ ले x-अक्षसँग घडी घुम्ने दिशामा बनाएको झुकाव जनाउने कोणको tan अनुपातले भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ को दिशा जनाउन सकिन्छ ।

२. भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ ले लिएको Bearing ले पनि दिशा जनाउन सकिन्छ । भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ को bearing भन्नाले उत्तर दिशासँग भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ ले बनाउने कोण हो ।

माथि १ र २ मा बताइएअनुसार चित्रमा दिइएको भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ को दिशा कसरी व्यक्त गर्न सकिएला ?

$\overrightarrow{AB}$ ले x-अक्षसँग बनाएको कोणलाई α मान्दा

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$ or $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ले दिशा (Direction) जनाउँछ ।

माथिको चित्रमा भेक्टर $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ छ भने,

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ हुन्छ । (tan को तालिकाबाट α को नाप निकाल्नुहोस्)

α को नाप थाहा भइसकेपछि २ अनुसारको दिशा निर्धारण गर्न 90° बाट α को मान घटाउँदा आउने कोणको नापले N सित बनाउने कोणलाई जनाउँछ । (यो दिशा निकाल्नुहोस्)

भेक्टरलाई नापको आधारमा तीन किसिममा वर्गीकरण गरिन्छ :

१. शून्य भेक्टर (Null vector):

शून्य नाप (Magnitute) भएको भेक्टरलाई शून्य भेक्टर भनिन्छ । नाप (Magnitude) शून्य हुन भेक्टरको अंश (Components) कतिकति हुनु पर्ला ?

विचार गर्नुहोस् । दुवै अंश (Components) शून्य नभएसम्म भेक्टरको नाप (Magnitude) शून्य हुन सक्दैन । (कसरी ?)

10:00 बजे एउटा बस स्टेशन A मा छ, 1:30 सम्म पनि सोही स्थानमा छ । यो अवस्थालाई भेक्टरमा जनाउँदा कसरी लेख्ने ? $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ हो ? यदि हो भने यसको नाप (Magnitude) कति होला ?

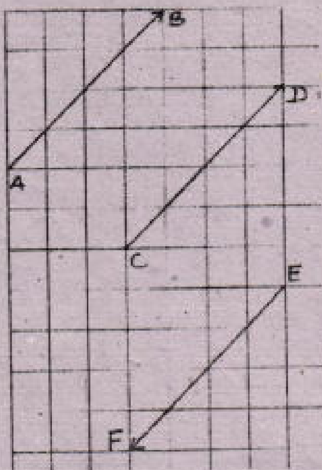
२. एकाइ भेक्टर (Unit vector):

एकाइ (1) नाप (Magnitude) हुने भेक्टरलाई एकाइ भेक्टर भनिन्छ । भेक्टरको नाप (Magnitude) एकाइ हुन भेक्टरका अशहरू (Components) कतिकति हुनुपर्छ ?

0,1 वा 1 र 0 अंशहरू भएमा मात्र भेक्टरको नाप (Magnitude) 1 हुन सक्छ (कसरी ?) । यीबाहेक अन्य अंश (Components) भएमा नाप एकाइ हुनसक्छ वा सक्दैन ? एकाइ नाप हुने भेक्टरहरूको उदाहरण लेख्नुहोस् ।

३. समान भेक्टर (Equal vector):

सँगैको चित्रमा भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{CD}$ को अंशहरु (Components) र दिशा (Direction) समान छन् । त्यस्तै $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ र $\overrightarrow{EF}$ का अंशहरु समान छन् तर दिशा फरक छन् ।

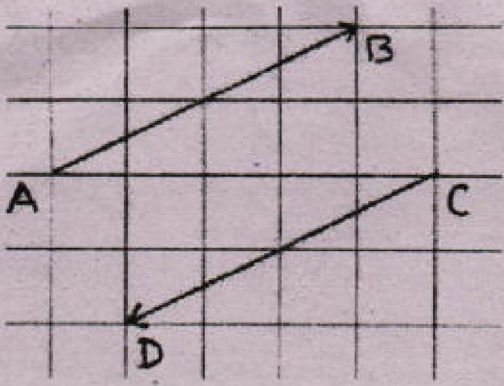


भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{CD}$ समान भेक्टर हुन् तर $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{EF}$ समान भेक्टर होइनन् ।

> नाप (Magnitute) र दिशा (Direction) एउटै/समान भएका भेक्टरहरुलाई समान भेक्टर भनिन्छ ।

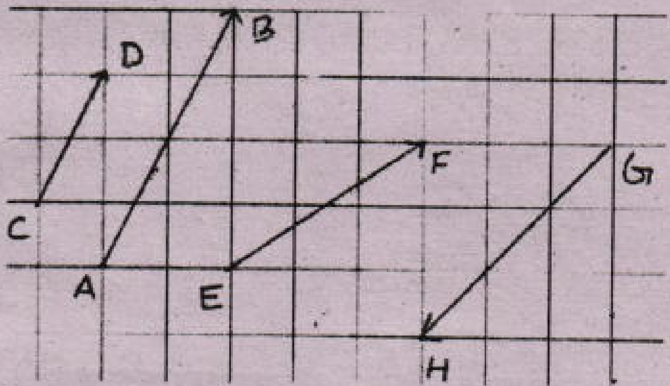
४. ऋणात्मक भेक्टर वा उल्टो भेक्टर (Negative vector):

चित्रमा दिइएका दुई भेक्टरहरु $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{CD}$ का नाप र दिशा कतिकति होलान् ? भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ का अंशहरू x अंश 4 र y अंश 2 छ , त्यस्तै $\overrightarrow{CD}$ का x अंश -4 र y अंश -2 छ । तसर्थ दुवै भेक्टरका अंशहरूको सङ्ख्यात्मक मान बरावर छन् । यस अवस्थामा यी दुबै भेक्टरमा नाप बरावर हुन्छन् तर दिशा विपरीत छन् । यसर्थ $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ को विपरीत वा $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ को विपरीत भेक्टर हुन् । के भेक्टर $\overrightarrow{BA}$, भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ को र भेक्टर $\overrightarrow{DC}$, भेक्टर $\overrightarrow{CD}$ को विपरीत भेक्टर हुन् ? कारणसहित पुष्टि गर्नुहोस् । नाप पनि असमान र दिशा पनि असमान भएमा यी दुई भेक्टरहरू एकअर्काका विपरीत हुन सक्छन् ?



कुनै दिइएको एउटा भेक्टरसित नाप समान भएका तर दिशा विपरीत भएका भेक्टरहरु विपरीत भेक्टर हुन् । दिइएको भेक्टरको नापसँग नाप समान भएको तर दिशा उल्टो हुने अलग भेक्टर वा दिएको भेक्टरमा नै खप्टिएको भेक्टर उल्टो ऋणात्मक भेक्टर हुन्छ ।
भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ को विपरीत $\overrightarrow{BA}$ पनि हो ।

५. समान (Like) र असमान (Unlike) भेक्टर :



चित्रमा भेक्टर $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{CD}$ को नाप फरक छ तर दिशा एउटै छ । यी दुई भेक्टरहरू समान (Like) भेक्टर हुन् । तर भेक्टर $\overrightarrow{EF}$ र $\overrightarrow{HG}$ को नाप पनि असमान र दिशा पनि विपरीत छ । यी दुई भेक्टरहरू असमान भेक्टर हुन् ।

एउटै दिशा (नाप समान/असमान हुदै हुन सक्छ), भएका भेक्टरहरूलाई समान भेक्टर र दिशा विपरीत भएका भेक्टरहरू असमान भेक्टर हुन् ।

क) समान भेक्टर र बराबर भेक्टरलाई कसरी फरक गर्नुहुन्छ ?

ख) असमान भेक्टर र बराबर नभएका भेक्टरबीच कसरी फरक गर्नुहुन्छ ?

ग) डोरी तान्ने खेलमा दुई प्रतिद्वन्द्वि टिमहरूले दुईतिरबाट तान्ने बलले निर्देशित गर्ने भेक्टरहरूलाई कस्ता भेक्टर भनिन्छ ? डोरी सन्तुलनमा बसेको अवस्था र कुनै एक टिमले

तानेको अवस्थालाई समान, बराबरी, वा असमान कस्ता भेक्टरहरू हुन् छलफलबाट टुङ्गोमा पुग्नुहोस् ।

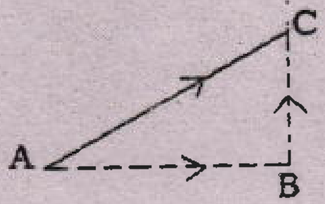
घ) कुनै ह्वीलकार्टमा दुई जना मानिसहरूले धकलेर चलाइरहेको बेलामा प्रयोग भएको बलहरूले निर्देशित गर्ने भेक्टरहरू कुन किसिमका भेक्टरहरू हुन् ?

२.६ भेक्टरहरूको जोड तथा घटाउ :

रमेश चउरको कुनै एक ठाउँबाट १० कदम दायाँतिर सिधा गयो र ८ कदम सिधा माथितिर गयो भने सुरुको स्थानबाट ऊ कति कदम टाढा पुग्यो होला ?

यो अवस्थालाई चित्रमा पनि देखाइएको छ । चित्रमा रमेश A स्थानबाट B स्थानमा पुगेर, यहाँ देखि C मा पुगेको देखाइएको छ । भेक्टर सङ्केत प्रयोग गरेर यसलाई जनाउँदा,

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ लेखिन्छ ।



हिड्न सुरु गरेको बिन्दुदेखिको पूरा स्थानान्तरण A बाट C मा पुगेको हो । तर A बाट C मा सिधा नगइकन A बाट B मा र B बाट C मा गएको अवस्था हो ।

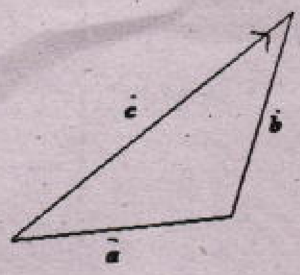
यहाँ,

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ को अर्थ $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ हो । भेक्टर $\overline{AC}$ लाई $\overline{AB}$ र $\overline{BC}$ को नतिजा भेक्टर (Resultant vector) पनि भनिन्छ ।

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ ले विस्थापनको कुरा मात्र जनाउँछ । $\overline{AC}$ को नाप नै भेक्टर $\overline{AB}$ र $\overline{BC}$ का नापको योगफल होइन ।

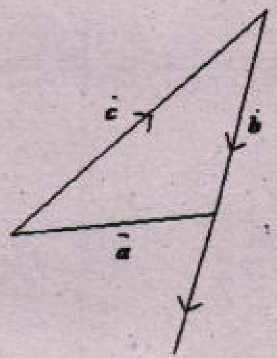
दुईओटा भेक्टरको योगफलको रूपमा तेस्रो भेक्टरलाई जनाउने नियम नै भेक्टरहरूको जोड हो । यसलाई भेक्टरको त्रिभुज नियम (Traingle law of vector) भनिन्छ ।

दुईओटा भेक्टरलाई जोड्दा एउटा भेक्टरको टाउको रहेको बिन्दुबाट दोस्रो भेक्टरको पुच्छर सुरु गरी, त्रिभुजको तेस्रो बाहु पहिलो भेक्टरको सुरु बिन्दुदेखि दोस्रो भेक्टरको अन्तिम बिन्दुसम्म जोडने रेखामा बन्ने भेक्टरले जनाउने (त्रिभुजका तीन बाहुहरूमा राखेर देखाउने) नियमलाई नै भेक्टरको त्रिभुज नियम भनिन्छ । यहाँ चित्रमा



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

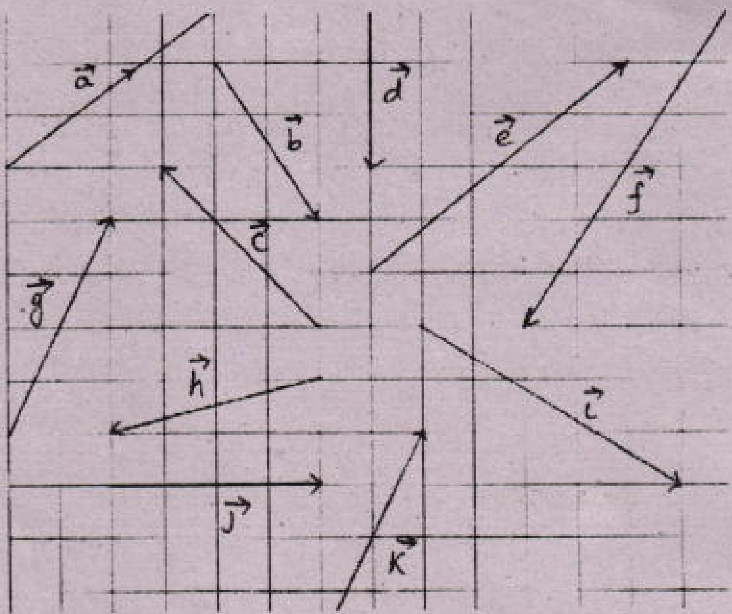
अब सँगैको अर्को चित्र हेरौं ।



यहाँ भेक्टर $\vec{a}$ र $\vec{b}$ को योगलाई कसरी लेख्ने ?

$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}, or \vec{a}+(-\vec{b})$ हुन्छ ? किन ?

चित्रमा दिइएका भेक्टरहरूको योग चित्रद्वारा देखाउन प्रयास गर्नुहोस् ।



i. $\vec{a}$ र $\vec{b}$,

ii. $\vec{c}$ र $\vec{d}$,

iii. $\vec{b}$ र $\vec{e}$,

iv. $\vec{f}$ र $\vec{a}$,

v. $\vec{h}$ र $\vec{i}$,

vi. $\vec{j}$ र $\vec{k}$,

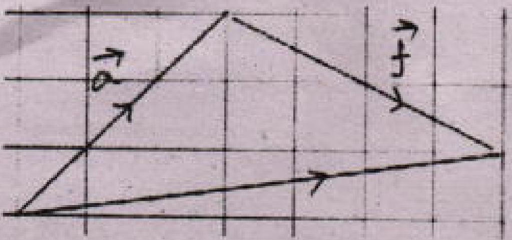
vii. $\vec{j}$ र $\vec{a}$,

viii. $\vec{e}$ र $\vec{j}$

नोट : समतलको विभिन्न ठाउँमा रहेका भेक्टरलाई स्थानान्तरण गरेर भेक्टरहरूको योगफल निकाल्नु पर्छ । माथिको चित्रमा $\vec{a}$ र $\vec{j}$ निकै टाढा छन् । यी दुईको योगफल कसरी निकाल्ने ? त्रिभुज नियम कसरी प्रयोग गर्ने ?

सर्वप्रथम कुन भेक्टरलाई कुनमा स्थानान्तरण गरी त्रिभुज नियम लगाउने टुङ्गो गर्नुपर्छ । भेक्टर $\vec{j}$ लाई $\vec{a}$ मा ल्याउँदा भेक्टरको अन्तिम बिन्दु (Terminal point) बाट $\vec{j}$ (का अंशहरूको आधारमा) यसलाई शुरु गरी चित्र बनाउन सुरु गर्नुपर्छ ।

यस प्रक्रियालाई चित्रमा देखाइएको छ :



माथि कै समस्यामा भेक्टरहरूको अंशहरूको पनि लेख्दै नतिजा भेक्टर निकाल्नुहोस् ।

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

उदाहरणका लागि $\vec{a} + \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = ?$

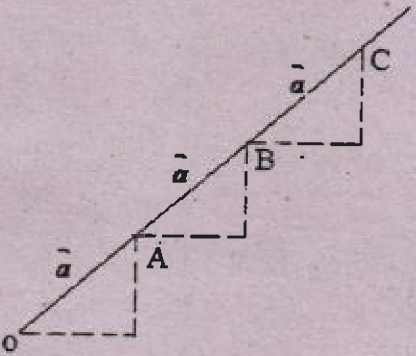
यहाँ चित्रमा $\vec{a}$ र $\vec{f}$ को नतिजा भेक्टरलाई $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ले जनाइन्छ ।

तसर्थ, $\vec{a} + \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ (कसरी ?)

केही उदाहरणका अभ्यासहरू गरिसकेपछि सामान्यीकरण गरी नियम बनाउनुहोस् ।

भेक्टरहरूको योग निकाल्दा तिनीहरूको सङ्गतिबाट अंशहरूको योगफल निकालिन्छ ।

२.७ भेक्टर परिमाण र स्केलर परिमाणको गुणनफल

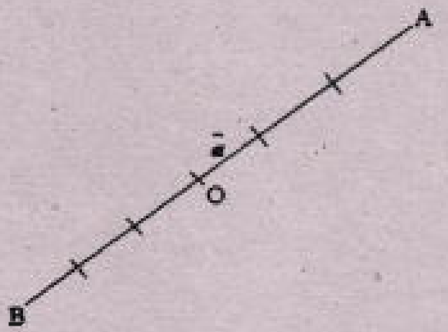


चित्रमा तीनजना प्यारासुटरलाई जमिनमा अवतरण गर्नका लागि ठाउँ निश्चित गर्न एकजना सिपाहीले O देखि बराबरीको दूरीमा दौडिएर तीनओटा झण्डा बिन्दु A, B र C मा गाडेर हिडेको अवस्थालाई देखाइएको छ । O देखि A सम्मको गतीलाई भेक्टर $\vec{a}$, त्यसपछि पनि A देखि B सम्म $\vec{a}$, B देखि C सम्म पनि $\vec{a}$ ले नै जनाइएको छ । O देखि C सम्मको विस्थापन

लाई $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ अर्थात $3\vec{a}$ ले जनाउँछ । यहाँ 3 स्केलर परिमाण र $\vec{a}$ भेक्टर परिमाण हो । $3\vec{a}$ ले भेक्टर $\vec{a}$ को तीन गुणा भन्ने अर्थ दिन्छ ।

भेक्टरलाई स्केलरले गुणन गर्दा आउने परिमाण स्केलर वा भेक्टर के हुन्छ ? किन ?

माथिको उदाहरणमा $3\vec{a}$ ले जनाउने भेक्टरलाई चित्रमा कसरी देखाउने ? $-3\vec{a}$ को अर्थ $\vec{a}$ भेक्टरको तिन गुणा नाप हो । $\vec{a}$ दिशाको विपरीत दिशा भएको भेक्टर भन्ने हो । यसलाई **चित्रमा देखाउँदा $\overline{OB}$ भेक्टर हो ।**



माथिका दुईओटा उदाहरणबाट स्केलर परिमाणको किसिमले भेक्टर र स्केलरको गुणनफलले जनाउने भेक्टरमा फरक पर्ने देखियो ।

> यदि भेक्टर $\vec{a}$ दिइएको भेक्टर र λ दिइएको स्केलर परिमाण छन् भने $\lambda\vec{a}$ वा $\vec{a}\lambda$ एउटा भेक्टर हो जसको नाप भेक्टर $\vec{a}$ को $|\lambda|$ गुणा र दिशा $\vec{a}$ को उही दिशा वा विपरीत हुन्छ । यदि λ धनात्मक छ भने $\vec{a}$ कै दिशा र γ ऋणात्मक भएमा $\vec{a}$ को उल्टो दिशा हुन्छ । यदि $|\lambda|$ धनात्मक छ भने $\vec{a}$ कै दिशा र ऋणात्मक भएमा $\vec{a}$ को उल्टो दिशा हुन्छ ।

- स्केलरले भेक्टरलाई भाग गर्दा आवश्यक शर्तहरू केके होलान् ? स्केलरले भेक्टरलाई भाग गर्ने क्रिया परिभाषित हुन्छ ?
- यदि भेक्टर $\vec{a}$ र $\lambda\vec{a}$ लाई दुई अलगअलग बिन्दुबाट सुरु गर्दा कस्तो चित्र बन्ला ?
- भेक्टर $\vec{a}$ र $\lambda\vec{a}$ समानान्तर हुन्छ ? किन ?

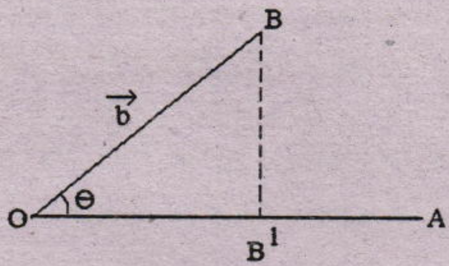
सर्वप्रथम कुनै निर्दिष्ट नमूना

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ र $3\vec{a}=3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ लाई चित्रमा उतार्नुहोस् । यस्तै अरु नमुनाहरूलाई पनि प्रस्तुत गर्नुहोस् र सामान्यीकरण गर्नुहोस् ।

यो क्रियाकलाप गरिसकेपछि $\vec{a}$ र $\lambda\vec{a}$ समानान्तर हुनाको कारण खोज्नुहोस् ।

२.८ दुई भेक्टरको स्केलर गुणन (Scalar product of two vectors):

दुई भेक्टरहरूको स्केलर गुणनफल भन्नाले एउटा भेक्टरको अर्को भेक्टरमा खिचिने प्रोजेक्सन र त्यो भेक्टरको नापको गुणनफल हो ।



चित्रमा भेक्टर $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ र $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ले बिन्दु O मा θ कोण बनाएको छ । $\overrightarrow{OB}$ को $\overrightarrow{OA}$ मा प्रोजेक्सन $\overrightarrow{OB^1}$ लाई भेक्टर $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ को नापमा लेख्दा,

$\left|\overrightarrow{OB^1}\right| = \left|\lambda\overrightarrow{OA}\right|$, यहाँ λ धनात्मकसामान्य भिन्न हो । ....(i)

$$= \lambda\left|\overrightarrow{OA}\right|$$

अब स्केलर λ को मान निकाल्दा,

समकोण त्रिभुज ΔOB^1B मा,

$$\left|\overrightarrow{OB^1}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta$$

अथवा,

$$\lambda\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta$$

$$\lambda = \frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}\cos\theta, i.e. \frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\cos\theta \text{ ....(ii)}$$

स्केलर गुणनफलको परिभाषाअनुसार,

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OB^1}\right|$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\lambda\left|\overrightarrow{OA}\right|$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}.\cos\theta.\left|\vec{a}\right|$$ (λ को मान प्रतिस्थापन गर्दा)

$$\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|.\cos\theta.$$

यहाँ दुईओटा भेक्टरको स्केलर वा डट गुणनफल एउटा भेक्टर र त्यो भेक्टरमा खिचिएको प्रोजेक्सनको नापको गुणनफल मात्र हो । यो स्केलर परिमाण हो । यस गुणनफलबाट दुईओटा भेक्टरबीचको कोण पत्ता लगाउन सकिन्छ । ज्यामितीय रूपमा यसको अर्थ प्रष्ट पार्न कुनै बेला असजिलो छ । सरसर्ती हेर्दा यसको व्यवहारिक जीवनका रूपहरूसँग अर्थपूर्ण सम्बन्ध नभएको जस्तो पनि देखिन्छ ।

भेक्टरहरूको डट गुणनफल वा स्केलर गुणनफललाई अर्को रूपमा परिभाषित गर्दा,

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|.\cos\theta$ लेखिन्छ । यो नै परिभाषाको रूपमा लिएर अन्य सम्पूर्ण कथनहरूको प्रमाणित गर्ने वा परिभाषित गर्ने पनि गरिन्छ । यो पनि मान्य गणितीय पद्धति नै हो । यहाँ हामीले यही परिभाषालाई विस्तार गर्ने कार्य गरियो ।

यो सम्बन्धबाट, दुईओटा भेक्टरहरू बीचकोकोण निकालिन्छ ।

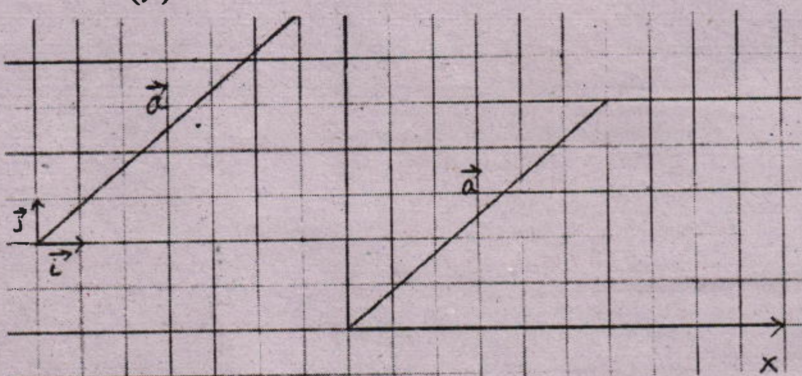
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|},$$

यहाँ θ, भेक्टर $\vec{a}$ र $\vec{b}$ को बीचको कोण हो ।

यहाँ $\cos\theta$ ले दिने मान भेक्टर होइन, स्केलर परिमाण नै हो । तर माथिको सम्बन्धमा $\vec{a}.\vec{b}$ पनि छ । प्रश्न आउँछ $\vec{a}.\vec{b}$ को स्केलरमान कति हुने हो ? कसरी निकाल्ने ?

यहाँ भेक्टरलाई एकाइ भेक्टर र स्केलरको गुणन र योगफलको रूपमा व्यक्त गर्न सकेमा माथिको समस्या समाधान गर्न सकिन्छ ।

भेक्टर $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ लाई $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ को रूपमा लेख्न सकिन्छ । कसरी ?



चित्रमा भेक्टर $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ छ । यो भेक्टरको x-अक्ष र y-अक्षमा प्रोजेक्सन भेक्टर बनाउँदा $\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ र $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ बन्छ यदि x अक्षमा एकाइ भेक्टर $\vec{i}$ र y अक्षमा एकाइ भेक्टर $\vec{j}$ ले $\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ र $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ भेक्टरहरूलाई क्रमशः नाप्दा $6\vec{i}$ र $5\vec{j}$ ले जनाइन्छ ।

$\therefore \vec{a}=6\vec{i}+5\vec{j}$ (त्रिभुज नियमअनुसार)

त्यस्तै, यदि भेक्टर $\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ छ भने, $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ लेख्न सकिन्छ ।

$x\vec{i}+y\vec{j}$ रूपमा लेखिएको भेक्टरहरूको डट गुणनफल निकाल्ने तरिका :

मानौं,

$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ र $\vec{b}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ छ ।

$$\vec{a}\vec{b}=(x\vec{i}+y\vec{j})(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})$$

$$=x.x_1\vec{i}.\vec{i}+x.y_1\vec{i}.\vec{j}+x_1.y.\vec{j}\vec{i}+y.y_1.\vec{j}.\vec{j} \quad \text{(किन ?)}$$

$$=x.x_1+y.y$$

$$\vec{i}.\vec{i}=|\vec{i}|.|\vec{i}|.\cos 0^o=1.1.1=1$$

$$\vec{i}.\vec{j}=|\vec{i}|.|\vec{j}|.\cos 90^o=1.1.0=0$$

त्यस्तै,

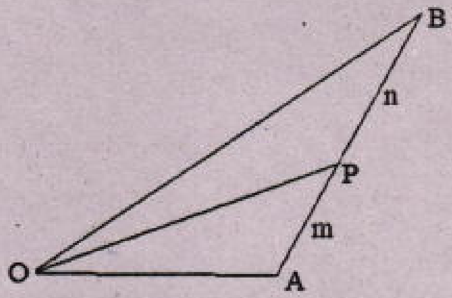
$$\vec{j}.\vec{j}=1$$

$$\vec{j}\vec{i}=0$$

अब,

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{xx_1+yy_1}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^2}}$$ लेख्न सकिन्छ ?

२.९ खण्ड सूत्र (Section formula)



यदि रेखाखण्ड AB लाई बिन्दु P ले आन्तरिक रूपमा m:n को अनुपातमा बिभाजित गर्छ भने स्थिति भेक्टर $\vec{p} = \dfrac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n}$ हुन्छ ।

यहाँ, $\vec{a}$ र $\vec{b}$ बिन्दु A र B का क्रमशः स्थिति भेक्टरहरू हुन् ।

प्रमाण :

रेखाखण्ड $\overline{AB}$ का बिन्दु A लाई स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ र बिन्दु B लाई अर्को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ले जनाऔं । त्यस्तै $\overline{AB}$ लाई आन्तरिक रूपमा विभाजन गर्ने P बिन्दुलाई स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ ले जनाऔं ।

यहाँ,

$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \dfrac{m}{n}$ छ ।

अथवा, $n\overline{AP} = m\overline{PB}$

फेरि, भेक्टर $\overrightarrow{AP}$ र $\overrightarrow{PB}$ समान भेक्टर हुन् । तिनीहरू एउटै सरल रेखामा एकै दिशामा छन् । साथै $n\overline{AP} = m\overline{PB}$ ले $n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$ हुन्छ भन्ने पुष्टि पनि गर्छ ।

अब,

$n(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$

$(m+n)\overrightarrow{OP} = m(\overrightarrow{OB}) + n(\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{m.\overrightarrow{OB} + n.\overrightarrow{OA}}{m+n}$

$\therefore \vec{P} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$

प्रमाणित भयो ।

अभ्यास : यदि रेखाखण्ड $\overline{AB}$ लाई बिन्दु P ले बाह्य रूपमा m:n को अनुपातमा विभाजन गर्छ भने बिन्दु P का स्थिति भेक्टर कति हुन्छ होला ?

नोट : बाह्य रूपमा विभाजन गर्दा m:n लाई ऋणात्मक अनुपातमा लिन्छौं । किन ?

२.१० भेक्टर ज्यामिति (Vector geometry) :

हामीले अध्ययन र अध्यापन गराइआएको यूक्लिडीयन ज्यामितिलाई एक गणितीय पद्धति (Mathematical system) मान्दछौं । यस ज्यामितिको पद्धतिलाई केलाएर हेरेमा निम्न तत्वहरूको आधारमा यो पद्धति बनेको पाइन्छ ।

- **अपरिभाषित पदावलीहरू (Undefined terms)** : जस्तो बिन्दु, रेखा, समतल आदि, यिनीहरूलाई परिभाषा गर्न खोजेमा पूर्ण परिभाषित गर्न सकिदैन । तर यिनीहरूलाई आधार लिएर अरु अवधारणहरू परिभाषित गरिन्छ ।
- **स्वयम् सिद्ध तथ्यहरू/स्वीकृतिहरू (Axiom/Postulate)** : दुईओटा बिन्दुले एउटा सरल रेखा निर्धारण गर्छ, दुईओटा त्रिभुजहरूमा सङ्गतिकोण र त्यों कोण बनाउने दुई सङ्गति भुजाहरू अलगअलग बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । (भु.को.भु. तथ्य) आदि सम्बन्धहरू हुन् र यी सम्बन्धहरूलाई प्रमाणित गर्न सकिदैन तर यिनीहरू आफै स्पष्ट तथ्यहरू हुन् । यी र यस्ता अन्य तथ्यहरूलाई आधार मानेर अन्य सम्बन्धहरू प्रमाणित गरिन्छ ।
- **परिभाषाहरू (Definitions)** : विभिन्न परिभाषित अवधारणाहरू र सम्बन्धहरू जस्तै त्रिभुजको परिभाषा, समानान्तर रेखाहरूको परिभाषा, समरूप, अनुरूप आदि ।
- **मान्यता (Convention)** : कोणलाई जनाउन ∠ सङ्केत प्रयोग गरिन्छ । किन > सङ्केत प्रयोग गरिदैन ? तीनओटा बिन्दुहरू A, B र C मा बिन्दु B, बिन्दु A र C को बीचमा पर्छ भन्ने जनाउन <A B C> लेखिन्छ । तर (A,B,C) लेखिदैन किन ? यी र यस्ता थुप्रै मान्यताहरू गणित समाजले स्वीकारेका कुराहरू हुन् । यसलाई चलन/मान्यता भनिन्छ । गणित एउटा भाषा पनि भएकाले यस्ता चलनहरू प्रशस्त छन् र यसैको आधारमा गणितको भाषालाई अरु गणितीज्ञहरू बुझ्छन् । गणित सर्व व्यापक (Universal) छ ।
- **कथनहरू (Propositions)** : साध्यहरू यसका उदाहरणहरू हुन् । साध्यहरू प्रमाणित भएका कथनहरू हुन् । गणितीय पद्धतिभित्र अप्रमाणित कथनहरू पनि बाँकी हुन्छन् । यिनीहरूको प्रमाणित गर्ने कार्य गणितीज्ञहरूको हुन्छ ।

हामीले यहाँ ज्यामितीय पद्धतिका बारेमा चर्चा गर्‍यौं । भेक्टर ज्यामिति पनि एउटा यस्तै पद्धति हो । यी माथि छलफल गरिएका तत्वहरू भेक्टर ज्यामितिमा पनि पाइन्छ । यसभन्दा अघि भेक्टरका बारेमा गरिएका छलफलहरूमा एउटा गणितीय पद्धतिमा चाँहिने तत्वहरू भेक्टरमा पनि छन् भन्ने कुरा स्पष्ट छ । भेक्टरलाई त्रिकोणमिति, समतलीय ज्यामिति, ठोस (

तीन आयमिक) ज्यामिति आदिमा प्रयोग गरी यी गणितका सम्बन्धहरूलाई स्थापित गर्न वा कथनहरू प्रमाणित गर्न सकिन्छ । यो गणितहरूबीचको सम्बन्ध हो ।

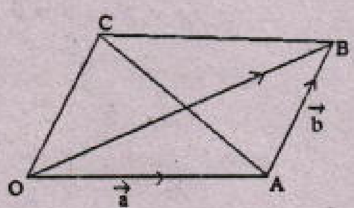
भेक्टरका आधारभूत कुराहरू र सम्बन्धहरूको प्रयोगबाट समतलीय ज्यामितिका कथनहरूको प्रमाण गर्ने कार्य यहाँ गरिन्छ । यसलाई नै सामान्यतया भेक्टर ज्यामिति भन्ने गरिएको छ । यो भेक्टरको प्रयोगबाट समतलीय ज्यामितिका अवधारणाहरू र सम्बन्धहरूलाई अध्ययन गर्ने एउटा गणितीय पद्धति नै हो ।

यो गणितीय पद्धतिमा निम्न धारणाहरू र सम्बन्धहरूलाई आधारभूत जानकारी मानेर समतलीय ज्यामितिका विभिन्न कथनहरूलाई प्रमाणित गरिन्छ ।

- भेक्टरको परिभाषा, प्रकार,
- भेक्टहरूको योगफल,
- स्केलरले भेक्टरलाई गुणन र दुई भेक्टरहरूबीचको डट गुणनफल,
- खण्ड सूत्र (विभाजन सूत्र) ।

भेक्टर ज्यामितिमा सरल रेखालाई विस्थापनले जनाइने गरिन्छ । रेखाको परिभाषा समतलीय ज्यामितिमा लिए जस्तै हुदैन । समतलीय ज्यामितीय सम्बन्धहरू भेक्टरको प्रयोगबाट कसरी प्रमाणित गरिन्छ भन्ने कुरा केही उदाहरणहरूमा प्रयोग गरेर हेरौ ।

उदाहरण १ : भेक्टर $\vec{a}$ र $\vec{b}$ लाई समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू (Adjacent sides) द्वारा जनाइएको छ भने बिकर्णहरूका भेक्टर रूपहरू निकाल्नुहोस् ।



समाधान :

चित्रमा भेक्टर $\overrightarrow{OB}$ र $\overrightarrow{AC}$ दुई विकर्णहरू हुन् ।

त्रिभुज नियमअनुसार,

भेक्टर, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$

उस्तै गरी,

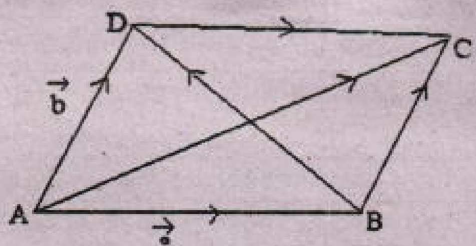
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{OA}) = \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{a}$

उदाहरण २ :

समवाहु चतुर्भुज (Rhombus) का विकर्णहरू समकोण बनाएर काटिन्छन् । यो कथनलाई भेक्टर विधिबाट प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान :



ABCD समवाहु चतुर्भुज हो । यसका भुजाहरूलाई भेक्टरले जनाऔं ।

$\overline{AB} = \vec{a}, \overline{AD} = \vec{b}$

$\overline{AC}$ र $\overline{BD}$ विकर्णहरू हुन् ।

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} [\because BC = AD]$

$= \vec{a} + \vec{b}$

त्यस्तै,

$\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

अब,

$\overline{AC}$ र $\overline{BD}$ विकर्णहरूबीचको कोण निकालौं ।

$\overline{AC} . \overline{BD} = |\overline{AC}| . |\overline{BD}| . \cos\theta$

अथवा,

$(\vec{a} + \vec{b}) (\vec{b} - \vec{a}) = (a + b) . (b - a) . \cos\theta$

अथवा,

$\vec{b}^2 - \vec{a}^2 = b^2 - a^2$

३. **परियोजना कार्य :**

- माध्यमिक तहमा भेक्टर शिक्षणका लागि सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

एकाइ नौ
म्याट्रिक्स

Competency: Use matrices in representing the verbal discourse and solving the equations.

१. परिचय :

सामान्यतः पत्रपत्रिकाहरू (दैनिकी वा अन्य) पल्टाएमा धेरै किसिमका महत्वपूर्ण सूचनाहरु पढ्न पाइन्छ । तीमध्येमा कतिपय निबन्धात्मक लेखहरू हुन्छन् भने कतिपय छोटकरीमा प्रस्तुत गरिएका विविध खबरहरूका साथै सूचीकृत सूचनाहरू पनि हुन्छन् । जस्तै : नेपाल स्टक एक्सचेन्ज, मुद्राविनिमय दर, मौसमी तथ्याङ्क, विभिन्न किसिमका विज्ञापनहरू आदिको जानकारी बडो संक्षेपमा प्रभावकारी ढङ्गले सानो तालिकामा सङ्ख्याहरूको प्रयोगबाट धेरै ठूला सूचनाहरू चिटिक्क पारेर प्रस्तुत गरिएका पाइन्छन् । वास्तवमा: यस प्रकारको विधिद्वारा संप्रेषण गरिने खबरहरूको माध्ययम म्याट्रिक्स बनेको हुन्छ । त्यस्तै : विभिन्न प्रकारका प्रतियोगिताहरूको खेलहरूको प्राप्ताङ्क सूची तयार गर्दा होस् वा विद्यार्थीहरूको मार्कसिटहरू तयार गर्दा त्यहाँ पनि प्रयोग भएको विधि म्याट्रिक्स नै हो । यसरी कम्प्युटरका प्रोग्रामहरू, बैंकहरूमा हुने विविध कारोबारहरू लगायत भौचर तयार गर्दा वा पसलहरूमा हुने कारोबारका रसिदहरू तयार गर्नुहोस् । यी सब कार्यहरूमा प्रयोग भएको विधि म्याट्रिक्स हो । यसरी दैनिक जीवनमा अति नै स्तरीय रूपमा प्रयोग भइरहने गणितको एउटा उपकरणका रूपमा रहेको छ "म्याट्रिक्स" । त्यसो त म्याट्रिक्स कै प्रयोगबाट गणितीय समस्याहरू हल गर्न समेत सजिलो हुन्छ । जस्तै:समीकरणहरूका हल ।

२. विषयवस्तु :

२.१ म्याट्रिक्स शिक्षण

म्याट्रिक्सको औपचारिक शिक्षणसिकाइ गर्नुपूर्व विद्यार्थीहरूलाई ससाना समूहमा विभाजन गरी केही पत्र पत्रिकाहरू (पुराना भए पनि) बाँडिदिने । निबन्धात्मक लेखहरूलाई बाहेक अन्य खबरहरू, सूचीकृत जानकारीहरू, विज्ञापनहरू आदिको रूपरेखा, बजेट, सूचना प्रवाहको विधि, ससाना ठाउँहरूको उपयोग, गणितीय अवधारणाहरूको प्रयोग आदि जस्ता कुराहरूमा उनीहरूको ध्यान केन्द्रित गर्दै त्यस प्रकारका सामग्री कटिङ्ग गर्नसमेत लगाउने । अनि तुलना गर्न लगाउने कि ती सूचनाहरू निबन्धात्मक विधिद्वारा प्रस्तुत गरिएको भए सजिलो वा कठिन के हुन्थ्यो होला ।

२.२ म्याट्रिक्सको बनोट, तालिकीकरण र यसको आकार :

निम्नलिखित क्रियाकलापहरुका माध्यमबाट म्याट्रिक्सको बनोट र तालिकीकरणको धारणा दिन सकिन्छ ।

क्रियाकलाप १

विद्यार्थीहरुको हरेक समूहलाई एउटाएउटा मार्कसीटको नमुना बनाउन लगाउने । जस्तै :

Exams / Subject	First Term	Second Term	Final Term
Mathematics	20	20	60
English	15	18	50
Science	16	17	59
Nepali	18	14	58

यस तालिकालाई Matrix मा बदल्न Hint दिने र उनीहरूलाई आआफ्नो तालिकालाई Matrix मा बदल्न लगाउने । जस्तै :

$$\begin{matrix} \\ M \\ E \\ S \\ N \end{matrix}\begin{bmatrix} F & S & F_i \\ 20 & 20 & 60 \\ 15 & 18 & 50 \\ 16 & 17 & 59 \\ 18 & 14 & 58 \end{bmatrix}$$

क्रियाकलाप : २

एउटा विद्यालयको क्यान्टीनमा आइतबारका दिन ४० कोक, २५ फेन्टा र ४५ पेप्सी बिक्री भएछन् । त्यस्तै सोमबारका दिन ५० कोक, ३५ फेन्टा र ५५ पेप्सी बिक्री भए । यस्ता सूचनाबाट एउटा Matrix तयार गर्न लगाउनु उपयुक्त हुने रहेछ ।

अतः विद्यार्थीका दैनिकीसँग मेल खाने तथ्याङ्कबाट Matrix बनाउन लगाउनु उपयुक्त हुने रहेछ ।

क्रियाकलाप : ३

विद्यार्थीहरूका विभिन्न समूहमा भएका पत्रपत्रिकाका Cuttings बाट प्राप्त सूचनाहरू (आँकडाहरू) लाई पनि Matrix मा बदल्न लगाउन सकिने रहेछ ।

नोट : माथिको क्रियाकलाप १ मा तयार भएको Matrix बाट सूचना ग्रहण गर्न सिकाउन केही प्रश्न सोध्न सकिन्छ । जस्तै :

- प्रथम त्रैमासिक (दोस्रो, अन्तिम) परीक्षामा कुन विषयमा सबभन्दा कम अङ्क प्राप्त भएको छ ?
- Maths को प्राप्ताङ्कबाट विद्यार्थीको विषयगत ज्ञान कस्तो भएको पाइन्छ ?

- अन्तिम परीक्षामा विज्ञानको प्राप्ताङ्क पहिलेका जाँचको प्राप्ताङ्कको तुलनामा प्रगति कुन रूपमा भएको देखिएको छ ?
- Row र Column को नामाकरण तथा स्थान मानहरू (Positional values) (Row र Column) को आधारमा भन्न लगाउने गर्न सकिन्छ? आदि ।
- Row र Column को सङ्ख्याको आधारमा Matrix को आकार आयताकार वा वर्गाकार हुन्छ । वर्गाकार म्याट्रिक्समा Row र Column को सङ्ख्या बराबर हुन्छ । अन्यथा म्याट्रिक्स आयताकार हुन्छ ।
- यदि म्याट्रिक्सको Row र Column को सङ्ख्या क्रमशः m र n भए यसको क्रम m×n ले जनाइन्छ ।

२.२ म्याट्रिक्सका प्रकारहरू: बराबर म्याट्रिक्स र म्याक्सिको टान्सपोज (Transpose of matrix)

निम्नलिखित क्रियाकलापहरुका माध्यमबाट म्याट्रिक्सका प्रकारहरु बारे स्पष्ट पार्न सकिन्छ ।

क्रियाकलाप : १

एकछिन विचार गरौं कि म्याट्रिक्सभित्रका Element हरू एउटै लहरमा (तेर्सो वा ठाडो) रहँदा, Element हरू सबै एकै प्रकारका हुँदा (जस्तै : शुन्य), मुख्य विकर्णका Element हरू एउटै हुँदा वा एकएक मात्र हुँदा, मुख्य विकर्णका Element हरूबाहेक अन्य Element हरू सबै शुन्य हुँदा, म्याट्रिक्सको Row र Column को सङ्ख्या बराबर वा फरक हुँदा आदि जस्ता कुराहरूको बारेमा क्रमशः विचार गरी समूहगत छलफल गरी बोर्डमा खासखास बुँदाहरू टिप्दै जाने । साथै यी विभिन्न किसिमका म्याट्रिक्सका विशेषताका आधारमा म्याट्रिक्सका प्रकारहरूको नामाकरण पनि गर्दै जानु ।

क्रियाकलाप : २

एउटा त्यस्तो म्याट्रिक्स बनाउने । जसलाई दुई भिन्न प्रकारले लेख्न सकियोस् । जस्तै :

$$A=\begin{bmatrix}4 & 9\\ 49 & 81\end{bmatrix}_{2x2} \text{ र } B=\begin{bmatrix}2^2 & 3^2\\ 7^2 & 9^2\end{bmatrix}_{2x2}$$

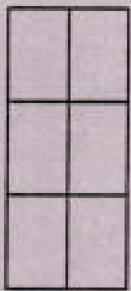
यहाँ A र B दुईओटा म्याट्रिक्सहरूको अडर 2×2 (एउटै अडर) र सम्बन्धित Elements बराबर छन् । यस प्रकारका अरु धेरै जोडी म्याट्रिक्सहरू विद्यार्थीहरूलाई बनाउन लगाउनुहोस् । बराबर म्याट्रिक्स हुनलाई केके कुराहरू उस्तैउस्तै हुनुपर्दोरहेछ पत्ता लगाउन खोज विधि अपनाउन सकिन्छ ।

क्रियाकलाप : ३

म्याट्रिक्समा भएका Row र Column का Element हरूलाई निर्देशित खोज विधि (Guided discovery method) द्वारा क्रमशः (पहिलो Row का Element हरूलाई पहिलो Column मा र

दोस्रो Row का Element हरूलाई दोस्रो Column मा र अरु पनि त्यस्तै) लेख्दा बन्न जाने नयाँ म्याट्रिक्स नै Transpose of matrix हो भन्ने कुरा विद्यार्थीहरूले स्वक्रियाकलापबाट बुझ्नेछन् ।

- क्रियाकलाप १ अनुसारको कथनमा आधारित हुँदैगरेको छलफलअनुसार निर्देशित खोज विधि अपनाउनु राम्रो हुन्छ ।
- क्रियाकलाप २ मा वर्ग गरेर दिइएको म्याट्रिक्सलाई नयाँ म्याट्रिक्समा बदलेजस्तै अरु विभिन्न क्रियाहरूद्वारा नयाँ म्याट्रिक्स बनाउन लगाई बराबर म्याट्रिक्सहरूबाट Elements को स्थान एउटै हुनुपर्दछ भन्ने पृष्ठपोषण दिन सकिन्छ ।
- एउटा तालिका (कुनै अर्डरको) बनाई यसलाई 90° clockwise direction मा घुमाई हेरौं ।



3×2

90° मा घुमाएपछि :

2×3

यसरी Row र Column को सङ्ख्या साटासाट (Exchange) हुन्छ भन्ने सिक्न सके नसकेको सुपरिवेक्षण गर्दै जानुहोस् साथै उनीहरूका Element हरू कताकता पुगेका छन् भन्ने कुरामा अलमल गरेका भए यसलाई आफ्ना लागि पृष्ठपोषणका रूपमा लिई अगाडि बढ्न सकिन्छ ।

२.३ म्याट्रिक्सहरूको जोड, घटाउ र गुणन

निम्नलिखित क्रियाकलापहरुको माध्यमबाट म्याट्रिक्सको जोड, घटाउ र गुणनको धारणा प्रस्ट पार्न सकिन्छ ।

क्रियाकलाप : १

म्याट्रिक्समा जोड क्रियाको क्रियाकलाप : मानौ एउटा गोठमा ५ ओटा गाई, ३ ओटा भैंसी र ६ ओटा बाख्रा छन् । त्यस्तै अर्को गोठमा २ ओटा गाई, १ भैंसी र ४ ओटा बाख्रा छन् । ती दुबै गोठका गाई, भैंसी र बाख्रालाई एउटा नयाँ गोठमा सार्नुपर्ने भएमा उक्त नयाँ गोठमा ठीक त्यति नै गाई, भैंसी र बाख्राका लागि कतिकति सीट क्षमता भएको नयाँ गोठ बनाउनु पर्छ ।

यसका लागि पहिले पुरानो दुईओटा गोठमा भएका गाई, भैंसी र बाखाहरूको सङ्ख्या जनाउने म्याट्रिक्सहरू बनाउन सकिन्छ ।

पहिलो पुरानो गोठ (A) **दोस्रो पुरानो गोठ (B)**

(गाई भैंसी बाखा गाई भैंसी बाखा)

5 3 6 2 1 4

- अब, A+B=

(गाई भैंसी बाखा) = (गाई भैंसी बाखा)

5+2 3+1 6+4 7 4 10

मूलत : यस उदाहरणबाट दुईओटा कुराहरू स्पष्ट हुन्छन् ।

- नयाँ बनाउने गोठमा आवश्यकताअनुसारको सीट क्षमता (गाई, भैंसी र बाखाका लागि अलगअलग रूपमा) कतिकति हुने भन्ने र
- गाईको सङ्ख्या गाईसँगै, भैंसीको सङ्ख्या भैंसीसँगै र बाखाको सङ्ख्या बाखासँग नै जोड्नुपर्छ भन्ने सन्देश सहजै विद्यार्थीहरूले ग्रहण गर्ने छन् ।

थप : यसरी पहिलो म्याट्रिक्सको स्थानअनुसारको Element (जस्तै : दुवै म्याट्रिक्समा बाखा, पहिलो Row र तेस्रो Column मा रहेको हुनाले बाखाको सङ्ख्या दुवैबाट जोड्नु भनेको एउटै स्थानको जोड हो ।

दोस्रो म्याट्रिक्सको पनि सोही स्थानको element सँग जोडिन जान्छ । अन्यथा : परिणाम अनर्थ हुन्छ जस्तै : पहिलो म्याट्रिक्सको ५ ओटा गाई र दोस्रो म्याट्रिक्सको ४ ओटा बाखा जोडियो भने (५ गाई+४ बाखा) ९ ओटा के भन्ने ?

अर्थात नत ९ ओटा गाई भन्न मिल्छ नत ९ ओटा बाखा नै !

क्रियाकलाप : २

म्याट्रिक्समा घटाऊ क्रियाको क्रियाकलाप : माथिको जस्तै एउटा गोठमा भएका वस्तुहरूको सङ्ख्या म्याट्रिक्समा देखाऔं ।

A= (गाई भैंसी बाखा)

10 4 7

मानौ, अहिलेको हिउँदमा दुईओटा गाईहरू बिक्री भए, एउटा भैसी जोडिने मन्यो र ३ ओटा बाखाहरू चोरी भए । यसको पनि म्याट्रिक्स बनाई हेरौं ।

B= (गाई भैंसी बाखा)

2 1 3

अब, जम्मा वस्तुहरू गोठमा कति रहिरहेका छन् भनी थाहा पाउनु पर्दा तल दिइएको घटाऊ क्रियाकलाप हेरौं ।

A-B = (गाई भैंसी बाखा) - (गाई भैंसी बाखा)

10 4 7 2 1 3

= (गाई भैंसी बाखा)
10-2 4-1 7-3

A-B = (गाई भैंसी बाखा)
8 3 4

नोट :

- सम्बन्धित Element हरू (स्थानअनुसारका) को जोड भए जस्तै घटाऊ क्रिया पनि सम्बन्धित Elements बीच नै हुन्छ ।
- म्याट्रिक्सहरूको जोड र घटाऊ दुवै क्रियाहरूका लागि दुवै म्याट्रिक्सहरूमा row र Column को सङ्ख्या (Order of the matrices) बराबर हुन अति आवशयक छ । अन्यथा : यी दुवै क्रियाहरू गर्न सकिँदैन ।
- माथिका म्याट्रिक्सहरूको अर्डर 1×3 भए तापनि यी जोड र घटाउका क्रियाहरू अरु जुनसुकै अर्डर तर दुबैमा बराबर भएसम्म गर्न सकिन्छ ।

क्रियाकलाप : ३ (क)

कुनै सङ्ख्याद्वारा म्याट्रिक्सको गुणन :

तल दिइएको म्याट्रिक्सलाई तीन पटक जोडेर हेरौं

A = (कापी कलम पेन्सिल)
3 4 1

A+A+A =

(कापी कलम पेन्सिल)+
3 4 1
(कापी कलम पेन्सिल)+
3 4 1
(कापी कलम पेन्सिल)
3 4 1

3A = (कापी कलम पेन्सिल)
3+3+3 4+4+4 1+1+1

3A = (कापी कलम पेन्सिल)
9 12 3

यस क्रियाकलापको छलफल चलाइसकेपछि विद्यार्थीहरूको निष्कर्ष निम्नानुसारको हुन जानेछ । कुनै सङ्ख्याले (अचल) म्याट्रिक्सलाई गुणन गर्नु भनेको त्यसको एउटा लहर (row) को पूरै element हरूलाई गुणन गर्नु हो ।

क्रियाकलाप : ३ (ख)

म्याट्रिक्सलाई म्याट्रिक्सले नै गर्ने गुणन : तल दिइएका तीनओटा तालिकाहरूलाई ध्यानपूर्वक अध्ययन गर्नुहोस् । जहाँ तीनओटा परिवारको मासिक खाद्यान्नको खपत र ती खाद्यान्नहरूको मूल्य दुई महिनाका लागि दिइएको छ ।

तालिका : १

परिवारहरू	खाद्यान्न के.जी.मा	
	चामल	दाल
राम	16	4
श्याम	15	5
राधेश्याम	10	3

तालिका : २

	मूल्य रु.प्रति के.जी.	
खाद्यान्न	बैशाख	जेष्ठ
चामल	30	32
दाल	45	50

तालिका : ३

परिवारहरू	बैशाख महिनाको खर्च	जेष्ठ महिनाको खर्च
राम	16×30+4×45=660	16×32+4×450=712
श्याम	15×30+5×45=675	15×32+5×50=750
राधेश्याम	10×30+3×45=435	10×32+3×50=470

विद्यार्थीहरूको समूहगत छलफललाई निम्नअनुसारको आकार, दिँदै जानुहोस् । जस्तै : **तीनजनाको छुट्टाछुट्टै परिवारमा चामल र दालको खपतअनुसारको मासिक खर्च (दुई महिनाको) निकालिएकालाई म्याट्रिक्समा कसरी परिवर्तन गर्ने भन्ने सोच विकसित गर्दै निम्नअनुसार गर्ने तर्फ उन्मुख गराउन सकिन्छ ।**

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 15 & 5 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}_{3\times2} \times \begin{bmatrix} 30 & 32 \\ 45 & 50 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 16\times30+4\times45 & 16\times32+4\times50 \\ 15\times30+5\times45 & 15\times32+5\times50 \\ 10\times30+3\times45 & 10\times32+3\times50 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 660 & 712 \\ 675 & 730 \\ 435 & 470 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$\begin{matrix} \text{राम} \\ \text{श्याम} \\ \text{मोहन} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 660 & 712 \\ 675 & 730 \\ 435 & 470 \end{bmatrix}$$

नोट : माथि दिइएका दुईओटा म्याट्रिक्सहरूमा पहिलो म्याट्रिक्स 3×2 र दोस्रो म्याट्रिक्स 2×2 अर्डरका छन् । यसरी पहिलो म्याट्रिक्सको Column को सङ्ख्या दोस्रो म्याट्रिक्सको row (लहर) को सङ्ख्यासँग बराबर भएकाले नै माथिको गुणन सम्भव भएको हो । तसर्थ : विद्यार्थीहरूलाई यो कुरा स्पष्ट पार्नका लागि गुणन हुननसक्ने म्याट्रिक्सहरूको गुणन गर्न लगाएर हेर्ने जुन गुणन सम्भव हुँदैन त्यसको अर्थ माथि भने झैं उनीहरूलाई नै पत्ता लगाउन प्रेरित गर्न सकिन्छ ।

नोट : म्याट्रिक्सहरूको जोड, घटाऊ र गुणनका लागि माथि दिइएका उदाहरणहरू जस्तै : विद्यार्थीहरूसँग सम्बन्धित त्यस्ता थुप्रै गणितीय समस्याहरू बनाउन लगाउन सकिन्छ । अनि उनीहरू नै बनाएका समस्याहरूलाई समाधान गर्नका लागि पनि आवश्यक सहयोग तथा निर्देशनहरू दिन सकिन्छ ।

- उल्लिखित क्रियाकलापका आधारमा चरणबद्ध रूपमा समेत सृजनशील प्रश्नहरू सोध्न सकिन्छ ।
- यस प्रकारका म्याट्रिक्ससम्बन्धी प्रश्नहरू तिमीहरूको घरपरिवारमा भए गरेका कुराहरूबाट बनाएर ल्याउ भनी एउटा परियोजना कार्यको रूपमा पनि दिन सकिन्छ ।

२.४ म्याट्रिक्स विधिद्वारा समीकरणहरूको समाधान (Solving equations by matrix method)

यस प्रकारको सिकाइका लागि निम्नअनुसारका पूर्वज्ञानहरूको आवश्यकता पर्दछ ।

पूर्वज्ञान १

म्याट्रिक्सका खण्डीकरण :

विद्यार्थीहरूलाई अवगत भइसकेको छ कि यदि $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ भएमा x=a र y=b हुन्छ । अर्थात, x=a र y=b लाई $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ लेख्न सकिन्छ भन्ने । त्यसैगरी, 2x+y=3 र 4x-3y=1 लाई पनि म्याट्रिक्सका रूपमा लेख्न सकिन्छ । जस्तै :

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ 4x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots (i)$$

यहाँ बाँयापट्टिको म्याट्रिक्समा भएका x र y का गुणाङ्कहरू (Coefficients) लाई मात्र लिएर एउटा म्याट्रिक्स बनाई त्यसलाई चलहरू (Variables) को म्याट्रिक्स $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ले पछिल्तिरबाट गुणन गरी हेरौँ । जस्तै :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 4x \quad 3y \end{bmatrix} \text{..........(ii)}$$

अब, समीकरण नम्बर (i) र (ii) बाट,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$ हुन्छ ।

निश्कर्ष : म्याट्रिक्स $\begin{bmatrix} 2x+y \\ 4x \quad 3y \end{bmatrix}$ लाई खण्डीकरण गर्दा $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ हुन्छ । यहाँ, केही म्याट्रिक्सहरू दिएर विद्यार्थीहरूलाई गुणनखण्ड गर्न लगाउन सकिन्छ ।

पूर्वज्ञान : २

म्याट्रिक्सको डिटरमिनेन्ट (Determinant of matrix)

अर्डर 1×1 भएको म्याट्रिक्स $M=[a]_{1\times1}$ को डिटरमिनेन्ट भन्नाले M को परिमाण भन्ने जनाउँछ । तसर्थ Det(M)=a हुन्छ । जहाँ Det(M) ले म्याट्रिक्स M को डिटरमिनेन्ट भन्ने बुझिन्छ । जहिले पनि डिटरमिनेन्ट निश्चित मान हुन्छ ।

त्यस्तै : म्याट्रिक्स $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2}$ भएमा यसको डिटरमिनेन्टलाई परिभाषित गर्नुपर्दा यो एउटा निश्चित मान हो जसको परिमाण मेजर (Major) डायगनलका सदस्य (Element) को गुणनफललाई घटाउँदा निश्किन्छ । जस्तै : det(M) = ad-bc

नोट :

- केही 2×2 अर्डरका म्याट्रिसहरू दिएर तिनीहरूको डिटरमिनेन्ट निकाल्ने अभ्यास गराउन सकिन्छ ।
- डिटरमिनेन्टमा लहर (Row) र पंक्ति (Column) को सङ्ख्या जहिले पनि बराबर हुन्छ ।

पूर्वज्ञानतह : ३

म्याट्रिक्सको विपरीत (Inverse of a Matrix):

कुनै दुईओटा म्याट्रिक्स A र B लिऔँ, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \text{ र } B = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$ छन् ।

एकपटक यी म्याट्रिक्सहरूको गुणनमा ध्यान दिनुपर्छ ।

यहाँ,

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -3\\-5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16-15 & -6+6\\40-40 & -15+16\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}8 & -3\\-5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16-15 & 24-24\\-10+10 & -15+16\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

तसर्थ, AB=BA=I भयो, जहाँ Identity म्याट्रिक्स $(I)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ हो ।

नोट : कुनै दुईओटा म्याट्रिक्सहरूको गुणन (अवस्था परिवर्तनसमेत गर्दा जस्तै : AB र BA) बाट Identity म्याट्रिक्स निस्कन्छ भने ती दुई म्याट्रिक्सहरू (A र B) लाई एक अर्काको विपरीत म्याट्रिक्स भनिन्छ ।

यदि A कुनै म्याट्रिक्स भए यसको विपरीत म्याट्रिक्सलाई जनाउनु पर्दा, A^{-1} ले जनाइन्छ ।

पूर्वज्ञान तह : ४

विपरीत म्याट्रिक्स निकाल्ने विधि :

कुनै एउटा म्याट्रिक्स लिऔं, $M=\begin{bmatrix}2 & -4\\6 & 8\end{bmatrix}$

पहिलो चरण :

म्याट्रिक्स M को मुख्य विकर्ण (Major diagonal) का दुई सदस्यहरूको स्थान परिवर्तन गरौं ।

जस्तै : $\begin{bmatrix}8 & -4\\6 & 2\end{bmatrix}$

दोस्रो चरण :

म्याट्रिक्स M को सहायक विकर्ण (Minor diagonal) का दुई सदस्यहरूको चिन्ह परिवर्तन गरौं । जस्तै : $M=\begin{bmatrix}2 & 4\\-6 & 8\end{bmatrix}$

तेस्रो चरण :

म्याट्रिक्स M को Determinant निकालौं । जस्तै : |M|=det(M)=2×8-{6×(-4)}=40.

अब, पहिलो र दोस्रो चरणहरूबाट बनेको म्याट्रिक्सलाई तेस्रो चरणको कार्यबाट निस्केको मानले भाग गरौं । यसरी बनेको नयाँ म्याट्रिक्सलाई N ले जनाउँदा,

$$N = \frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

चौथो चरण :

M लाई N ले र N लाई M ले गुणन गरी हेरौं ।

जस्तै : $MN = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \times \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \times \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 16+24 & 8-8 \\ 48-48 & 24+16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

त्यसैगरी, $NM = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ (Identity matrix)}$$

MN=NM=I भएकाले M र N एक अर्काका विपरीत म्याट्रिक्स हुन् ।

नोट : केही म्याट्रिक्सहरू दिएर तिनीहरूको विपरीत म्याट्रिक्स निकाल्न लगाउन सकिन्छ ।

उल्लिखित चारैओटा ज्ञानतहहरूको अभ्यास राम्रोसँग भइसकेपछि विद्यार्थीहरू निम्नअनुसारको कार्य गरी दिइएका समीकरणहरू म्याट्रिक्स विधिबाट हल गर्न सक्षम हुनेछन् । जस्तै :

म्याट्रिक्स विधिबाट हल गर्नुहोस् :

$3x+2y=5$

$3x-y=3$

मानौं, गुणाङ्कहरूको म्याट्रिक्स (A), चलहरूको म्याट्रिक्स (X) र अचलहरूको म्याट्रिक्स (B) । तब दिइएका समीकरणहरूलाई निम्नअनुसार लेख्न सकिन्छ ।

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अर्थात,

Ax=B

तसर्थ,

$x=A^{-1}B$..................(i)

जहाँ A^{-1}, A को विपरीत (inverse) म्याट्रिक्स हो ।

यहाँ $|A|=3(-1)-4\times2=-11\neq0$

यदि $|A|=0$ भएमा समीकरण हल हुँदैन र

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

समीकरण (i) मा x, A^{-1} र B को मान प्रतिस्थापन गर्दा,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -5-6 \\ -20+9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -11 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

त्यसकारण, (x,y)=(1,1) हुन्छ ।

३. परियोजना कार्य :

१. तलको सूचीकृत तालिका प्रस्तुत हेर्नुहोस् :

Team	Games Played	Games Won	Games Draw	Games Lost
RCT	6	2	1	3
Police club	6	1	3	2
Marsyandi club	6	4	2	0
Jawalakhel club	6	3	2	1

म्याट्रिक्स शिक्षणमा यसको प्रयोग कसरी गर्न सकिन्छ व्याख्या गर्नुहोस् ।

२. बिल, भौचर, नगदी रसीदहरू, किनमेलका आँकडाहरू म्याट्रिक्स शिक्षणका लागि के कसरी प्रयोग गर्न सकिन्छ भन्ने कुराको व्याख्या गरी एउटा लेख (Article) तयार पार्नुहोस् ।

एकाइ दस
सम्बन्ध र फलन

> Competency : Explain and illustrate relations and functions and their types and use the concepts to teach the secondary students.

१. परिचय

सम्बन्ध र फलनको धारणाभन्दा अगाडि क्रमजोडा र कार्टेसियन गुणनफलको धारणा आउँछन् । पहिलो र दोस्रो सदस्यका रूपमा क्रम निर्धारण भएका जोडा सङ्ख्यालाई क्रम जोडा सङ्ख्याका रूपमा चिनिन्छ । दुई समूहहरूमा पहिलो समूहको सदस्य पहिलो र दोस्रो समूहको सदस्या दोस्रो सदस्यका रूपमा रहेका सबै क्रमजोडा सङ्ख्याहरूका समूहलाई ती दुई समूहहरूको (क्रमशः पहिलो र दोस्रोको) कार्टेसियन गुणनफल भनिन्छ । दुई समूहहरूको कार्टेसियन गुणनफलको उपसमूह नै ती दुई समूहहरूबीचको सम्बन्ध हो । एउटा समूहको प्रत्येक सदस्यलाई अर्को समूहको कुनै एउटामात्र सदस्यसँग कुनै नियमानुसार जोडा मिलाई बनेको क्रमजोडाको समूहलाई फलन भनिन्छ । यसरी विशेष प्रकारको सम्बन्धलाई नै फलन भनिन्छ । यसबाट प्रस्ट हुन्छ कि क्रमजोडा, कार्टेसियन गुणनफल, सम्बन्ध र फलन एक पछि अर्को गरी क्रमशः विकास हुने धारणाहरू हुन् ।

फलनलाई Input र Output को Mapping (अर्थात् Rule) को रूपमा पनि परिभाषित गरिएको पाइन्छ । गणितका हरेक क्षेत्रमा फलनको प्रयोग भएको हुन्छ । गणितीय समस्या समाधानका लागि प्रयोग गरिने सूत्रहरू (जस्तै : परिमिति, क्षेत्रफल, आयतन, ब्याज आदिका सूत्रहरू) फलनका उदाहरणहरू हुन् । माध्यमिक तहको अतिरिक्त गणितको पाठ्यक्रममा बीजगणित यस एकाइअन्तरगत क्रमजोडा, कार्टेसियन गुणनफल, सम्बन्ध, फलन, फलनका प्रकार जस्ता विषयवस्तुहरू र ती विषयवस्तु शिक्षण गर्ने तरिकाहरू प्रस्तुत गरिएका छन् ।

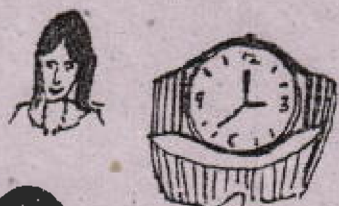
२. विषयवस्तु

२.१ सम्बन्ध (Relation)

२.१.१ क्रमजोडा (Ordered pairs)

शिक्षक पासाङ्ले गणित शिक्षण गर्ने शैली मलाई मनपर्छ । एक दिन म उहाँको कक्षामा प्रवेश गरे । उहाँले तलका चित्रहरू विद्यार्थीहरू सबैले देख्ने ठाउँमा टाँस्नुभयो ।

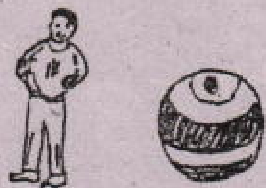
- शिलासँग एउटा घडी छ ।



- कृष्णसँग एउटा खरायो छ ।

- शिवसँग एउटा कार छ ।

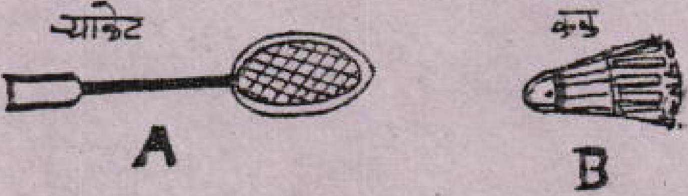
- कैलाशसँग एउटा भकुण्डो छ ।



चित्रमा देखाइएको क्रममा लेखेर एउटा गणितीय वाक्य; जस्तै : शिलाले घडी बनाउन लगाउनुभयो । यहाँ शर्तको रूपमा व्यक्ति पहिला र त्यसपछि वस्तुको क्रममा लेख्न लगाइएको हुँदा (घडी, शिला) लेख्न नमिल्ने कुरामा सबै सहमत भए । सबै विद्यार्थीहरूले सबै चित्रहरूको सोहीअनुसार गणितीय वाक्य बनाए ।

शिक्षक पासाङ्ले एउटा कथा सुनाउनुभयो । वासुदेवका तीन छोराहरू छन् । जेठो विकास, माहिलो कैलाश र कान्छो दिलिप । जेठो, माहिलो र कान्छो छोरा जनाउन वासुदेवले सङ्ख्याहरू १, २ र ३ प्रयोग गर्ने गरेका छन् । वासुदेवले प्रत्येक छोरालाई एउटा ब्याडमिन्टन

र्याकेट र एउटा कर्क किनिदिए छन् । र्याकेटलाई A र कर्कलाई B ले जनाए छन् ।



पासाङ्ले व्यक्तिलाई पहिला र वस्तुलाई पछि राखेर कोस्ठ प्रयोग गरी तलका वाक्यसँग सम्बन्धित क्रमजोडा बनाउन लगाउनुभयो ।

क) विकाससँग र्याकेट छ (.................)

ख) कैलाशसँग कर्क छ (...................)

ग) दिलिपसँग र्याकेट छ (..................)

घ) विकाससँग कर्क छ (.....................)

ङ) कैलाशसँग र्याकेट छ (..................)

च) दिलिपसँग कर्क छ (......................)

उनले फेरि तलका क्रमजोडा दिएर वाक्य लेख्न लगाए ।

क) (1,B), (2,B), (3,B)

ख) (B,1), (B,2), (B,3)

(क) र (ख) मा भएका क्रमजोडाहरू किन फरक छन् भन्ने कुरा पनि छलफल गराउनुहोस् ।

> माथिको उदाहरणमा व्यक्ति र वस्तुलाई जोडाका रूपमा मात्र राख्दा (शिला, घडी) हुन्छ ।
> (शिला, घडी) र (घडी, शिला) को अर्थ उही हुन्छ किन कि दुवै समूहमा उही सदस्याहरू छन् ।
>
> तर त्यसलाई क्रमजोडाका रूपमा राख्दा (शिला, घडी) हुन्छ । यसलाई क्रमजोडा भनिन्छ । यहाँ (शिला, घडी) र (घडी, शिला) को अर्थ उही हुँदैन, फरक हुन्छ ।

यी सम्पूर्ण क्रियाकलापहरूका आधारमा शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीहरूलाई क्रमजोडा सङ्ख्याको परिभाषा लेख्न लगाउनुभयो । उनीहरूले लेखेको परिभाषालाई आफूले दिएको परिभाषा (तल दिइएको) सँग दाँज्न लगाउनुहोस् ।

जोडा सङ्ख्या (a,b) जसमा जहिले पनि a पहिलो र b दोस्रो सदस्य हो भनी क्रम निर्धारण भएको छ भने यसलाई क्रमजोडा सङ्ख्या भनिन्छ । निर्देशांक ज्यामितिको क्रमजोडा (a,b) मा a ले x-निर्देशाङ्क र b ले y-निर्देशाङ्क दिन्छ । क्रमजोडा सङ्ख्यामा क्रमको महत्व हुन्छ ।

उदाहरणका लागि गणितीय खुला वाक्य

$5x+8y=34$ मा $x=2$ र $y=3$ हुँदा वाक्य सत्य हुन्छ । त्यसैले खुला वाक्य $5x+8y=34$ लाई सत्य बनाउने एउटा क्रमजोडा (2,3) हो । यसमा क्रम उल्टो पारी प्रतिस्थापन गर्दा अर्थात $x=3$ र $y=2$ राख्दा वाक्य असत्य हुन्छ । त्यसैले (3,2) ले $5x+8y=34$ लाई सत्य बनाउँदैन । यसरी

जोडा सङ्ख्यामा क्रमको खास अर्थ रहन्छ भने त्यो क्रमजोडा सङ्ख्या हुन्छ । यदि क्रमजोडा (x,y)=(a,b) छ भने यहाँ x=a र y=b हुन्छ ।

क्रमजोडालाई यसरी पनि परिभाषित गरिएको पाइन्छ ।

(a,b)={{a}, {a,b}}

अर्थात (a,b) एउटा समूह हो जसका सदस्यहरू {a} र {a,b} छन् ।

२.१.२ कार्टेसियन गुणनफल (Cartesian product)

शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीहरूलाई दुईओटा समूहहरू A={1,2} र B={3,4} दिनुभयो । अनि A बाट पहिलो सदस्य र B बाट दोस्रो सदस्य लिएर बन्नसक्ने जति क्रमजोडाहरूको समूह बनाउन लगाए । त्यस समूहलाई A×B ले जनाउन लगाउनुभयो । त्यसरी नै समूह B बाट पहिलो र समूह A बाट दोस्रो सदस्य लिएर बन्ने क्रमजोडाहरूको समूह पनि बनाउन लगाउनुहोस् र त्यसलाई B×A ले जनाउन लगाउनुभयो । यसरी निर्मित समूह A×B तथा B×A लाई कार्टेसियन गुणनफल भनिन्छ, भन्ने कुरा छलफलबाट प्रस्ट पार्नुभयो । उनले विद्यार्थीहरूलाई कार्टेसियन गुणनफलको परिभाषा तथा कार्टेसियन गुणनफलको परिभाषा तथा कार्टेसियन गुणनफल पत्ता लगाउने विभिन्न तरिकाहरू प्रस्तुत गर्नु भयो ।

दुईओटा समूह A र B छन् । समूह A को सदस्यलाई पहिलो सदस्य र समूह B को सदस्यलाई दोस्रो सदस्यका रूपमा रहने सम्पूर्ण क्रमजोडाहरूको समूहलाई A र B को कार्टेसियन गुणनफललाई सङ्केतमा A×B (अर्थात् A क्रश B) ले जनाइन्छ र यस प्रकार लेखिन्छ ।

$A \times B = \{(x,y)/x \in A, y \in B\}$

कार्टेसियन गुणनफललाई जनाउने तरिकाहरू यस प्रकार छन् :

क) तालिकाबाट

ख) लेखाचित्रबाट

ग) मिलान चित्रबाट

घ) रूख चित्र (Tree diagram) बाट

उदाहरणका लागि

P={1,2} र

Q={a,b,c} लिऔं ।

अब, P×Q विभिन्न तरिकाबाट पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

क) तालिकाबाट

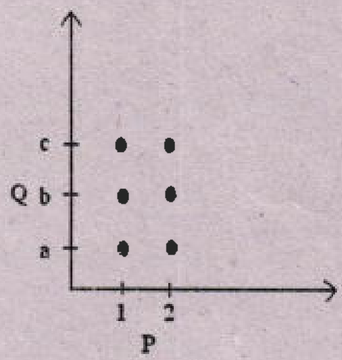
<table>
<tr><td></td><td colspan="4">Q</td></tr>
<tr><td rowspan="3">P</td><td>×</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td>1</td><td>(1,a)</td><td>(1,b)</td><td>(1,c)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>(2,a)</td><td>(2,b)</td><td>(2,c)</td></tr>
</table>

$P \times Q = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$

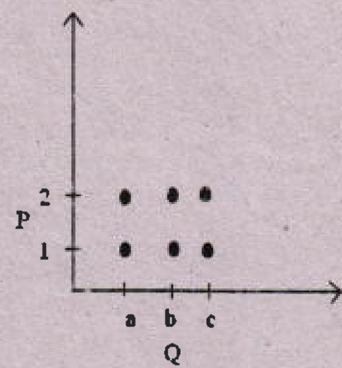
	P			
	×	a	b	c
Q	1	(a,1)	(b,1)	(c,1)
	2	(a,2)	(b,2)	(c,2)

$P \times Q = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$

ख) लेखाचित्रबाट

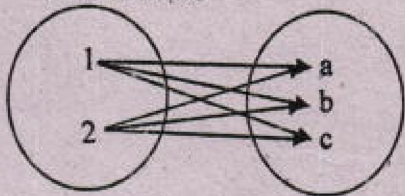


P×Q को लेखाचित्र

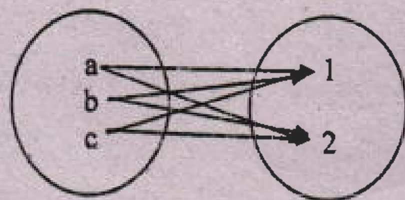


Q×P को लेखाचित्र

ग) मिलानचित्रबाट



P×Q



Q×P

घ) Tree diagram बाट

Q

P
- 1 —
  - a ---> (1,a)
  - b ---> (1,b)
  - c ---> (1,c)
- 2—
  - a ---> (2,a)
  - b ---> (2,b)
  - c ---> (2,c)

P×Q को Tree diagram

२.१.३ सम्बन्धको परिचय

शिक्षक पासाङ्ले दुईओटा समूहहरू

A={नेपाल, भारत, चीन} र

B={काठमाडौं, दिल्ली, बेइजिङ} दिनुभयो र विद्यार्थीहरूलाई सो समूहको कार्टेसियन गुणनफल A×B निकाल्न लगाउनुभयो । विद्यार्थीहरूले यस प्रकार तालिकामा राखेर देखाए ।

		B		
		काठमाडौं	दिल्ली	बेइजिङ
A	नेपाल	(नेपाल, काठमाडौं)	(नेपाल, दिल्ली)	(नेपाल, बेइजिङ)
	भारत	(भारत, काठमाडौं)	(भारत, दिल्ली)	(भारत, बेइजिङ)
	चीन	(चीन, काठमाडौं)	(चीन, दिल्ली)	(चीन, बेइजिङ)

अनि उक्त कार्टेसियन गुणनफल A×B को एउटा यस्तो उपसमूह (मानौं R) पत्ता लगाउन दिइयो जसले देश र सो को सम्बन्धित राजधानी जनाओस् । विद्यार्थीहरूले यस प्रकार लेखे ।

R={(नेपाल, काठमाडौं), (भारत, दिल्ली), (चीन, बेइजिङ)}

यहाँ उपसमूह R ले समूह A बाट B मा कुन सम्बन्ध जनाउँछ भन्ने कुरामा छलफल भए । छलफलबाट निष्कर्षहरू निकालिए ।

यहाँ सम्बन्ध R ले "को राजधानी हो" भन्ने सम्बन्ध जनाएको छ । सम्बन्धलाई यसरी परिभाषित गर्न सकिन्छ ।

यदि A र B दुई समूहहरू हुन भने कार्टेसियन गुणनफल A×B को उपसमूह नै सम्बन्ध R हो । अर्थात $R \subseteq A \times B$

माथिको उदाहरणमा,

R={(x,y)/x को राजधानी y हो} भनेर पनि जनाउँन सकिन्छ ।

सम्बन्धलाई जनाउने तरिकाहरू यस प्रकारका छन् :

क) तालिकाद्वारा

ख) लेखाचित्रद्वारा

ग) मिलनचित्रद्वारा

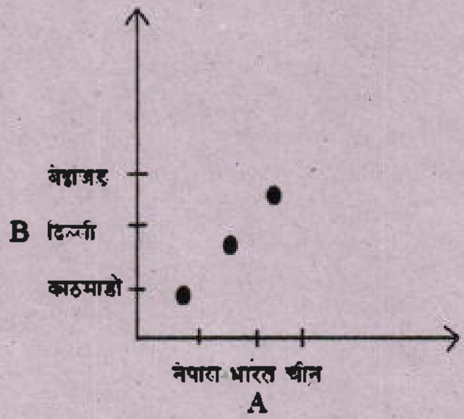
घ) क्रमजोडाको समूहद्वारा

ङ) वर्णन विधिद्वारा

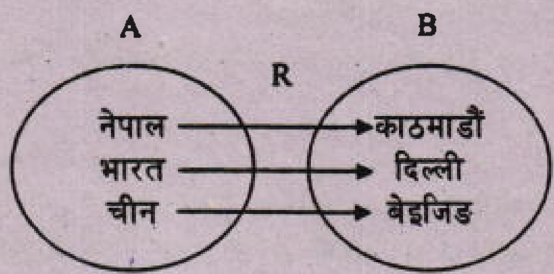
क) तालिकाद्वारा

A	नेपाल	भारत	चीन
B	काठमाडौं	दिल्ली	बेइजिङ

ख) लेखाचित्रद्वारा



ग) मिलानचित्रद्वारा



घ) क्रमजोडाको समूहद्वारा

R={(नेपाल, काठमाडौं), (भारत, दिल्ली), (चीन, बेइजिङ)}

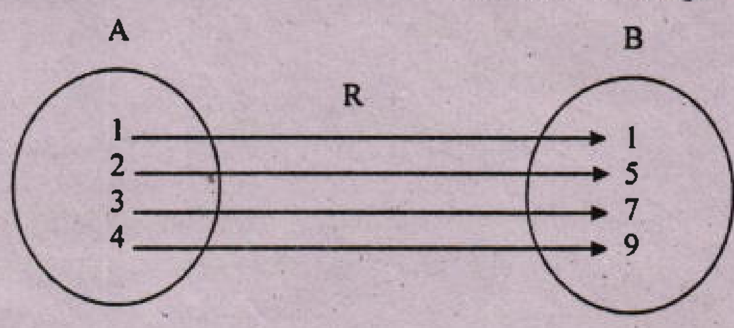
ङ) वर्णन (अर्थात समूह निर्माण) विधिद्वारा

शिक्षक पासाङ्ले अन्य उदाहरणहरू पनि दिए ।

A={1,2,3,4}

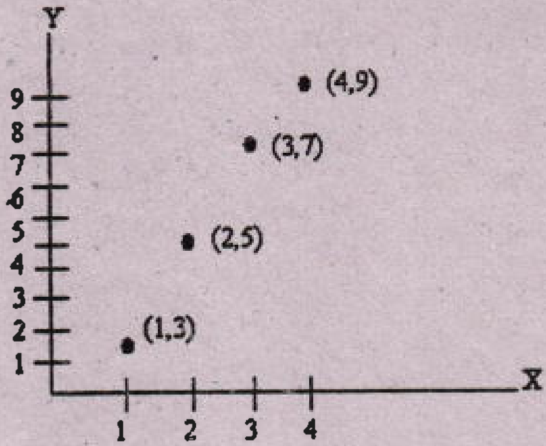
B={1,5,7,9}

बीचको सम्बन्ध R={(x,y)/y=2x+1} लाई विभिन्न तरिकाले विद्यार्थीहरूलाई प्रस्तुत गर्न लगाए ।



x	1	2	3	4

y	1	5	7	9



R={(1,1), (2,5), (3,7), (4,9)}

२.१.४ सम्बन्धको क्षेत्र (Domain) र विस्तार क्षेत्र (Range)

शिक्षक पासाङ्ले सम्बन्धको क्षेत्र र विस्तार क्षेत्रका बारेमा छलफलका लागि माथि कै उदाहरणलाई अगाडि सार्नुभयो ।

A={नेपाल, भारत, चीन} र

B={काठमाडौं, दिल्ली, बेइजिङ} को सम्बन्ध R={(x,y)/x को राजधानी y हो} मा समूह A मा भएका सदस्यहरू {नेपाल, भारत, चीन} ले सम्बन्धको क्षेत्र र समूह B मा भएका सदस्यहरू {काठमाडौं, दिल्ली, बेइजिङ} ले सम्बन्धको विस्तार क्षेत्र जनाउँछन् ।

यसलाई यदि R={x,y)/x को राजधानी y हो }भनेर जनाइयो भने X={x∈A} लाई क्षेत्र र Y={y∈B} लाई विस्तार क्षेत्र भनिन्छ ।

यदि समूह A र B को सम्बन्धलाई R ले जनाइयो भने R का क्रमजोडाको पहिलो सदस्य लिएर बनेको समूह A लाई R को क्षेत्र र क्रमजोडाको दोस्रो सदस्य लिएर बनेको समूह B लाई R को विस्तार क्षेत्र भनिन्छ । विद्यार्थीहरू सम्बन्धको क्षेत्र र विस्तार क्षेत्र उदाहरणसहित व्याख्या गर्न सक्षम भए ।

२.२ फलन (Function)

२.२.१ फलनको धारणा

शिक्षक पासाङ्ले बोर्डमा दुईओटा समूहरू

A={-1,0,1} र

B={1,0} लेख्नुभयो । विद्यार्थीहरूलाई चार समूहमा विभाजन गरी एक समूहले एउटा कार्य गर्ने गरी A बाट B मा परिभाषित भएका तलका सम्बन्धहरू निर्माण गरी मिलान चित्र बनाउन लगाउनुभयो ।

सम्बन्ध

f_1= "को वर्ग हो" ।

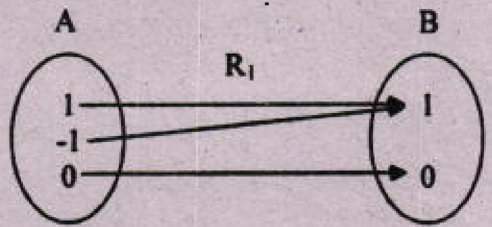
f_2= "को वर्गमूल हो" ।

f_3= "भन्दा सानो वा बराबर छ" ।

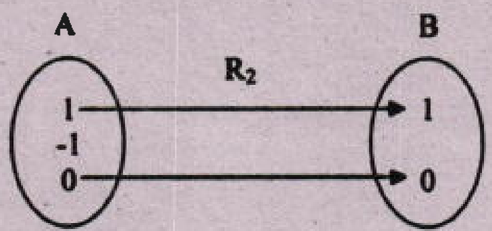
f_4= "भन्दा ठूलो वा बराबर छ" ।

विद्यार्थीहरूको समूह नेतालाई आफ्नो समूहकार्य शिक्षण पाटीमा प्रस्तुत गर्न लगाउनुभयो ।

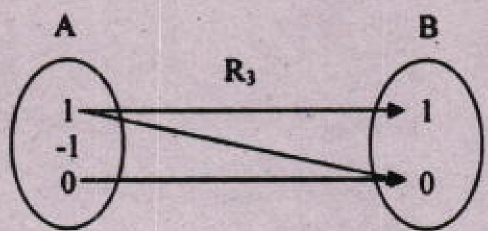
$R_1=\{(1,1), (0,0), (-1,1)\}$



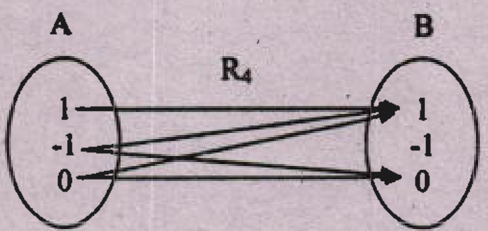
$R_2=\{(1,1), (0,0)\}$



$R_3=\{(1,0), (1,1), (0,0)\}$



$R_4=\{(1,1), (-1,1), (0,1), (-1,0)\}$



त्यसपछि मिलान चिन्हका आधारमा यी सम्बन्धहरूका बीचका भिन्नता तथा समानता बारे, छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्न लगाउनुभयो ।

क) सम्बन्ध R_1 ले समूह A का प्रत्येक सदस्यलाई समूह B को एउटा मात्र सदस्यसँग जोडा मिलाएको छ ।

ख) सम्बन्ध R_2 ले समूह A का दुईओटा सदस्यलाई समूह B का दुईओटा फरकफरक सदस्यसँग जोडा मिलाएको छ । तर समूह A को एउटा सदस्य -1 को समूह B मा जोडा छैन ।

ग) सम्बन्ध R_3 ले समूह A का दुईओटा सदस्यलाई समूह B मा एक वा एकभन्दा बढी सदस्यसँग जोडा मिलाएको छ ।

घ) सम्बन्ध R_4 ले समूह A का सबै सदस्यलाई समूह B मा एकभन्दा बढी सदस्यसँग जोडा मिलाएको छ ।

माथिका सम्बन्धहरूमा R_1 मात्र फलन हो र अरू होइन भने फलनको परिभाषा के हुनसक्छ भन्ने बारे शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीहरूसँग छलफल गर्नुभयो । विद्यार्थीहरूलाई फलानको परिभाषा लेख्न लगाउनुभयो । अनि आफूले दिएको परिभाषासँग दाँज्न लगाउनुभयो ।

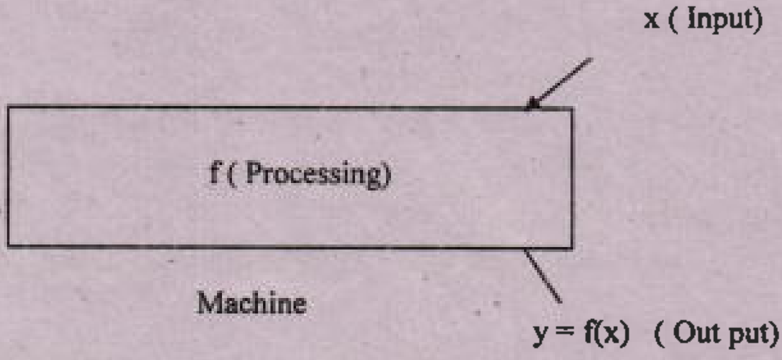
यदि समूहहरू A र B खाली समूह होइन भने समूह A का प्रत्येक सदस्यलाई समूह B को कुनै एउटा मात्र सदस्यसँग कुनै निश्चित नियमअनुसार जोडा मिलाई बनेको क्रमजोडाको समूहलाई फलन भनिन्छ । अर्थात $f=\{(x,y)/x\in A, y\in B\}$ भए f एउटा फलन हो । समूह A बाट B मा परिभाषित फलनलाई $f:A\rightarrow B$ । अर्थात $A \xrightarrow{f} B$ लेख्ने चलन छ ।

माथिको उदाहरणमा f_1 फलन हो । $f_1:A\rightarrow B$ लाई यसरी परिभाषित गर्न सकिन्छ । $f=\{(x,y)/x\in A, y\in B$ र $y=x^2\}$ यसरी विशेष प्रकारको सम्बन्ध नै फलन हो । अर्थात कुनै पनि सम्बन्धको पहिलो समूहका प्रत्येक सदस्यको दोस्रो समूहको कुनै सदस्यसँग सम्बन्ध भएमा त्यस सम्बन्धलाई फलन भनिन्छ ।

समूह B को सदस्य Y सँग समूह A को सदस्य x को मिलान भएको फलनलाई f(x) ले जनाइन्छ ।

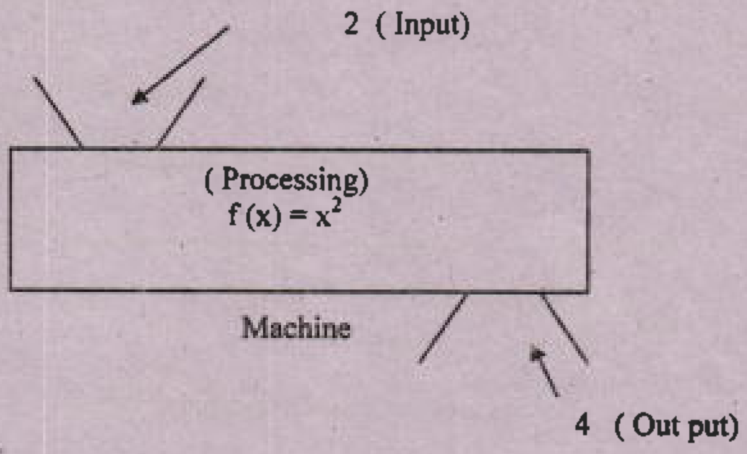
अर्थात y=f(x) लेख्ने चलन छ ।

फलनलाई एउटा यन्त्र (Mechine) का रूपमा पनि लिन सकिन्छ ।

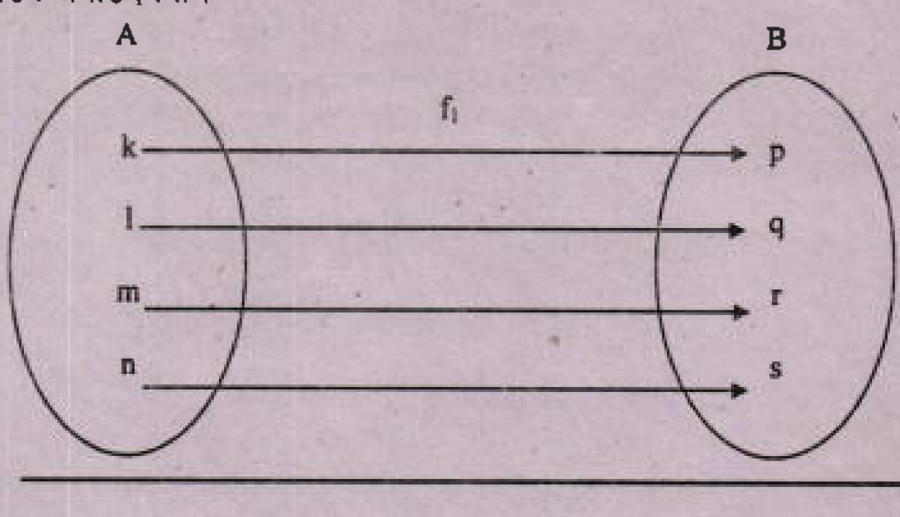


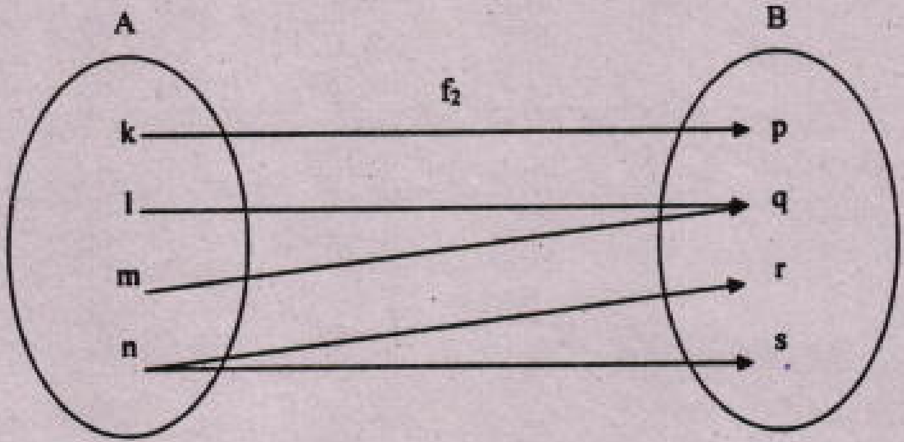
कुनै एउटा सङ्ख्यालाई राख्दा (Input) गर्दा अर्को सङ्ख्या Output दिने यन्त्र (Machine) नै फलन हो ।

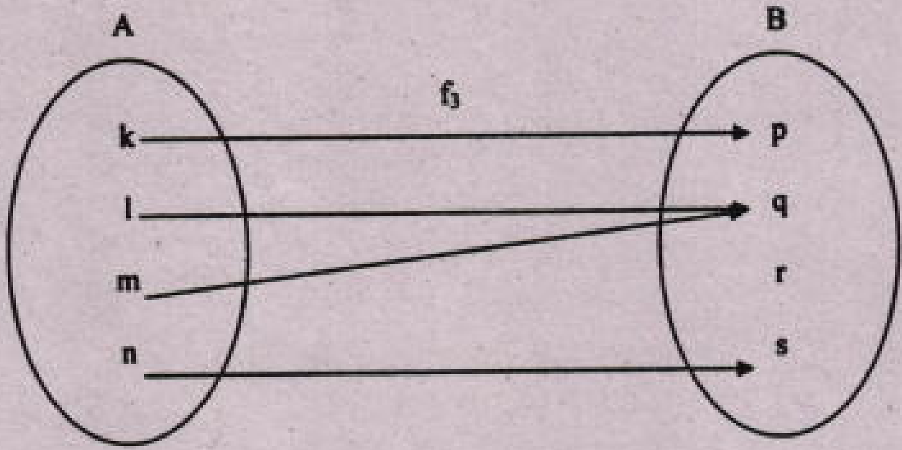
उदाहरणका लागि $y=f(x)=x^2$ लाई लिन सकिन्छ ।

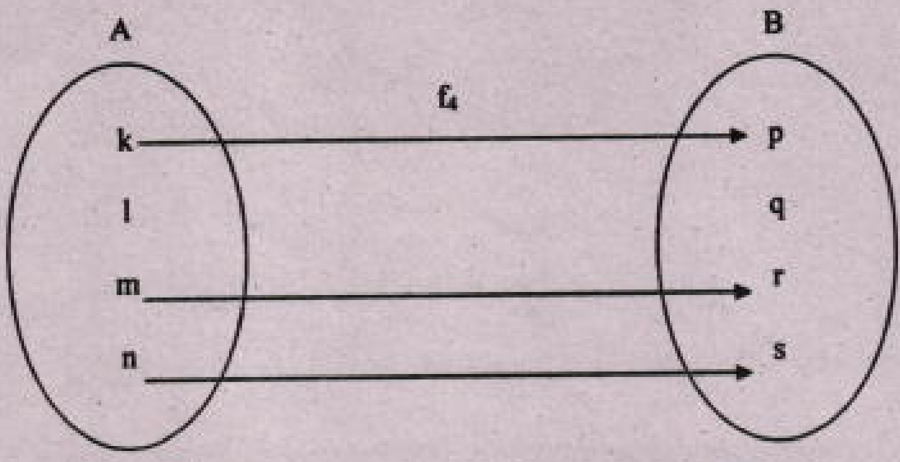


शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीहरूलाई तलका मिलान चित्र बोर्डमा लेखेर कुनकुन फलन हुन् छुट्याउन लगाउनुभयो ।




A
B
f2
k
l
m
n
p
q
r
s


A
B
f3
k
l
m
n
p
q
r
s


A
B
f4
k
l
m
n
p
q
r
s

(यहाँ f_1 र f_3 फलन हुन्, अरू होइनन्)

शिक्षक पासाङ्ले दुईओटा समूहहरू

A={1,2,3,4} र

B={1,4,9,16,25} दिएर एउटा फलन f लाई यसरी परिभाषित गर्न लगाउनुभयो f= को वर्ग हो । यस सम्बन्धलाई तलका तरिकाहरूले विद्यार्थीहरूलाई व्यक्त गर्न लगाउनुभयो ।

क) क्रमजोडाद्वारा

ख) मिलान चित्रद्वारा

ग) तालिकाद्वारा

घ) लेखाचित्रद्वारा

ङ) समूह निर्माण विधिद्वारा

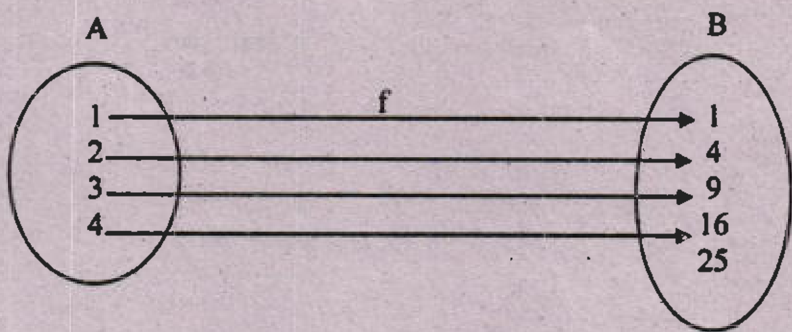
च) समीकरण (सूत्र)द्वारा

विद्यार्थीहरूले शिक्षकको सहयोगबाट यसप्रकार व्यक्त गरे ।

क) क्रमजोडाद्वारा

f={(1,1), (2,4), (3,9), (4,16)}

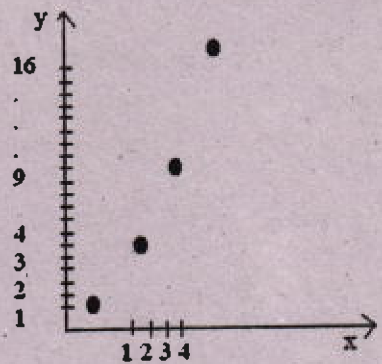
ख) मिलान चित्रद्वारा



ग) तालिकाद्वारा

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

घ) लेखा चित्रद्वारा



ङ) समूह निर्माण विधिद्वारा

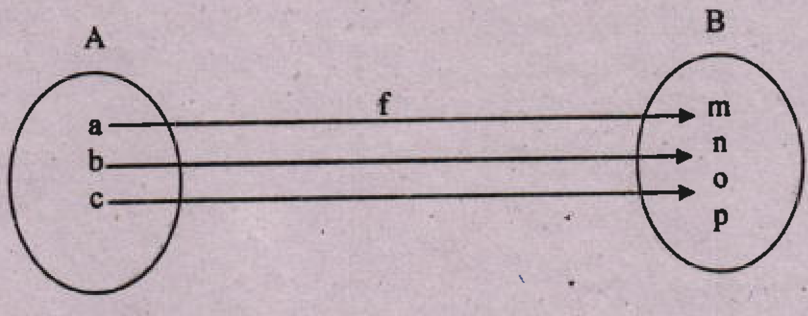
$f=\{(x,y)/x \in A, y \in B, y=x^2\}$

च) समीकरण (सूत्र) द्वारा

$f(x)=x^2$ अथवा $y=x^2$

२.२.२ फलनको क्षेत्र (Domain), सहक्षेत्र (Co-domain), प्रतिबिम्ब (Image), पूर्व प्रतिबिम्ब (Pre-image) र विस्तार क्षेत्र (Range)

शिक्षक पासाङ्ले फलन f:A→B लाई तलको चित्रद्वारा जनाउनुभयो ।



तलका शब्दहरूको अर्थ उदाहरणसहित दिँदै जानुभयो ।

फलन f:A→B मा f को क्षेत्र A हो भने f को सहक्षेत्र B हो । a,b र c क्रमशः m,n र o का पूर्व प्रतिबिम्ब हुन भने m,n र o क्रमशः a,b,c का प्रतिबिम्ब हुन । यहाँ p को पूर्व प्रतिबिम्ब छैन । A का सम्पूर्ण सदस्यहरूको प्रतिबिम्बहरूको समूह अर्थात {m,n,o} नै f को विस्तार क्षेत्र हो ।

यसरी, यदि f:A→B एउटा फलन हो भने A लाई f को क्षेत्र भनिन्छ र B लाई f को सहक्षेत्र भनिन्छ ।

यदि फलन f:A→B मा A को सदस्य x लाई B को सदस्य y सँग जोडा मिलाइएको छ भने f(x)=y हुन्छ । y अर्थात् f(x) लाई x को प्रतिबिम्ब र x लाई y को पूर्व प्रतिबिम्ब भनिन्छ । (अर्थात A को कुनै पनि सदस्यको एकभन्दा बढी प्रतिबिम्ब हुँदैन तर A का एकभन्दा बढी सदस्यहरूको एउटै प्रतिबिम्ब हुन पनि सक्दछ । B का कुनै सदस्यको पूर्व प्रतिबिम्ब नहुन पनि सक्छ) ।

फलन f:A→B मा A का सम्पूर्ण सदस्यहरूको प्रतिबिम्बहरूको समूहलाई फलन f को विस्तार क्षेत्र भनिन्छ । f को विस्तार क्षेत्रलाई f(A) ले जनाइन्छ । विस्तार क्षेत्र सधैं सहक्षेत्रको उपसमूह हुन्छ ।

शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीलाई

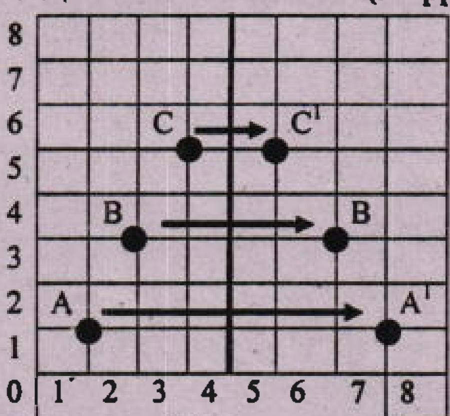
A={-1,0,1,2} र

B={0,1,2,3,4} मा

f:A→B र

$f(x)=x^2$ भए f को क्षेत्र, सहक्षेत्र विस्तार क्षेत्र 2 को प्रतिबिम्ब र 1 को पूर्व प्रतिबिम्ब केके हुन्छन् पत्ता लगाउन दिनुभयो ।

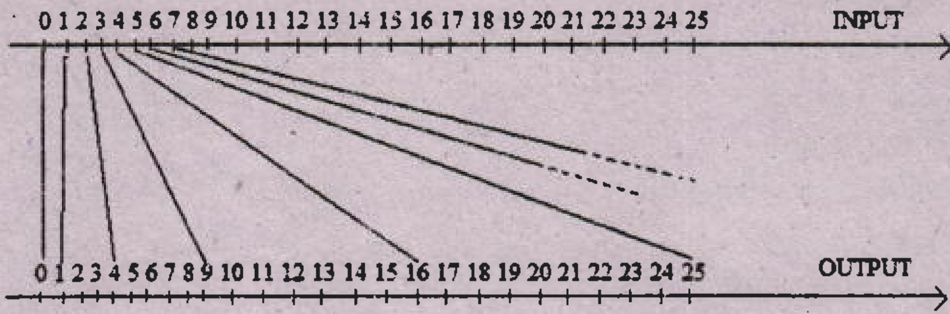
२.२.३ मिलान फलनको रूपमा (Mapping as function)



शिक्षक पासाङ्ले मिलान र फलनको धारणा सम्बन्धमा विद्यार्थीहरूसँग छलफल गर्नुभयो ।

यो चित्रमा विन्दु (Points) हरू र सिधा रेखा x=4 बाट मिलान (Mapping) गर्दा प्राप्त प्रतिबिम्ब (Images) हरू देखाइएको छ । वास्तवमा मिलान भनेको Input र Output भएको एउटा यन्त्र (Machine) जस्तै हो । बिन्दुहरू Inputs हुन् भने प्रतिबिम्बहरू Output हुन् ।

मिलानको धारणामा Input र Output को रूपमा बिन्दुहरूको सट्टा सङ्ख्याहरू पनि लिन सकिन्छ । यस प्रकारको मिलानलाई देखाउन बाण चिन्हसहितको दुईओटा समानान्तर सङ्ख्या रेखालाई प्रयोग गर्न सकिन्छ । सङ्ख्या रेखाको एउटा स्केलमा Input र अर्को स्केलमा Output अङ्कित गरी बाणचिन्हले मिलान गर्न सकिन्छ ।



माथिको चित्रमा देखाइएको मिलान यस प्रकार छ ।

$0 \rightarrow 0$

$1 \rightarrow 1$

$2 \rightarrow 4$

$3 \rightarrow 9$

.

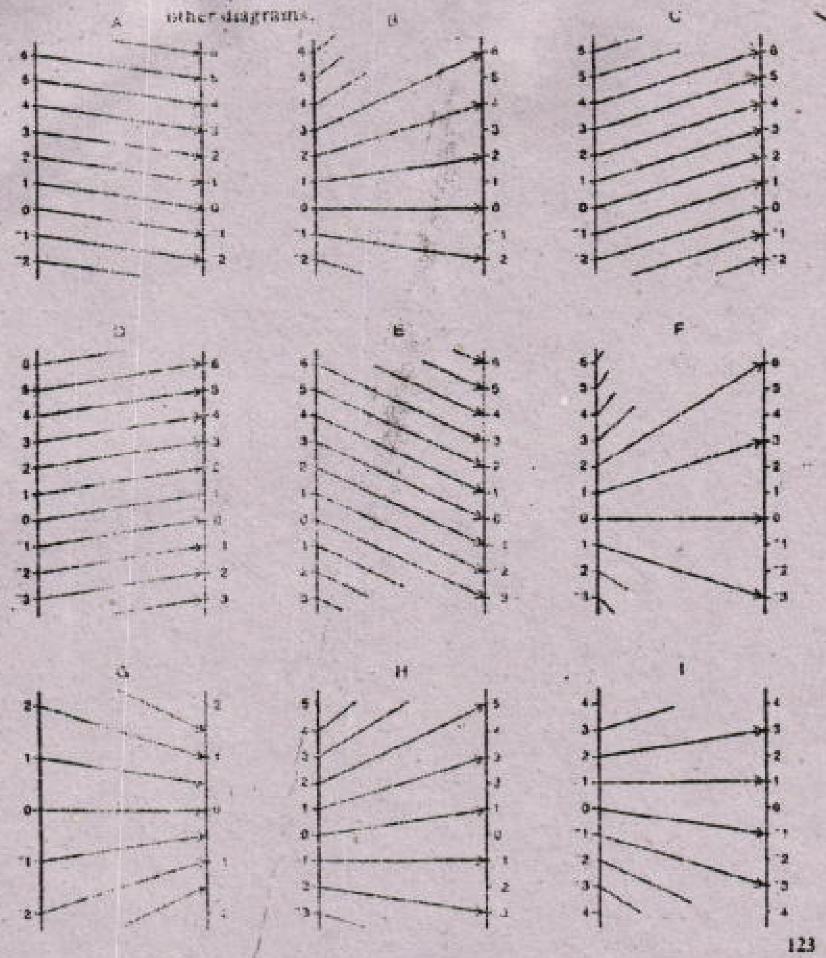
.

$x \rightarrow x^2$

Input स्केलबाट जाने सबै बाणचिन्हलाई देखाउन सम्भव हुँदैन, त्यसैले विच्छेदित रेखा (Broken line) प्रयोग गरिन्छ ।

यसरी फलनलाई मिलानको रूपमा परिभाषित गर्न सकिन्छ जसमा Input र Output को रूपमा सङ्ख्या हुन्छन् । माथिको उदाहरणमा दिइएको मिलान $x \rightarrow x^2$ एउटा फलन हो ।

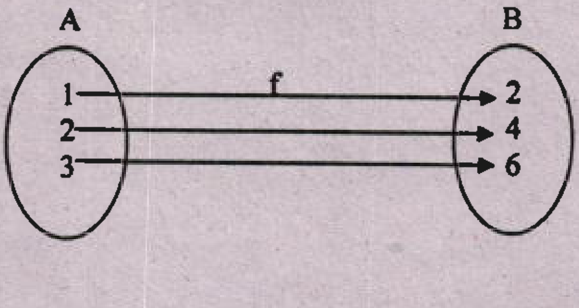
शिक्षक पासाङ्ले तलका चित्रहरू दिएर विद्यार्थीहरूलाई ती चित्रहरू (वाण चिन्ह) ले जनाउने फलनहरू लेख्न लगाउनुभयो ।



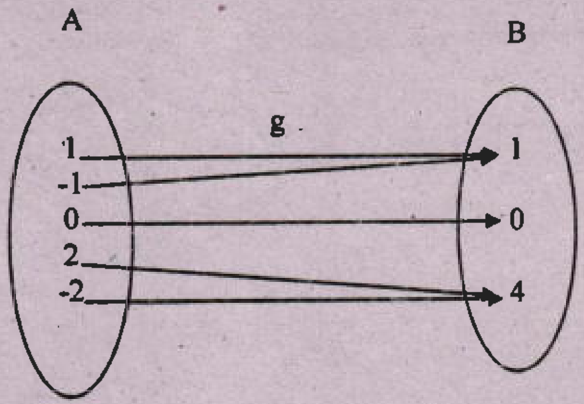
२.४ फलनको किसिम

शिक्षक पासाङ्ले कार्डबोर्डमा तलका मिलान चित्रहरू देखाउनुभयो । विद्यार्थीहरूलाई तिनीहरूबीचको समानता तथा फरकहरू छुट्याउन लगाउनुभयो ।

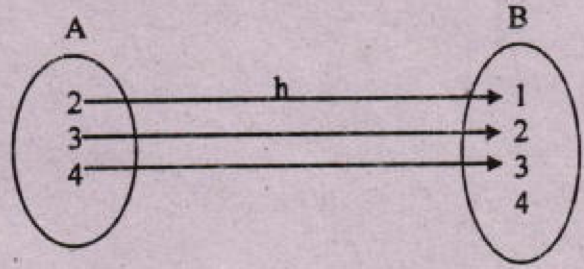
क)



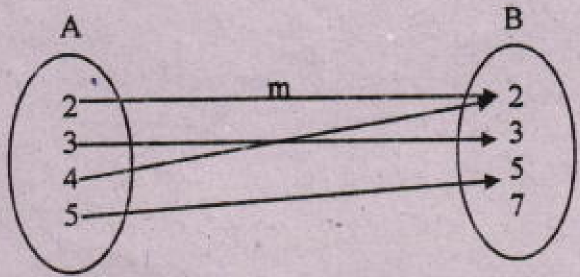
ख)



ग)



घ)



क) फलन f ले समूह A का सदस्यको दुई गुणा हुने गरी समूह B मा जोडा मिलाएको छ । समूह A का फरकफरक सदस्यको लागि समूह B मा फरकफरक प्रतिबिम्ब छ । त्यसैले f एक फलन हो । सहक्षेत्र B को सदस्य सङ्ख्या र f को विस्तार क्षेत्रको सदस्य सङ्ख्या बराबर छ । त्यसैले यो एक सम्पूर्ण फलन हो ।

ख) फलन g मा एकभन्दा बढी सदस्यहरूका लागि एउटै प्रतिबिम्बन छ । त्यसैले यो बहुएक फलन हो । यसका सहक्षेत्र र विस्तार क्षेत्रका सदस्य सङ्ख्या बराबर छ । त्यसैले यो बहुएक सम्पूर्ण फलन हो ।

ग) फलन h मा सहक्षेत्र B को सदस्य सङ्ख्या, विस्तार क्षेत्रका सदस्य सङ्ख्याभन्दा बढी भएकोले h अपूर्ण फलन हो । यसमा A का फरकफरक सदस्यका लागि B मा फरकफरक प्रतिबिम्ब भएकाले यो एकएक अपूर्ण फलन हो ।

घ) फलन m मा एकभन्दा बढी सदस्यहरूका लागि एउटै प्रतिबिम्ब छ । सहक्षेत्रको सदस्य सङ्ख्या विस्तार क्षेत्रको सदस्य सङ्ख्याभन्दा बढी छ । त्यसैले यो बहुएक अपूर्ण फलन हो ।

निष्कर्ष :

१. सम्पूर्ण फलन :

यदि फलन f:A→B को विस्तार क्षेत्र र सहक्षेत्रको सदस्य सङ्ख्या बराबर छ भने f लाई सम्पूर्ण फलन भनिन्छ ।

२. अर्थपूर्ण फलन :

यदि f:A→B को सहक्षेत्रको सदस्य सङ्ख्या विस्तार क्षेत्रको सदस्य सङ्ख्याभन्दा बढी छ अर्थात विस्तार क्षेत्र सहक्षेत्रको वास्तविक उपसमूह छ) भने f लाई अपूर्ण फलन भनिन्छ ।

३. एकएक फलन :

यदि फलन f:A→B मा A का फरकफरक सदस्यका लागि B मा फरकफरक प्रतिबिम्ब छ भने f लाई एकएक फलन भनिन्छ । एकएक फलन दुई प्रकारको हुन्छ ।

- एकएक सम्पूर्ण फलन ।
- एकएक अपूर्ण फलन ।

४. बहुएक फलन :

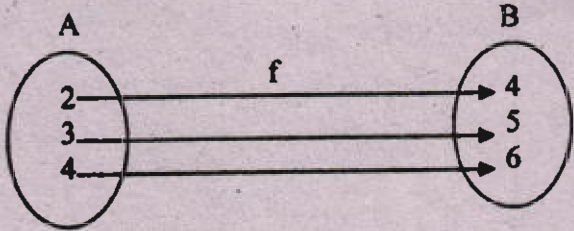
यदि f:A→B मा A का दुईदुईभन्दा बढी सदस्यहरूको प्रतिबिम्ब एउटै छ । (अर्थात, B का एउटा सदस्यको दुई वा दुईभन्दा बढी पूर्ण प्रतिबिम्ब छ) भने f लाई बहुएक फलन भनिन्छ । बहुएक फलन पनि दुई प्रकारको हुन्छ ।

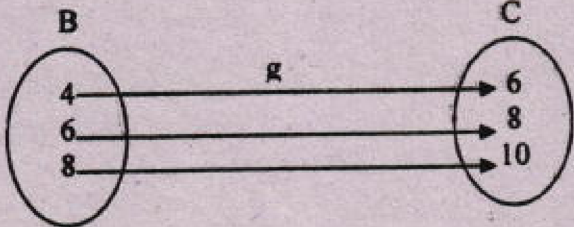
- बहुएक सम्पूर्ण फलन ।
- बहुएक अपूर्ण फलन ।

शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीहरूलाई विभिन्न किसिमका फलनहरू (मिलान चित्रद्वारा) दिएर कुन किसिमको फलन हो भनेर छुट्याउन लगाउनुभयो ।

२.५ संयुक्त फलन (Composite function)

शिक्षक पासाङ्ले तल दिइएअनुसारका दुईओटा फलनको चित्र विद्यार्थीहरूलाई देखाउनुभयो ।

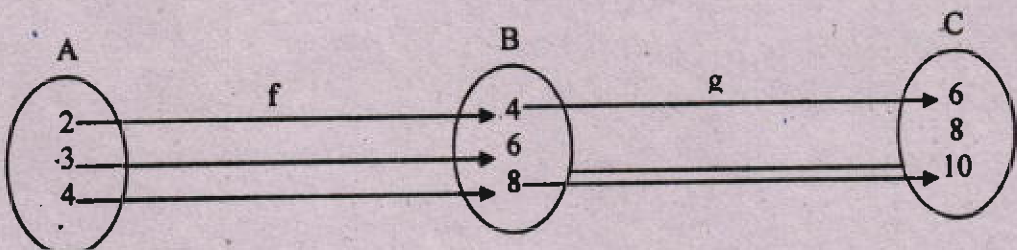




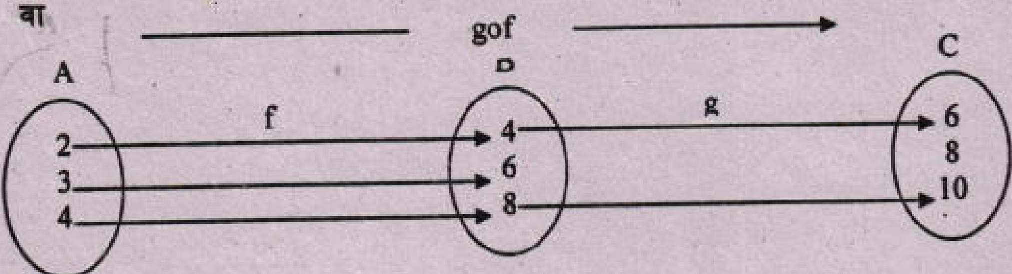
यहाँ f:A→B ले 2 लाई 4 सँग जोडा मिलाएको छ । यसलाई f(2)=4 ले जनाइन्छ । त्यसैगरी g:B→C ले 4 लाई 6 सँग जोडा मिलाएको छ । यसलाई g(4)=6 लेख्न सकिन्छ । यी दुई नतिजाहरूलाई मिलाउँदा,

6=g(4)=gf(2)

यहाँ gf फलन f र g को संयुक्त फलन हो । जसले 2 लाई एकैचोटी 6 सँग जोडा मिलाउँछ । gf फलनलाई मिलान चित्रबाट यसरी जनाउन सकिन्छ ।



वा



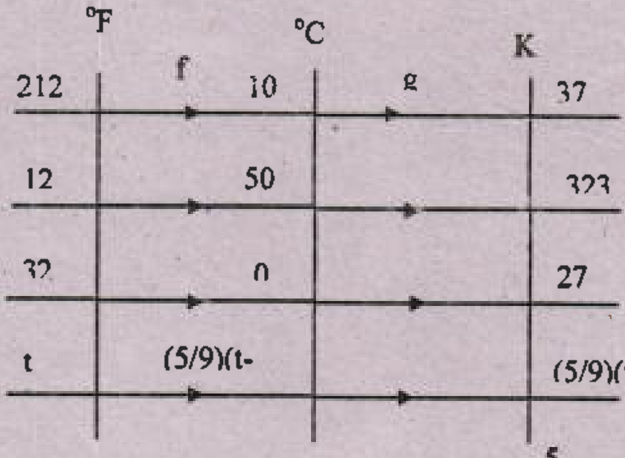
यदि f:A→B र g:B→C छ भने
(gof):A→C लाई यसरी परिभाषित गरिन्छ ।
$(gof)x=g(f(x))$
अथवा
$gf=g(f(x))$
यसलाई फलन f र g का संयुक्त फलन भनिन्छ ।

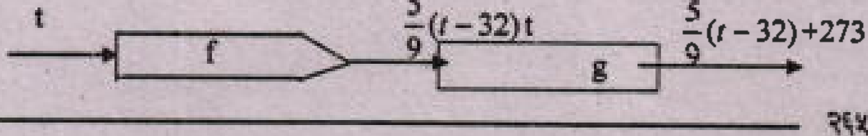
शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीहरूलाई तलका फलनहरू दिएर संयुक्त फलन निकाल्न लगाउनुभयो ।
यदि $f(x)=x^3$
$g(x)=x+2$ भए
$gf(x)$ कति हुन्छ ?
$fg(x)$ कति हुन्छ ?

उहाँले संयुक्त फलनका अन्य उदाहरणहरू पनि दिनुभयो। तापक्रमलाई सामान्तया सेल्सीयस ग्रेड अथवा फेरेनहाइट एकाईमा नाप्ने गरिन्छ । पानी $32^\circ F$ अथवा 0° मा जम्छ । तापक्रम t डिग्रीलाई फेरेनहाइटबाट सेल्सीयसमा बदल्नका लागि तलको फलन f को प्रयोग गरिन्छ ।

$$f(t)=\frac{5}{9}(t-32)$$

त्यसैगरी $-273^\circ C$ सबभन्दा कम तापक्रम हो र यसलाई केल्भीन एकाइमा OK ले जनाइन्छ । सेल्सीयसबाट केल्भीनमा बदल्नका लागि तलको फलन g को प्रयोग गरिन्छ ।
$g(t)=t+273$
अब फरेनहाइट (F) लाई सोझै केल्भीन (K) एकाइमा बदल्नका लागि तलको वाण ग्राफ (Arrow graph) अथवा फ्लोचार्ट (Flow diagram) प्रयोग गर्न सकिन्छ ।





यो अन्तिमको फलन नै f र g को संयुक्त फलन हो ।

अर्थात,

$gf=\frac{5}{9}(t-32)+273$ फलन प्रयोग गरी फेरेनहाइटलाई केल्भीनमा बदल्न सकिन्छ ।

२.२.६ विपरीत फलन (Inverse function)

शिक्षक पासाङ्ले दुईओटा फलनहरू दिएर क्षेत्र र विस्तार क्षेत्र तुलना गर्न लगाउनुभयो ।

$f(x)=x^2+1$, क्षेत्र A={1,2,3,4}, विस्तार क्षेत्र B={2,5,10,17}

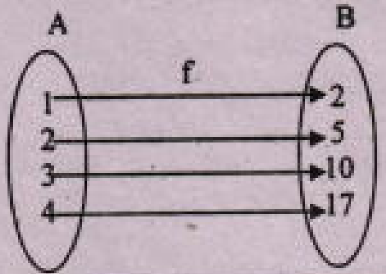
$g(x)=\sqrt{x-1}$, क्षेत्र B={2,5,10,17}, विस्तार क्षेत्र B={1,2,3,4}

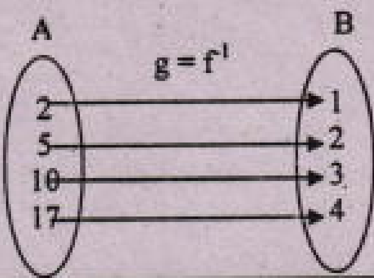
f र g लाई क्रमजोडा व्यक्त गर्दा

f={(1,2), (2,5), (3,10), (4,17)}

g={(2,1), (5,2), (10,3), (17,4)}

यसबाट f र g लाई क्षेत्र र विस्तार क्षेत्र साटासाट गरी बनेका फलनहरू हुन भन्ने कुरा स्पष्ट हुन्छ । यहाँ f र g एक अर्काका बिपरीत फलन हुन् ।



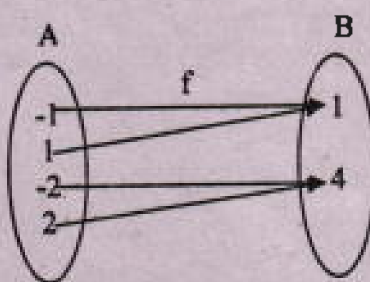


यदि दिइएको फलन f छ भने f को क्षेत्र र विस्तार क्षेत्र साटासाट गरी बनेको फलनलाई f को विपरीत फलन भनिन्छ । यदि f को विपरीत फलन g छ भने यसलाई $g=f^{-1}$ ले जनाइन्छ ।

अर्थात्,

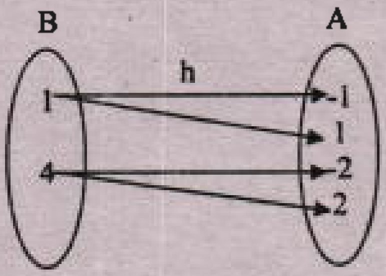
$f:A\rightarrow B$ को विपरीत फलनलाई $f^{-1}:B\rightarrow A$ ले जनाइन्छ ।

शिक्षक पासाङ्ले तलको उदाहरणमा छलफल गराउनुभयो ।



f={(-1,1), (1,1), (-2,4), (2,4)}

f को क्षेत्र र विस्तार क्षेत्र साटासाट सम्बन्ध h बनाउँदा



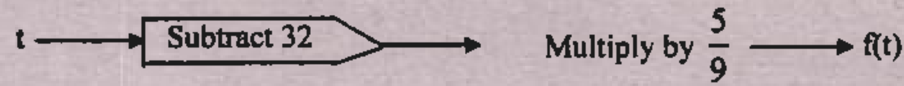
$f=\{(1,-1), (1,1), (4,-2), (4,2)\}$

परिभाषाअनुसार h फलन हुन सक्तैन । यसबाट स्पष्ट हुन्छ कि कुनै पनि फलनको विपरीत फलन हुनका लागि दिइएको फलन एकएक सम्पूर्ण फलन हुनुपर्दछ । अन्यथा फलनको विपरीत फलन नभै केवल सम्बन्ध मात्र हुनपुग्दछ ।

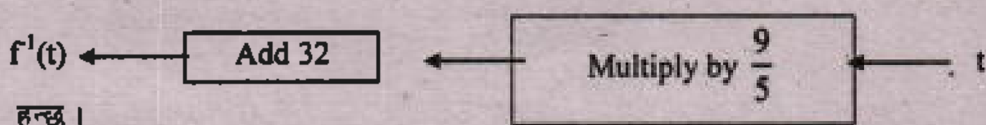
विपरीत फलन पत्ता लगाउने तरिका:

माथि दिइएको उदाहरणमा फलन

$f(t)=\frac{5}{9}(t-32)$ ले फेरेनहाइटलाई सेल्सियसमा बदल्छ भने यसको विपरीत फलनले सेल्सियसलाई फरेनहाइटमा बदल्नु पर्दछ । उक्त फलनको फ्लो चार्ट



लाई विपरीत दिशामा लैजाँदा,



हुन्छ ।

अर्थात्,

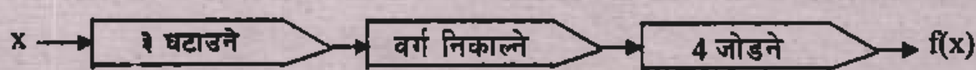
$f^{1}(t)=\frac{9}{5}t+32$ हुन्छ ।

शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीहरूलाई

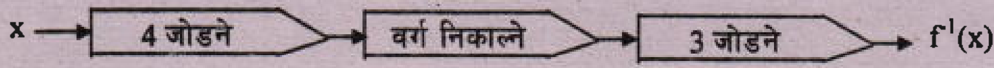
$f(x)=(x-3)^2+4$ को विपरीत फलन पत्ता लगाउन आवश्यक प्रदर्शन गर्नुभयो ।

फ्लोचार्टबाट :

$f(x)=(x-3)^2+4$ लाई फ्लोचार्टमा राख्दा,



फ्लोचार्टलाई विपरीत गर्दा



अर्थात्

$f^1(x)=\sqrt{x-4}+3$

x र y साटासाट गरेर :

$f(x)=(x-3)^2+4$

अर्थात्,

$y=(x-3)^2+4$

x र y साटासाट गरी हल गर्दा,

$x=(y-3)^2+4$

अथवा,

$y=\sqrt{x-4}+3$

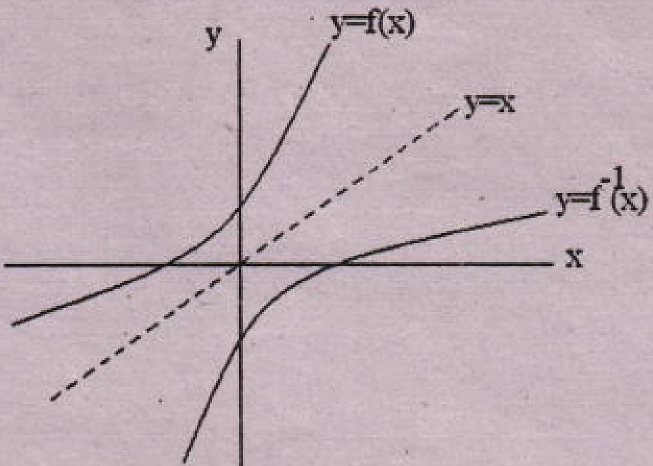
त्यसैले,

$f^1(x)=\sqrt{x-4}+3$

विपरीत फलनको ग्राफ :

कुनै पनि फलनको ग्राफ त्यस फलनको विपरीत फलनको y=x मा हुने परावर्तनको प्रतिबिम्ब हुन्छ ।

अर्थात्



शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीहरूलाई फलन $f(x)=x^2+1$ र सो को विपरीत फलन

$f^1(x)=\sqrt{x-1}$ को ग्राफ एउटै नापमा खिच्न लगाउनुभयो र y=x रेखाबाट f(x) लाई परावर्तन गर्दा कस्तो देखिन्छ हेर्न लगाउनुभयो ।

२.७ केही सरल बीजगणितीय फलनहरू तथा त्रिकोणमीतिय फलनहरू :

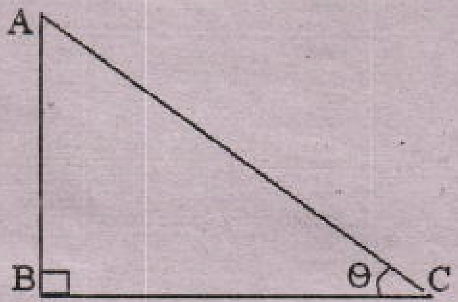
शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीहरूलाई केही विभिन्न खालका बिजीय अभिव्यञ्जकहरू लेख्न दिनुभयो। ती अभिव्यञ्जकहरूलाई डिग्रीका आधारमा वर्गीकरण गर्न लगाउनुभयो । ती अभिव्यञ्जकहरूका ग्राफ खिच्न लगाउनुभयो । उनीहरूले लेखेका विभिन्न खालका अभिव्यञ्जकको आधारमा रेखीय फलन (Linear function), एकात्मक फलन (Identity function), अचल फलन (Constant function), वर्गघातीय फलन (Quadratic function), घनघातीय फलन (Cubic function) को धारणाका सम्बन्धमा छलफल गर्नुभयो ।

f(x)=mx+c स्वरूपको बीजीय फलनलाई रेखीय फलन भनिन्छ । यदि c=0 र m=1 (अर्थात् f(x)=x) भएमा त्यसलाई एकात्मक फलन भनिन्छ । यदि m=0 (अर्थात f(x)=c) भएमा त्यसलाई अचल फलन भनिन्छ ।

$f(x)=ax^2+bx+c$ स्वरूपको बीजीय फलनलाई वर्गघातीय फलन भनिन्छ ।

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ स्वरूपको बीजीय फलनलाई घनघातीय फलन भनिन्छ ।

शिक्षक पासाङ्ले विद्यार्थीहरूलाई एउटा समकोणी त्रिभुज खिच्न लगाउनुभयो ।



दुईओटा न्यूनकोणमध्ये एउटालाई प्रसङ्गकोण θ मानेर आधारभूत त्रिकोणमितीय अनुपातहरू लेख्न लगाउनुभयो ।

जस्तै :

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC},$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC},$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

यी अनुपातहरूमा θ को प्रत्येक मान ($0^\circ \le \theta \le 360^\circ$) को लागि sinθ, cosθ, tanθ को मान एउटा मात्र हुन्छ वा एकभन्दा बढी हुन्छ भन्ने कुरामा छलफल गराउनुभयो ।

विद्यार्थीहरूलाई

$f(\theta)=\sin\theta$,

$f(\theta)=\cos\theta$,

$f(\theta)=\tan\theta$, को लेखाचित्र खिच्न लगाउनुभयो । ती लेखाचित्रसँग मिल्दा आकृतिहरू हाम्रो दैनिक जीवनमा के देख्न सकिन्छ भन्ने कुरा छलफल गराउनुभयो । जस्तै : सिमी, फर्सी, कांका, नागबेलीका लहराहरू आदि ।

३. परियोजना कार्य :

१. $f(\theta)=\sin\theta$, $f(\theta)=\cos\theta$, $f(\theta)=\tan\theta$ को लेखचित्र (ठूलो साइजको ग्राफ पेपरमा ठूलो स्केल लिएर) खिची भित्तामा भुण्ड्याउनुहोस् (शैक्षिक सामग्रीका रूपमा प्रयोग गर्नका लागि) ।

२. रेखीय, वर्गघातीय र घनघातीय फलनको एकएकओटा उदाहरणहरू लेखी लेखाचित्र खिच्नुहोस् । उक्त फलनहरूको विपरीत फलन निकाली लेखाचित्र खिच्नुहोस् ।

३. सम्बन्ध र फलन शिक्षणका लागि सिकाइ मोडुलहरू तयार पार्नुहोस् ।

४. सन्दर्भ सामग्री :

- SMP 11-16, yellow series, Cambridge University, 1987.
- A.H. Smith etal, Fundamental concepts of Analysis, prentice Hall of India pvt. ltd, New Delhi, 1987.
- डा.हीराबहादुर महर्जन, एवम् साथीहरू, माध्यमिक गणित शिक्षण, रत्नपुस्तरक भण्डार, काठमाडौं,

एकाइ एघार

स्थानान्तरण

Competency: Understand transformation as motion geometry and functions relation and teach meaningfully for the seconday students.

१. परिचय :

इसापूर्व १५०० वर्षपहिले इजिप्सीएनहरूबाट सुरु भएको ज्यामितिको विकासका क्रममा स्थानान्तरण ज्यामिति (Transformational geometry) सबैभन्दा नयाँ विधा हो । यसमा कुनै पनि ज्यामितीय आकृतिलाई एकबाट अर्कोमा बदल्न (Transform) सकिन्छ । युक्लिडीयन ज्यामिति शिक्षणका लागि पनि स्थानान्तरणको धारणा उपयोगी सावित भएको छ । युक्लिडीयन ज्यामितिका विभिन्न धारणाहरूको शिक्षणका लागि परावर्तन, विस्थापन, परिक्रमण, तथा विस्तारीकरणको प्रयोग गर्न सकिन्छ । माध्यमिक तहको अतिरिक्त गणितको पाठ्यक्रममा स्थानान्तरण समावेश गरिएको छ । यस एकाइमा Isometric स्थानान्तरणअन्तर्गत परावर्तन, विस्थापन र परिक्रमण तथा Non-isometric स्थानान्तरणअर्न्तगत विस्तारीकरणसम्बन्धी विषयवस्तुहरू तथा ती विषयवस्तुहरू शिक्षण गर्ने तरिकाहरू प्रस्तुत गरिएका छन् ।

२. विषयवस्तु

२.१. स्थानान्तरण (Transformation) को अर्थ

विद्यार्थीहरूलाई फलनको धारणा भइसकेको हुँदा स्थानान्तरणलाई फलन (Function) वा मिलान (Mapping) रूपमा परिभाषित गर्न मलाई सजिलो भयो । एकजना विद्यार्थीले मलाई सोधे, फलन $f:A \rightarrow B$ मा A का प्रत्येक सदस्यको B मा प्रतिबिम्ब भएजस्तै स्थानान्तरणमा पनि एउटा समतलका हरेक बिन्दुहरूको बेग्लाबेग्लै प्रतिबिम्ब हुन्छ, ठीक हो सर ? मैले हो भन्ने जवाफ दिएँ । वास्तवमा स्थानान्तरण भनेको एकएक मिलान (One-one mapping) नै हो । यसरी फलन र स्थानान्तरण उस्तैउस्तै हुन् । यदि स्थानान्तरण T ले बिन्दु A लाई अर्को बिन्दु (प्रतिबिम्ब) A^1 सँग मिलान गर्दछ भने विपरीत स्थानान्तरण (Inverse transformation) T^{-1} ले बिन्दु A^1 लाई A सँग मिलान गर्दछ । फलन f लाई $f(x)=y$ ले जनाए जस्तै स्थानान्तरण T लाई $T(x)=x^1$ वा $x \rightarrow x^1$ ले पनि जनाउने चलन छ ।

स्थानान्तरणका उदाहरणहरूका सम्बन्धमा पनि विद्यार्थीहरूबीच छलफल भए । माछापुच्छ्रे हिमालको प्रतिबिम्ब फेवातालमा देख्नसकिन्छ । हामीले आफ्नो प्रतिबिम्ब हेर्न समतल ऐना प्रयोग गर्दछौं । हिन्दूहरूले पूजा गर्दा घिउमा अनुहार हेर्न लगाउँदछन् । हामीले कुनै वस्तुलाई

एक ठाउँबाट सारेर अर्को ठाउँमा राख्ने गर्दछौं । गोठको वा चउरको एउटा किलामा डोरीले बाँधेको खसी (वा अन्य कुनै जनावर) डोरी तन्किने गरी एक स्थानबाट अर्को स्थानमा पुग्दछ । फोटोग्राफरले एउटै नेगेटिभबाट ठूलोसानो विभिन्न साइजको फोटो तयार गर्दछ । स्थानान्तरणका चार आधारभूत तरिकाहरू छन् : परावर्तन (Reflection), विस्थापन (Translation), परिक्रमण (Rotation) र विस्तारीकण/सङ्कुचन (Enlargement/reduction) । पहिलो दुई उदाहरण परावर्तनका हुन् भने बाँकी उदाहरणहरू क्रमश: विस्थापन, परिक्रमण र विस्तारीकरण/सङ्कुचनका हुन् । छलफलबाट निष्कर्ष निकालियो-स्थानान्तरण भनेको ज्यामितीय आकृतिहरूको परिवर्तन हो ।

२.२. आइसोमेट्रिक (Isometric) र नन्आइसोमेट्रिक (Non-isometric) स्थानान्तरण :

एकजना विद्यार्थीले सोधे "के स्थानान्तरण गर्दा ज्यामितीय आकृतिहरूको स्थिति (position), आकार (Shape), र नाप (Size) सबै परिवर्तन हुन्छ ?" मैले उक्त प्रश्नको उत्तर विद्यार्थीहरू बीचको छलफलबाट निकाल्ने विचार गरें । माथि दिइएका उदाहरणहरू मध्ये कुनैकुनैमा स्थिति, आकार र नाप परिवर्तन हुन्छ र कुनैकुनैमा हुँदैन भन्ने प्रश्नको आधारमा छलफललाई अगाडि बढाएँ ।

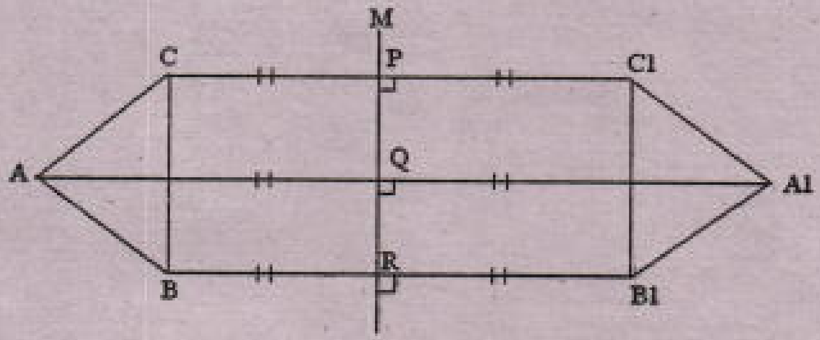
पहिलो चार उदाहरणहरूमा वस्तुको स्थिति मात्र परिवर्तन हुन्छ । आकार र नाप उही रहन्छ । ती सबै Isometric स्थानान्तरणका उदाहरणहरू हुन् । आइसोमेट्रिक स्थानान्तरणलाई अनुरूप (Congruent) स्थानान्तरण पनि भनिन्छ । यस प्रकारको स्थानान्तरणमा आकृतिको कुनै दुई बिन्दुहरू बीचको दूरी र त्यसका प्रतिबिम्बका सम्बन्धित (Corresponding) दुई बिन्दुहरू बीचको दुरी बराबर हुन्छ । अर्थात आइसोमेट्रिक स्थानान्तरणमा दुरी सधैं अपरिवर्तित (Invariant) रूपमा रहन्छ । परावर्तन, स्थानान्तरण र परिक्रमण आइसोमेट्रिक स्थानान्तरण हुन् ।

माथिको पाँचौ (अन्तिम) उदाहरणमा वस्तुको स्थितिको साथै नाप (Size) पनि परिवर्तन हुन्छ । सो Non-isometric स्थानान्तरणको उदाहरण हो । यस प्रकारको स्थानान्तरणमा आकृतिका कुनै दुई बिन्दुहरूबीचको दुरी त्यसको प्रतिबिम्बका सम्बन्धित (Corresponding) दुई बिन्दुहरूबीचको दूरीभन्दा घटी वा बढी हुन्छ (बराबर हुँदैन) । आकृति र प्रतिबिम्ब केवल समरूप मात्र हुन्छन् । त्यसैले Non-isometric स्थानान्तरणलाई समरूप (Similarity) स्थानान्तरण पनि भनिन्छ । Isometric स्थानान्तरणमा कोण (Angle) भने अपरिवर्तित रहन्छ । त्यसैले नाप (Size) परिवर्तित भए पनि आकार (shape) उस्तै रहन्छ । विस्तारीकरण र सङ्कुचन Non-isometric स्थानान्तरण हुन् ।

ग) परावर्तन (Reflection)

विद्यार्थीहरूलाई समतल ऐनाबाट देखिने प्रतिबिम्ब कुनै पोखरी तलाउमा देखिने रुख, घर, पहाडको हिमालको प्रतिबिम्ब कस्तो देखिन्छ भन्ने सम्बन्धमा छलफल गराएँ । उनीहरूले

देखेका परावर्तनसम्बन्धी अनुभवहरू सुनाए । परावर्तनको प्रतिबिम्ब, परावर्तनको अक्ष, प्रतिबिम्बको स्वरूप सम्बन्धमा पनि छलफलहरू भए ।



विद्यार्थीहरूलाई कापीमा एउटा त्रिभुज ABC खिच्न लगाएँ । परावर्तनको अक्ष m खिच्न लगाएँ । सो अक्ष m मा ऐना राख्दा ABC को प्रतिबिम्ब कस्तो देखिन्छ हेर्न लगाएँ । सो आधारमा प्रतिबिम्ब कागजमा खिच्न लगाएँ । सो प्रतिबिम्ब ABC खिच्ने भन्ने सम्बन्धमा छलफल गराएँ ($m \perp Cp$ खिचेर cp लाई $cp=pc^1$ हुने गरी बढाउँदा बिन्दु c को प्रतिबिम्ब c पत्ता लाग्दछ, त्यसैगरी B^1 र A^1 पत्ता लगाउन सकिन्छ । यी छलफलहरूको आधारमा परावर्तनका विशेषताहरू सूचिकृत गर्न लगाएँ ।

परावर्तनका विशेषताहरू :

१. आकृति र त्यसको प्रतिबिम्ब परांवर्तनको अक्ष (ऐना) बाट बराबर दूरीमा पर्दछन् । माथिको चित्रमा $cp=c^1p$, $AQ=A^1Q$, $BR=B^1R$ छ ।

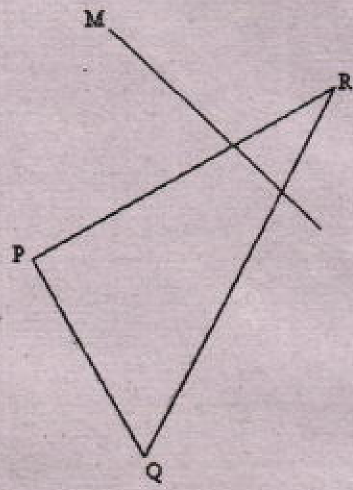
२. आकृति र त्यसको प्रतिबिम्ब एकअर्काको उल्टो देखिन्छन् तर अनुरूप हुन्छन् । $\Delta ABC \cong \Delta A^1B^1C^1$ हुन्छ ।

३. आकृति र प्रतिबिम्बका सम्बन्धित (Corresponding) बिन्दुहरू जोडने रेखाहरू परावर्तनको अक्षमा लम्ब हुन्छन् । माथिको चित्रमा $m \perp AA^1$, $m \perp CC^1$ र $m \perp BB^1$ छ ।

४. परावर्तनको अक्षमा परेका बिन्दुहरूको प्रतिबिम्ब उही हुन्छ । P को प्रतिबिम्ब P नै हुन्छ । यस प्रकारका बिन्दुहरू अपरिवर्तिनीय (Invariants) रहन्छन् ।

५. यदि R ले m मा हुने परावर्तन जनाउँछ र $R(x)=x^1$ (x को प्रतिबिम्ब x^1 हो) भने $R^{-1}(X^{-1})=X$ हुन्छ (उल्टो परावर्तन गर्दा x^1 को प्रतिबिम्ब x हुन्छ) ।

परावर्तनका यी विशेषताहरूका आधारमा विद्यार्थीहरूलाई तल दिइएको त्रिभुज PQR लाई परावर्तनको अक्ष m मा परावर्तन गर्न लगाएँ ।



३.१ परावर्तनमा निर्देशाङ्कको प्रयोग

विद्यार्थीहरूसँग परावर्तनका वैकल्पिक उपायहरूका बारेमा छलफल भयो । वर्गाङ्कित कागज (ग्राफ पेपर) प्रयोग गरेर विभिन्न ज्यामितीय आकृतिको कुनै निश्चित अक्षबाट परावर्तन गर्दा प्राप्त हुने प्रतिबिम्ब सजिलैसँग पत्ता लगाउन सकिन्छ । x-अक्ष, y-अक्ष, $y=\pm mx$ रेखा, $y=mx+c$ रेखा वा $ax+by+c=0$ रेखालाई परावर्तनको अक्ष मानेर ज्यामितीय आकृतिलाई परावर्तन गर्न सकिन्छ ।

मैले विद्यार्थीहरूलाई तल दिइएको त्रिभुज ABC को प्रतिबिम्ब निम्न आधारमा पत्ता लगाउन दिएँ ।

i. x अक्षलाई परावर्तनको अक्ष मानेर ।

ii. y अक्षलाई परावर्तनको अक्ष मानेर ।

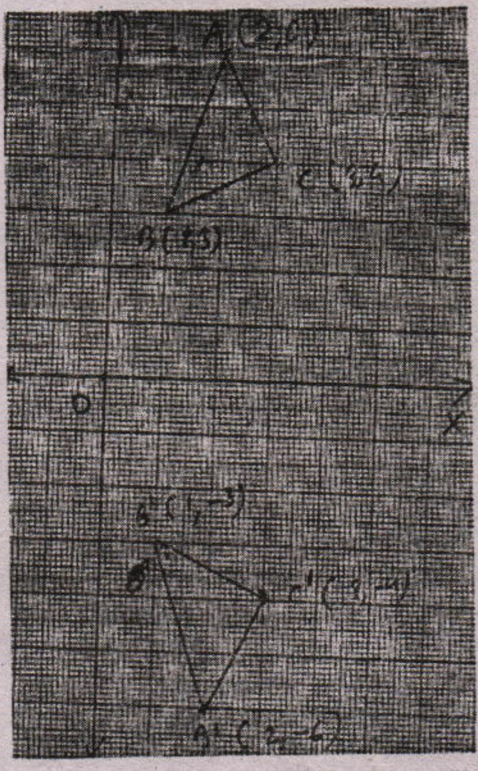
iii. $y=x$ रेखालाई परावर्तनको अक्ष मानेर ।

iv. $y=-x$ लाई परावर्तनको अक्ष मानेर ।

विद्यार्थीहरूले ABC को प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ उल्लिखित चार किसिमबाट पत्ता लगाए । कुनै पनि बिन्दु (x,y) लाई x-अक्षमा, y-अक्षमा, $y=-x$ रेखामा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क केके हुन्छ भन्ने कुरा सामान्यीकरण गरे ।

क)　x-अक्षमा परावर्तन :

ΔABC लाई x-अक्षमा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ प्राप्त भएको छ ।



आकृति/बिन्दुको निर्देशाङ्क	प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क
A(2,6)	A^1(2,-6)
B(1,3)	B^1(1,-3)
C(3,4)	C(3,-4)
....	....
....	....
....	....
R(x,y)	R^1(x,-y)

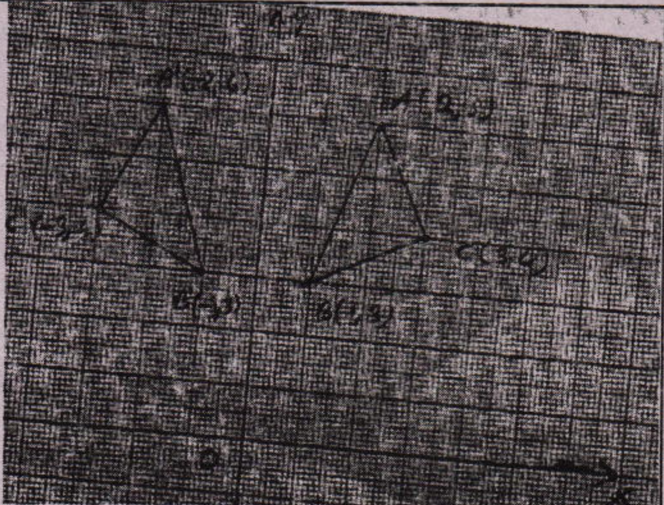
नोट : x-अक्षमा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्बको

x-निर्देशाङ्क ⟶उही रहन्छ ।

y-निर्देशाङ्क⟶चिन्ह मात्र बदलिन्छ ।

ख) y-अक्षमा परावर्तन :

ABC लाई y अक्षमा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ प्राप्त भएको छ ।



आकृति/बिन्दुको निर्देशाङ्क	प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क
A(2,6)	A^1(-2,6)
B(1,3)	B^1(-1,3)
C(3,4)	C(-3,4)
....	....
....	....
R(x,y)	R^1(-x,y)

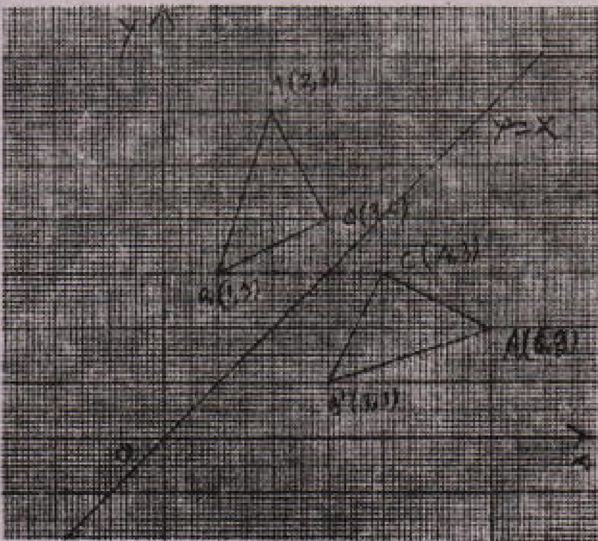
नोट : x-अक्षमा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्बको

x-निर्देशाङ्क →चिन्ह मात्र बदलिन्छ ।

y-निर्देशाङ्क→उही रहन्छ ।

ग) y=x मा परावर्तन :

ABC लाई y=x रेखामा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ प्राप्त भएको छ ।

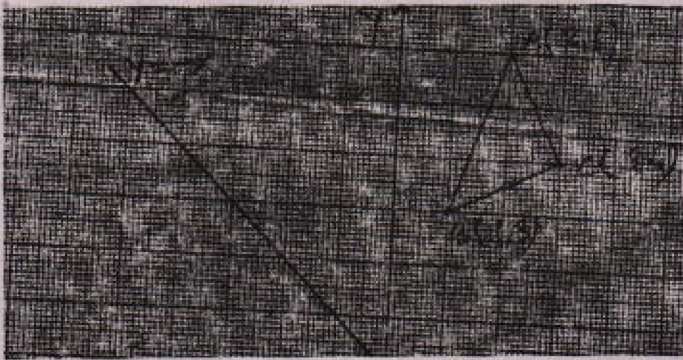


आकृति/बिन्दुको निर्देशाङ्क	प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क
A(2,6)	A^1(6,2)
B(1,3)	B^1(3,1)
C(3,4)	C(4,3)
....	....
....	....
....	....
R(x,y)	R^1(y,x)

नोट : y=x मा परावर्तन गर्दा x निर्देशाङ्क र y निर्देशाङ्क क्रमश: साटफेर हुन्छ । चिन्ह बदलिँदैन ।

घ) y=-x मा परावर्तन :

ABC लाई y=-x रेखामा परावर्तन गर्दा प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ प्राप्त भएको छ ।



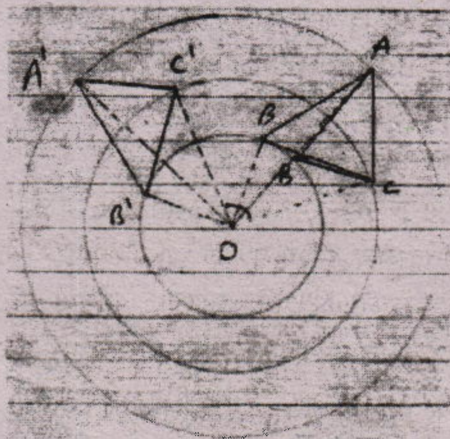
आकृति/बिन्दुको निर्देशाङ्क	प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क
A(2,6)	A^1(-6,-2)
B(1,3)	B^1(-3,-1)
C(3,4)	C(-4,3-)
....	....
....	....
....	....
R(a,b)	R^1(-a,-b)

नोट १ : y=-x मा परावर्तन गर्दा x निर्देशाङ्क र y निर्देशाङ्क क्रमशः साटफेर हुन्छ र चिन्ह पनि बदलिन्छ ।

नोट २ : ax+by+c=0 मा हुने परावर्तनमा (x,y) को प्रतिबिम्ब $\left(x-\frac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2}, y-\frac{2b(ax+by+c)}{a^2+b^2}\right)$ हुन्छ ।

४. परिक्रमण (Rotation)

विद्यार्थीहरूले परिक्रमणसम्बन्धी आफ्ना अनुभवहरू सुनाए । जस्तै : रोटे पिङ् खेलेको, जाँतो घुमाएको, दाईं गर्दा गोरुहरू घुमेको, घडीको सुई घुमेको, विहेमा यज्ञको वरिपरि वरवधु घुमेको सबै परिक्रमणका उदाहरणहरू हुन् ।



विद्यार्थीहरूलाई एउटा त्रिभुज ABC खिच्न लगाएँ । त्यस त्रिभुजलाई केन्द्रबिन्दु O मानेर 90° (घनात्मक) मा घुमाएर प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ कसरी पत्ता लगाउने भन्ने सम्बन्धमा विद्यार्थीहरू बीच छलफल भयो ।

विद्यार्थीहरूले ΔABC को बिन्दु A र O जोडे । O लाई केन्द्र मानी AO अर्धव्यास लिएर एउटा वृत्त खिचेँ । सो वृत्तको परिधिमा अर्को बिन्दु A^1 (A को प्रतिबिम्ब) पत्ता लगाए । जहाँ $<AOA^1=90°$ (धनात्मकदिशामा) हुन्छ । यही प्रक्रियाबाट अन्य बिन्दुहरू B र C का प्रतिबिम्बहरू B^1 र C^1 पत्ता लगाई । ΔABC लाई 90° (धनात्मक) परिक्रमण गर्दा प्राप्त हुने प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ खिचेँ ।

परिक्रमणका विशेषताहरू बारे छलफल भए ।

परिक्रमणका विशेषताहरू :

१. आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप हुन्छन् । जस्तै : $\Delta ABC \cong \Delta A^1B^1C^1$ छ ।

२. परिक्रमणले समतलमा रहेका ज्यामितीय आकृतिलाई परिक्रमणको केन्द्रबाट एउटै दिशामा उत्तीकै कोणिक विस्थापन (Angular displacement) गर्दछ ।

३. आकृति र प्रतिबिम्बका बिन्दुहरू जोड्ने रेखाको लम्बार्धक सधै परिक्रमणको केन्द्रबिन्दु भएर जान्छ ।

४. परिक्रमणको बिन्दु अपरिवर्तनीय (Invariant) हुन्छ ।

५. घडीको सूइको दिशामा भएको परिक्रमणलाई ऋणात्मक र घडीको सूइको विपरीत दिशामा भएको परिक्रमणलाई धनात्मकपरिक्रमण भनिन्छ ।

६. ज्यामितीय आकृतिको परिक्रमण गरी प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउन परिक्रमणको बिन्दु, परिक्रमणको कोण र दिशा जरुरत पर्दछ ।

परिक्रमणका यी विशेषताहरूका आधारमा विद्यार्थीहरूले विभिन्न ज्यामितीय आकृतिहरू (सरल रेखा, त्रिभुज, चतुर्भुज) लाई दिइएको परिक्रमणको बिन्दु, कोण र दिशाका आधारमा परिक्रमण गरी प्रतिबिम्बहरू पत्ता लगाए ।

४.१ परिक्रमणमा निर्देशाङ्कको प्रयोग :

निर्देशाङ्क प्रयोग गरी 90^o र यसका Multiple जस्तै : 180^o, 270^o इत्यादि कोणहरूमा ज्यामितीय आकृतिहरूको परिक्रमणका प्रतिबिम्बहरू सजिलोसँग पत्ता लगाउन सकिन्छ । ज्यामितीय आकृतिहरूको 90^o परिक्रमणलाई चौथाइ परिक्रमण भनिन्छ भने 180^o, 270^o र 360^o परिक्रमणलाई क्रमशः अर्ध परिक्रमण, तीनचौथाइ परिक्रमण र पूर्ण परिक्रमण भनिन्छ । मैले विद्यार्थीहरूलाई ΔABC लाई निम्नआधारमा उदगम बिन्दुबाट परिक्रमण गरी प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ पत्ता लगाउन दिएँ ।

i. 90^o धनात्मक दिशामा परिक्रमण ।

ii. 90^o ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण ।

iii. 180^o धनात्मक दिशामा परिक्रमण ।

iv. 270^o धनात्मक दिशामा परिक्रमण ।

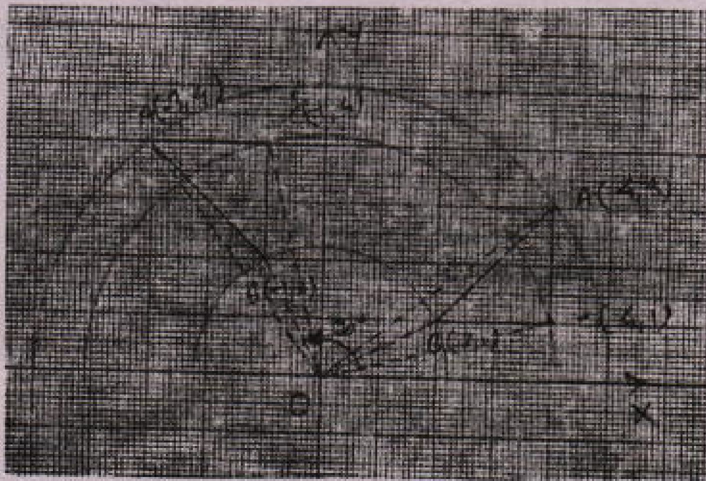
v. 270^o ऋणात्मक दिशामा परिक्रमण ।

यी आधारमा परिक्रमण गर्दा प्रतिबिम्बहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउने तरिका सामान्यीकरण गर्न लगाएँ ।

क) चौथाइ परिक्रमण (190^o)

धनात्मकदिशामा :

ΔABC लाई धनात्मकदिशामा 90^o परिक्रमण गर्दा प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ बनेको छ ।



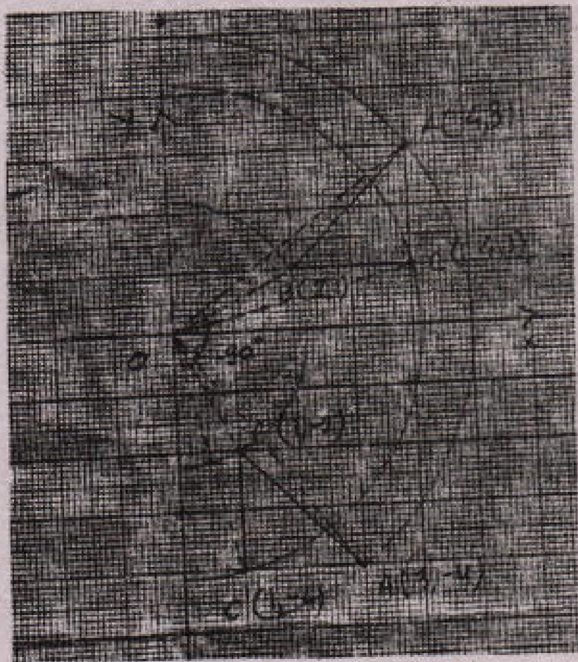
आकृति/बिन्दुको निर्देशाङ्क	प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क
A(4,3)	A^{1}(-3,4)
B(2,1)	B^{1}(-1,2)
C(4,1)	C(-1,4)
....	....
....	....
....	....
R(x,y)	R^{1}(-y,x) .

धनात्मक दिशामा चौथाइ परिक्रमणमा निर्देशाङ्क साटिन्छन् र x निर्देशाङ्कको चिन्ह बदलिन्छ ।

धनात्मकदिशामा चौथाइ परिक्रमणको प्रतिबिम्ब र ऋणात्मक दिशामा तीनचौथाइ परिक्रमणको प्रतिबिम्ब उही हुन्छ ।

ऋणात्मक दिशामा :

ABC लाई ऋणात्मक दिशामा 90° परिक्रमण गरिएको छ र प्रतिबिम्ब $A^{1}B^{1}C^{1}$ बनेको छ ।



आकृति/बिन्दुको निर्देशाङ्क	प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क
A(4,3)	$A^1(3,-4)$
B(2,1)	$B^1(1,-2)$
C(4,1)	C(1,-4)
....	....
....	....
....	....
R(x,y)	$R^1(y,-x)$

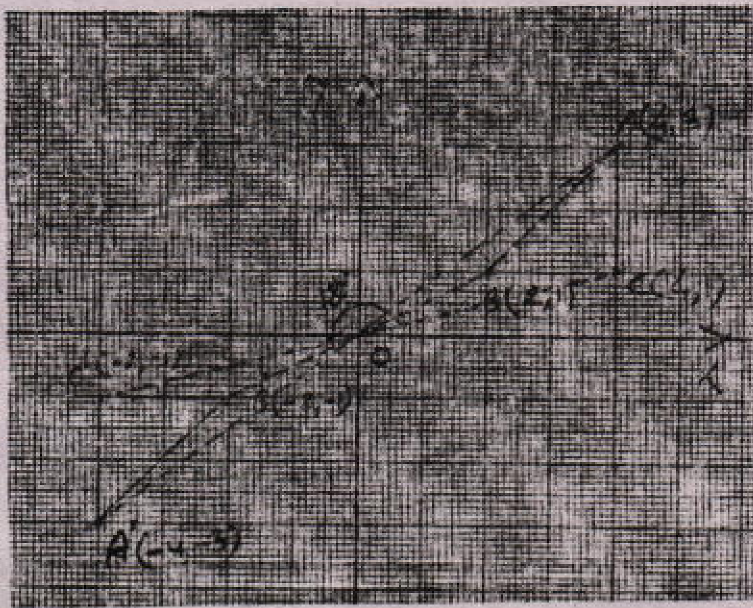
ऋणात्मक दिशामा चौथाइ परिक्रमणमा निर्देशाङ्क साटिन्छन् र y निर्देशाङ्कको चिन्ह बदलिन्छ ।

ऋणात्मक दिशामा चौथाइ परिक्रमणको प्रतिबिम्ब र धनात्मक दिशामा तीनचौथाइ परिक्रमणको प्रतिबिम्ब उही हुन्छ ।

विहे वा पूजाआजाको बेला ऋणात्मक दिशामा 360^o वा सो को Multiple मा परिक्रमण हुने गर्दछ ।

ख) अर्ध परिक्रमण (180^o)

अर्धपरिक्रमण धनात्मक वा ऋणात्मक जुनसुकै दिशामा भए पनि उही प्रतिबिम्ब प्राप्त हुन्छ । ΔABC को अर्ध परिक्रमणबाट प्राप्त प्रतिबिम्ब $\Delta A^1B^1C^1$ छ ।



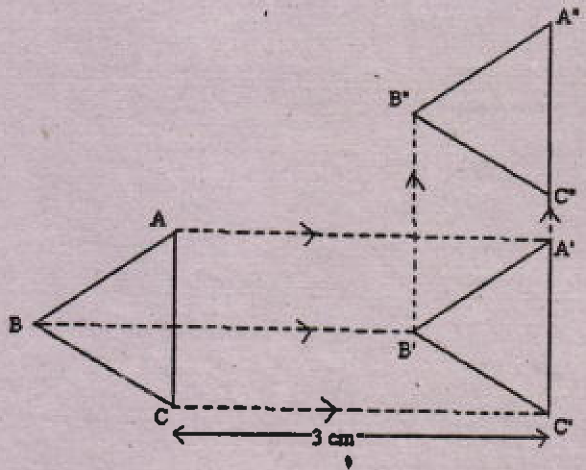
आकृति/बिन्दुको निर्देशाङ्क	प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क
A(4,3)	$A^{1}(-3,-4)$
B(2,1)	$B^{1}(-1,-2)$
C(4,1)	C(-1,-4)
....	....
....	....
....	....
R(x,y)	$R^{1}(-y,-x)$

अर्ध परिक्रमण गर्दा निर्देशाङ्क उही रहन्छ तर चिन्ह बदलिन्छ ।

५. विस्थापन (Translation)

मैले टेबलमा भएको एउटा किताबलाई धकेलेर एक ठाउँबाट अर्को ठाउँमा पुऱ्याउन लगाएँ । एउटा कुर्सीलाई घिसारेर अर्को ठाउँमा पुऱ्याउन लगाएँ । विद्यार्थीहरूसँग विस्थापनको सम्बन्धमा छलफलको सुरुआत गरेँ । हामीले दैनिक जीवनमा सामानहरू एक ठाउँबाट अर्को ठाउँमा पुऱ्याउँछौ, ती सबै विस्थापन हुन । विद्यार्थीहरूले पनि विस्थापनका थुप्रै उदाहरणहरू प्रस्तुत गरे । विस्थापन गर्दा वस्तु/आकृतिको नयाँ स्थिति पत्ता लगाउन केके कुरा आवश्यक पर्छ भन्ने बारेमा छलफल हुँदा दुरी र दिशा आवश्यक पर्ने निष्कर्ष निकालियो ।

विद्यार्थीहरूलाई एउटा त्रिभुज खिच्न लगाएँ । सो त्रिभुजलाई ३ से.मी. दायाँ र २ से.मी. माथि सार्दा प्रतिबिम्ब कस्तो प्राप्त हुन्छ पत्ता लगाउन दिएँ ।



यस चित्रमा ३ एकाइ दायाँ र २ एकाइमाथितिर विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब A"B"C" प्राप्त भएको छ । यस स्थानान्तरणलाई $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ विस्थापन गरेर (अर्थात विस्थापन कम्पोनेन्ट) ले जनाउने गरिन्छ ।

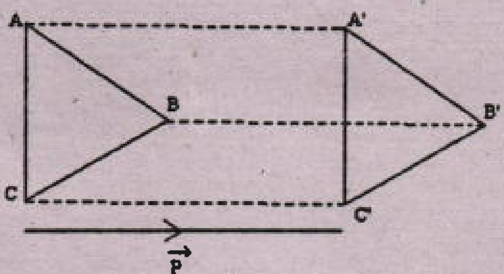
विस्थापनका विशेषताहरू बारे निम्न छलफल भए ।

क) आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप हुन्छन् ।

ख) विस्थापनले समतलमा रहेका प्रत्येक बिन्दुलाई उत्तीकै दूरी र उही दिशामा स्थानान्तरण गर्दछ ।

ग) विस्थापनका लागि दिशा र परिमाण/नाप (Direction and Magniture) को जरुरत पर्दछ ।

यदि ΔABC लाई भेक्टर $\bar{p}$ को दिशा र नापमा विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब $A^1B^1C^1$ प्राप्त भएको छ भने

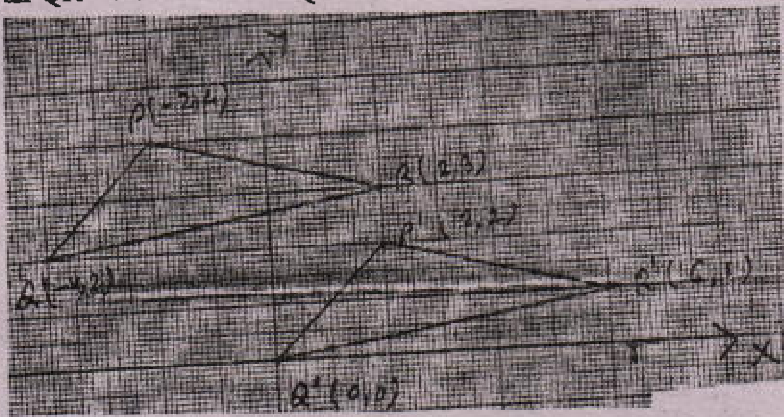


$AA^1=BB^1=CC^1=\bar{p}$ तथा $AA^1 \| BB^1 \| CC^1$ हुन्छ ।

५.१ **जोडा सङ्ख्याका रूपमा विस्थापनको प्रस्तुतीकरण :**

मैले विद्यार्थीहरूलाई शीर्ष बिन्दुहरू P(-2,4), Q(-4,2) र R(2,3) भएको एउटा त्रिभुज वर्गाङ्कित कागजमा खिच्न लगाएँ । त्यस त्रिभुज PQR लाई ४ एकाइ दायाँ र २ एकाइ तल विस्थापन गर्न लगाएँ ।

ΔPQR को प्रतिबिम्ब $\Delta P^1Q^1R^1$ यस प्रका प्राप्त भयो ।



यहाँ P, Q र R बिन्दुहरूबाट 4 एकाइ दायाँ र 2 एकाइ तल P^1, Q^1 र R^1 बिन्दुहरू रहेकाछन् । यसलाई जोडा सङ्ख्या $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ ले जनाइन्छ । यसलाई विस्थापन भेक्टर वा विस्थापनको कम्पोनेन्ट भनिन्छ ।

विस्थापन भेक्टर	आकृति / बिन्दुको निर्देशाङ्क	प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क
$\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$	P(-2,4)	$P^1(2,2)$
$\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$	Q(-4,2)	$Q^1(0,0)$
$\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$	R(2,3)	$R^1(6,1)$
....	....	....
....	....	....
$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	T(x,y)	$T^1(x+a,y+b)$

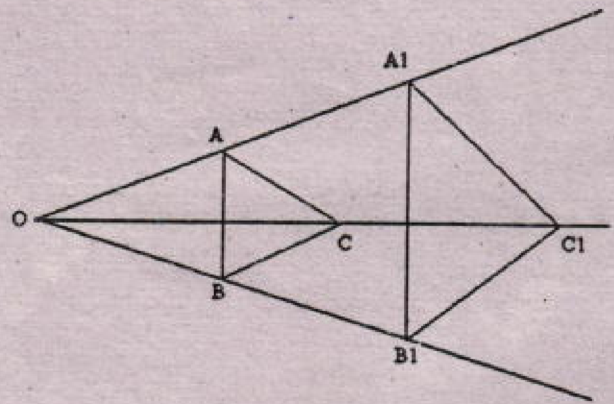
विस्थापन भेक्टर $\left(\frac{a}{b}\right)$ ले आकृतिलाई विस्थापन गर्दा a ले x अक्षतिर धनात्मक भए दायाँतिर र ऋणात्मक भए बायाँतिर कति विस्थापन गर्ने भन्ने जनाउँछ भने b ले y अक्ष तिर, धनात्मकभए माथितिर र ऋणात्मक भए तलतिर कति विस्थापन गर्ने भन्ने जनाउँछ ।

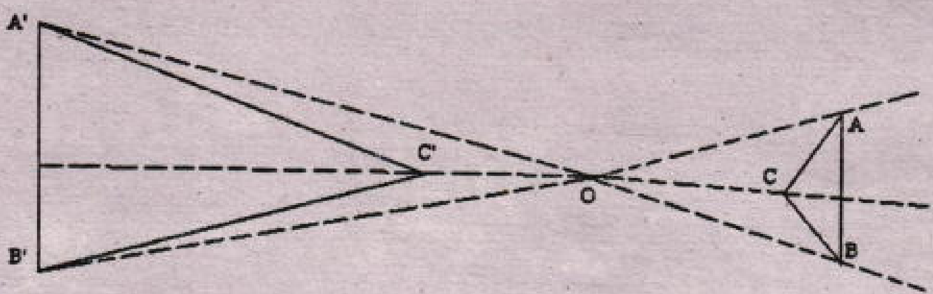
अर्थात विस्थापनलाई $\begin{pmatrix} \text{दायाँ / बायाँ} \\ \text{माथि / तल} \end{pmatrix}$ को रूपमा Column भेक्टरद्वारा जनाउने गरिन्छ ।

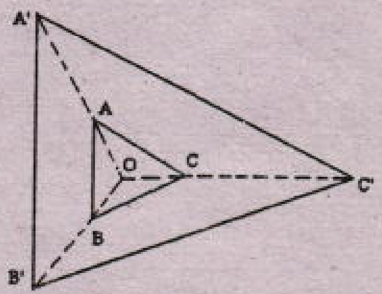
६. विस्तार (Enlargement)

एउटै नेगेटिभबाट निकालिएका (एउटै व्यक्तिका) फरकफरक साइजका फोटोहरू विद्यार्थीहरूलाई देखाएँ । त्यसैगरी फोटोकपीमा Enlarge र Reduce गरिएका चित्र/अक्षर/Text हरू प्रदर्शन गरें । विस्तारको धारणा दिनका लागि छलफलको सुरुआत गरें । फोटो, चित्र, अक्षरहरू कति गुना ठूलो वा कति गुना सानो भन्ने कुराबाट विस्तारको मापो (Scale factor) सम्बन्धमा छलफल गराएँ ।

विद्यार्थीहरूलाई एउटा त्रिभुज ABC खिच्न लगाएँ । त्यसलाई कुनै बिन्दु O बाट माथि २ ले विस्तार गर्न लगाएँ । (O को अवस्थिति बेग्लाबेग्लै दिएर) ।







यी तीनओटै अवस्थामा $A^1B^1=2AB$, $B^1C^1=2BC$ र $A^1C^1=2AC$ छ, $A^1B^1 \| AB$, $B^1C^1 \| BC$ र $A^1C^1 \| AC$ छ । यी चित्रहरूको आधारमा चित्रको नाप, विस्तारका गुणहरूबारे छलफल भए ।

विस्तारका विशेषताहरू :

१. विस्तारमा आकृति र प्रतिबिम्ब समरूप हुन्छन् ।

२. विस्तारको लागि विस्तारको केन्द्र र विस्तारको नापो जरुरी हुन्छ । यदि विस्तारको केन्द्र O र नापो K छ भने त्यसलाई [O,K] ले जनाइन्छ ।

३. विस्तारको नापो $K>1$ छ भने आकृतिभन्दा प्रतिबिम्ब ठूला हुन्छ । आकृति र प्रतिबिम्ब केन्द्रबाट एउटै दिशामा पर्दछन् ।

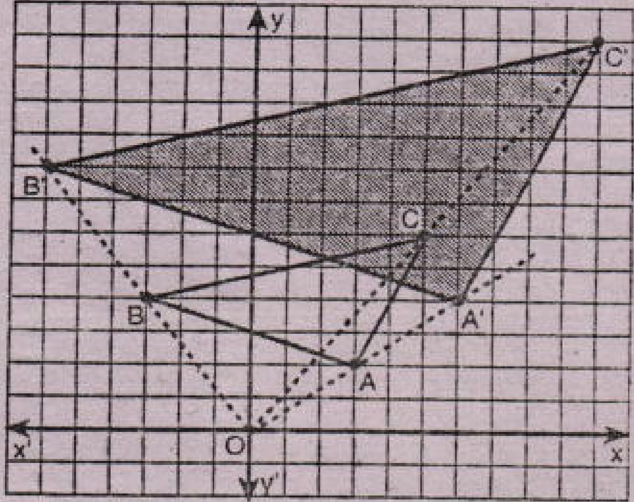
४. विस्तारको $0<R<1$ छ भने प्रतिबिम्ब आकृतिभन्दा सानो हुन्छ । आकृति र प्रतिबिम्ब केन्द्रबाट एउटै दिशामा पर्दछन् ।

५. विस्तारको नापो $K<0$ छ भने आकृति र प्रतिबिम्ब केन्द्रबाट विपरीत दिशामा पर्दछन् । प्रतिबिम्ब उल्टो (inverted) हुन्छ ।

६. विस्तारको नापो $K=1$ छ भने आकृति र प्रतिबिम्ब एउटै हुन्छ जसलाई एकात्मक विस्तार (identity enlargement) भनिन्छ ।

५.१ विस्तारीकरणमा निर्देशाङ्कको प्रयोग

वर्गाङ्कित कागज (ग्राफपेपर) प्रयोग गरेर विस्तारीकरणका प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउन सकिन्छ । मैले विद्यार्थीहरूलाई एउटा वर्गाङ्कित कागजमा A(3,2), B(-3,4), C(5,6) दिएर त्रिभुज ABC बनाउन लगाएँ । उदगम बिन्दु (0,0) लाई विस्तारको केन्द्र मानेर विस्तारको मापो २ लिएर विस्तार गर्न लगाएँ ।



विस्तार गर्दा ΔABC को प्रतिबिम्ब $A^IB^IC^I$ प्राप्त भयो ।

विस्तारको नापो	केन्द्र	आकृति/बिन्दुको निर्देशाङ्क	प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क
2	उदगम् बिन्दु (0,0)	A(3,2)	A^I(6,4)
2	उदगम् बिन्दु (0,0)	B(-3,4)	B^I(-6,8)
2	उदगम् बिन्दु (0,0)	C(5,6)	C^I(10,12)
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
K	उदगम् बिन्दु (0,0)	E(x,y)	E^I(kx,ky)

नोट : यदि विस्तारको नापो KT केन्द्र (a,b) हुँदा E(x,y) को प्रतिबिम्ब E^I{k(x-a)+a, k(y-b)+b} हुन्छ ।

यी चार किसिमका स्थानान्तरण शिक्षणपश्चात विद्यार्थीहरूलाई निम्नलिखित तालिका भर्न लगाएँ ।

विशेषताहरू	परावर्तन	परिक्रमण	विस्थापन	विस्तार
१. अपरिवर्तनीय बिन्दु २. अपरिवर्तनीय रेखा ३. आकृति र प्रतिबिम्बका सङ्गति भुजाहरू समानान्तर ४. आकृति र प्रतिबिम्बका सङ्गति कोणहरू बराबर ५. आकृति र प्रतिबिम्ब अनुरूप ६. आकृति र प्रतिबिम्ब समरूप				

नोट : "हुन्छ" भने (√) चिन्ह र "हुँदैन" भने (X) चिन्ह लगाउने ।

३. **परियोजना कार्य**

स्थानान्तरण शिक्षणका लागि सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

४. **सन्दर्भ सामग्रीहरू :**

- डा.हीराबहादुर महर्जन र साथीहरु, माध्यमिक गणित शिक्षण
- S. M. Maskey, Modern Mathematics, Vol II
- Fiorenda L. Gallos, et.al, High School Mathematics, SMEMDP
- SEDP, Four Week Inservice Mathematics Teacher Training Package
- NISMED, Practical Work in High School Mathematics

एकाइ बाह्र
रेखीय योजना

> Competency : Understand linear programming concept and use it in solving problems in life. (Use of system of linear inequality and graphical methods of solving given problem)

१. परिचय :

शाब्दिक अर्थमा रेखीय योजना भनेको एउटा गणितीय नमुना (Mathematical model) हो जुन रेखीय (Linear) प्रकृतिको हुन्छ । विभिन्न सर्तहरू (Constraints) समावेश भएको रेखीय फलन (Linear function) मा चलका अधिकतम र न्यूनतम मानहरू पत्ता लगाउनु पर्ने समस्याहरूमा रेखीय योजनाको प्रयोग हुन्छ । रेखीय योजनासँग सम्बन्धित समस्याहरू समाधानका लागि

असमानता र समीकरण समावेश भएको एउटा गणितीय नमुना (Mathematical model) को निर्माण गरिन्छ । दैनिक जीवनका विभिन्न व्यवहारिक समस्याहरू समाधानका लागि रेखीय योजना (Linear programming) को प्रयोग हुन्छ । रेखीय योजनाको धारणा दिनुभन्दा अगाडि समीकरण र असमानताको धारणा दिनु आवश्यक हुन्छ । माध्यमिक तहको अतिरिक्त गणितको पाठ्यक्रममा रेखीय समीकरण पनि समावेस गरिएको छ । यस एकाइमा रेखीय असमानताको परिचय, रेखीय असमानताको ग्राफ, रेखीय योजनाको परिचय, रेखीय योजनाको प्रयोगबाट दैनिक जीवनका समस्याहरूको समाधान जस्ता कुराहरू समावेश गरिएको छ ।

२. विषयवस्तु :

२.१ रेखीय असमानता :

सङ्ख्या वा वस्तुहरू सधैं बराबर पाईंदैनन् । ठूला वा साना पनि हुन्छन् । उदाहरणका लागि सङ्ख्या रेखामा दायाँतिरको (वा माथितिरको) सङ्ख्या बायाँतिरको (वा तलतिरको) सङ्ख्या भन्दा जहिले पनि ठूलो हुन्छ । दाजुको उमेर भाइको भन्दा जहिले पनि बढी हुन्छ । यस प्रकारका उदाहरणहरू थुप्रै पाइन्छन् । गणितीय सङ्केतहरू $\geq$, $\leq$, $<$ वा $>$ प्रयोग भएको घटी वा बढी (ठूलो वा सानो) जनाउने गणितीय वाक्यलाई नै असमानता भनिन्छ । यदि घाताङ्क एक मात्र भएको चल वा चलहरू प्रयोग भएको असमानता छ भने त्यो रेखीय असमानता हुन्छ ।

एउटा विज्ञापन यसरी दिइएको छ ।

> *उमेर २० देखि ४० वर्षको, B.Ed. उत्तीर्ण र कम्तीमा ५ वर्षको शिक्षण अनुभव भएको एक गणित शिक्षक चाहिएको छ ।*

यदि उमेरलाई x ले र अनुभवलाई y ले जनाउने हो भने गणितीय भाषा यसरी लेख्न सकिन्छ :

$20 \le x \le 40,\ y \ge 5$

बिना SLC परीक्षामा गणित विषयमा पास भइन् । उनले गणितमा z अङ्क प्राप्त गरेकी छिन् । यहाँ बिनाले प्राप्त गरेको अङ्कलाई यसरी व्यक्त गर्न सकिन्छ :

$z \le 32$

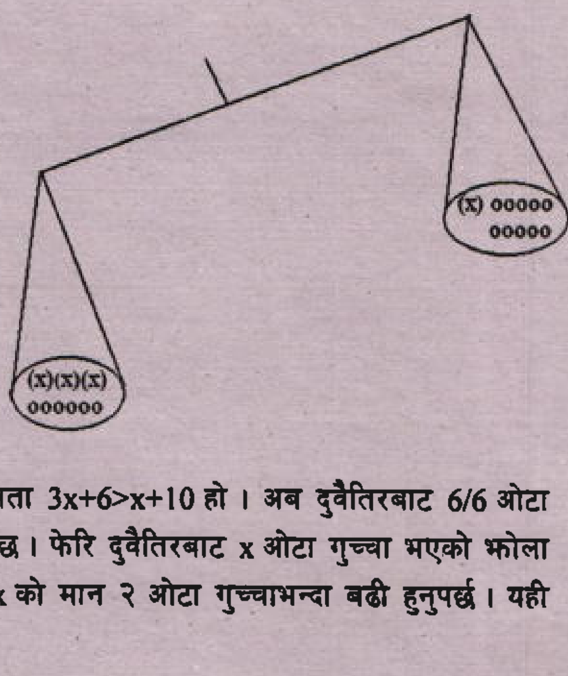
असमनाता सधै परिस्तितिमा भर पर्छ । जस्तै : मसँग रु ७० छ । यदि एउटा कापीको मूल्य रु. १५ पर्छ भने म कापीहरू कतिओटासम्म किन्न सक्छु ? यसलाई असमानतामा यसरी व्यक्त गरिन्छ :

$0 \le n \le 4$, जहाँ, n ले कापीको सङ्ख्या जनाउँछ ।

माथि दिइएका असमानताहरू सबै रेखीय असमानताहरू हुन् ।

२.२ एक चलयुक्त रेखीय असमानताको हल

तराजुबाट पनि असमानतालाई जनाउन सकिन्छ ।



माथि दिइएको तराजुबाट जनाइएको असमानता $3x+6>x+10$ हो । अब दुवैतिरबाट 6/6 ओटा गुच्चा भिक्दा पनि तराजुको ढल्काइ उही हुन्छ । फेरि दुवैतिरबाट x ओटा गुच्चा भएको झोला झिक्दा पनि उत्ति नै ढल्काइरहन्छ । त्यसैले x को मान २ ओटा गुच्चाभन्दा बढी हुनुपर्छ । यही नै यस असमानताको हल हो ।

अर्थात्

अथवा, $3x+6>x+10$

अथवा, $3x-x>10-6$

अथवा, $2x>4$

अथवा, $x>2$

माथिको उदाहरणबाट स्पष्ट हुन्छ कि हामी असमानतामा पनि समीकरणमा जस्तै दुवैतर्फ उही सङ्ख्या जोड्न वा घटाउन वा धनात्मक सङ्ख्याले दुवैतिर गुणन वा भाग गर्न सक्छौं । तर ऋणात्मक सङ्ख्याले दुवैतिर गुणन वा भाग गर्दा असमानताको चिन्ह बदलिन्छ ।

माथिको छलफलका आधारमा असमानताका गुणहरूलाई गणितीय भाषामा यसरी व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

वास्तविक सङ्ख्या a,b र c का लागि

क) यदि $a>b$, छ भने $a+c>b+c$ हुन्छ ।

ख) यदि $a>b$, छ र $c>0$ छ भने $ac>bc$ हुन्छ ।

ग) यदि $a>b$, छ र $c<0$ छ भने $ac<bc$ हुन्छ ।

घ) यदि $a>b$, छ र $c>0$ छ भने $a/c>b/c$ हुन्छ ।

ङ) यदि $a>b$, छ र $c<0$ छ भने $a/c<b/c$ हुन्छ ।

२.३ दुई चलयुक्त रेखीय असमानताको ग्राफ

मानौं x र y दुई परिमाणहरू छन् । अब x र y को तुलना गर्दा तल दिइएका मध्ये कुनै पनि सत्य हुनसक्छ ।

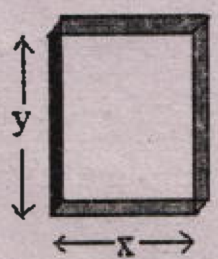
$y=x$,

$y>x$,

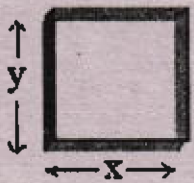
$y<x$

यस प्रकारको सम्बन्धलाई Trichotomy नियम भनिन्छ ।

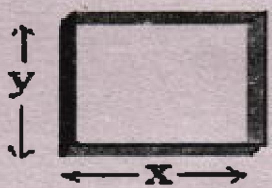
उदाहरणका लागि पुस्तकालयका किताबहरूको आकारलाई वर्गीकरण लम्बाइ र चौडाइको सम्बन्धका आधारमा गर्ने गरिन्छ । मानौं उचाइ y से.मी. र चौडाइ x से.मी. छ भने तलका तीनओटा सम्बन्धले किताबको आकारको वर्गीकरण गरिन्छ ।



x भन्दा y बढी भएको अर्थात $y>x$ भएको किताबलाई Potrait आधारका किताब भनिन्छ ।

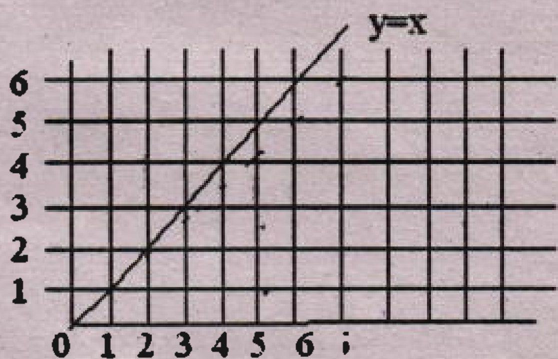


x र y बराबर भएको अर्थात y=x भएको किताबलाई Square आकारको किताब भनिन्छ ।



x भन्दा y घटी भएको अर्थात y<x भएको किताबलाई Landscape आकारको किताब भनिन्छ ।

यी तिनओटै अवस्थाहरू y=x, y>x र y<x को ग्राफ खिच्दा बेग्लाबेग्लै ग्राफहरू प्राप्त हुन्छन् । यहाँ y=x एउटा दुई चलयुक्त रेखीय समीकरण हो भने y>x र y<x असमानता हुन् । x र y लाई वास्तविक सङ्ख्या (Real number) मानेर y=x समीकरणको ग्राफ खिच्दा उद्‌गम बिन्दुबाट जाने रेखा प्राप्त हुन्छ भने y>x र y<x का ग्राफहरू कस्ता होलान् ?



अब y=x समीकरणको ग्राफको आधारमा भन्न सकिन्छ, xy समतलमा पर्ने सम्पूर्ण बिन्दुहरुलाई अवस्थिति (Location) को आधारमा तीन भागमा वर्गीकरण गर्न सकिन्छ ।

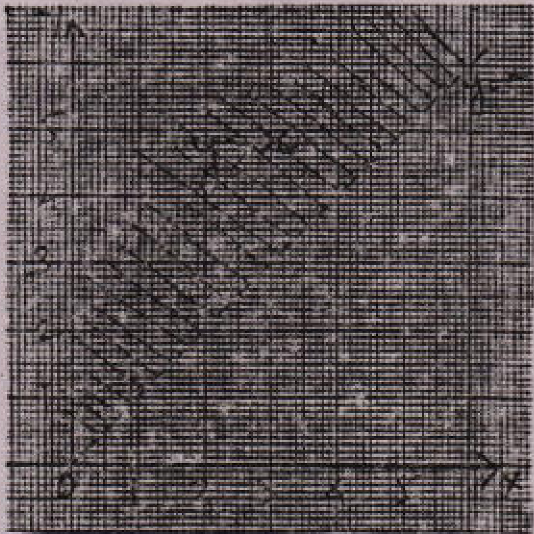
क) y=x सीधा रेखामा पर्ने,

ख) y=x सीधा रेखाभन्दा तल पर्ने,

ग) y=x सीधा रेखाभन्दा माथि पर्ने ।

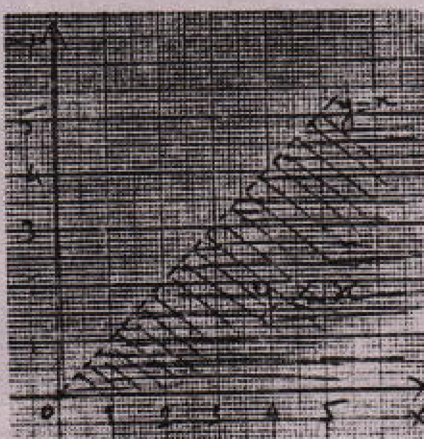
x-निर्देशाङ्क र y-निर्देशाङ्क बराबर हुने सबै बिन्दुहरू y=x सीधा रेखामा पर्दछन् भने सो भन्दा माथि पर्ने सबै बिन्दुहरूको y निर्देशाङ्क ठूलो हुन्छ । यो क्षेत्रलाई y>x ले जनाइन्छ ।

यहाँ $y>x$ एउटा दुई चलयुक्त रेखीय असमानता हो । यसको ग्राफ खिच्दा एउटा सङ्ख्या अर्धसमतल (Half plane) प्राप्त हुन्छ ।



त्यसैगरी $y=x$ सीधा रेखाभन्दा तल पर्ने सबै बिन्दुहरूको x निर्देशाङ्कभन्दा y निर्देशाङ्क सानो हुन्छ । यो क्षेत्रलाई $y<x$ ले जनाइन्छ । $y<x$ ले जनाउने समतल तल्लो अर्धसमतल हो । यूक्लिडियन ज्यामितीयमा एउटा समतलमा खिचिएको सरल रेखाले समतललाई ३ भागमा बाँड्छ । सरलरेखा, सरलरेखाभन्दा माथिको अर्धसमतल, सरलरेखाभन्दा तलको अर्धसमतल । यसरी दुई चलयुक्त सरल रेखीय असमानता (Two variable linear inequality) ले समतललाई नै विभाजन गरी देखाउँछ ।

माथिका सम्बन्धहरु $y=x$, $y>x$ र $y<x$ लाई x,y प्राकृतिक सङ्ख्या, इन्टिजर सङ्ख्या लिएर ग्राफ खिच्नुहोस् र माथि खिचिएको ग्राफसँग तुलना गर्नुहोस् । के फरक पाउनु हुन्छ, नोट गरी छलफल गर्नुहोस् ।



$y=mx+c$ जस्ता समीकरणले सीधारेखा जनाउँछ तर $y \le mx+c$ र $y \ge mx+c$ ले समतल जनाउँछ । माथिको उदाहरणमा x,y वास्तविक सङ्ख्या भएमा $y<x$ वा $y>x$ जस्ता दुई चलयुक्त असमानताले क्षेत्र जनाउँछ भने कुराको छलफल भयो । $y<x$ वा $y>x$ ले जनाउने क्षेत्र पत्ता लगाउन सर्वप्रथम $y=x$ को ग्राफ खिच्नु पर्दछ । अब भन्नुहोस् $y>x$ ले जनाउने क्षेत्र र $y \le x$ ले जनाउने क्षेत्रबीच के भिन्नता होला ?

$y=x$ रेखामा पर्ने कुनै पनि बिन्दु $y<x$ वा $y>x$ ले जनाउने क्षेत्रमा पर्दैनन् तर $y \ge x$ वा $y \le x$ ले जनाउने क्षेत्रलाई बन्द अर्धसमतल (Closed half plane) भनिन्छ भने $y<x$ वा $y>x$ ले जनाउने क्षेत्रलाई खुला अर्धसमतल (Open half plane) भनिन्छ । यसलाई जनाउन विच्छेदित रेखा (Broken line) प्रयोग गर्ने चलन छ ।

असमानताले जनाउने क्षेत्र अर्थात् असमानतालाई मान्य हुने बिन्दुहरूको समूह नै उक्त असमानताको हल (Solution) समूह हो ।

दुई चलयुक्त रेखीय असमानताहरूलाई सामान्य रूपमा यस प्रकारले लेख्ने गरिन्छ ।

i) $ax+by<c$,

ii) $by>c$,

iii) $ax+by \le c$,

iv) $ax+by \ge c$.

जहाँ a,b,x र y वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन्, a र b दुवै एकैचोटी शुन्य हुन सक्दैन ।

$3x+5y=15$ को ग्राफ खिच्नका लागि दुईओटा बिन्दुका निर्देशाङ्कहरू थाहा भए पुग्छ । सजिलै पत्ता लगाउन सकिने दुई बिन्दुहरू भनेका $3x+5y=15$ ले x अक्ष र y अक्षलाई काट्ने बिन्दुहरू हुन् ।

अर्थात्,

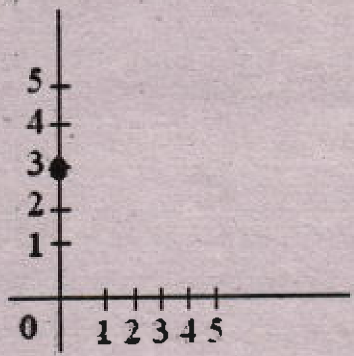
a) $x+0$

$3\times0+5\times y=15$

$5y=15$

$y=3$

अर्थात्, $3x+5y=15$ ले y अक्षलाई (0,3) मा काट्छ ।



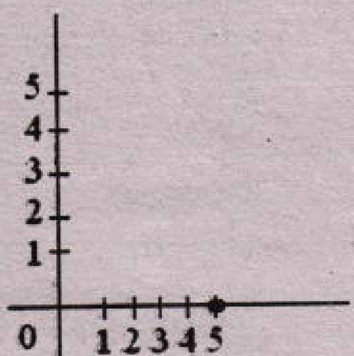
b) y=0

3x+5×0=15

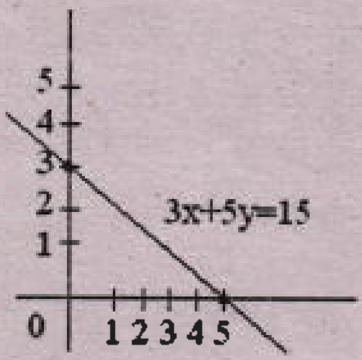
3x=15

x=5

अर्थात्, 3x+5y=15 ले x अक्षलाई (5,0) मा काट्छ ।



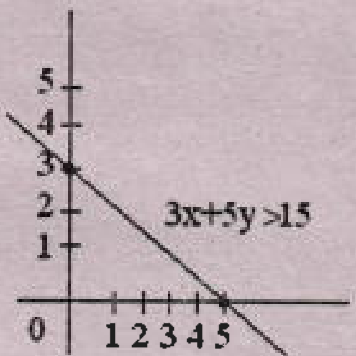
c) अब बिन्दु (0,3) र बिन्दु (5,0) लाई जोड्ने र त्यसको नाम 3x+5y=15 दिने । उक्त हिसाब मनमनै पनि गर्न सकिन्छ । 3x+5y=15 मा 3x लाई हातले छोप्ने र 5y=15 बाट y को मान निकाल्ने जुन y=3 हुन्छ । यसबाट (0,3) बिन्दु पत्ता लाग्छ । त्यसैगरी 3x+5y=15 मा 5y लाई छोपेर अर्को बिन्दु (5,0) पत्ता लगाउन सकिन्छ ।



यसरी मौखिक रूपमा सीधा रेखाले x अक्ष र y अक्षलाई काट्ने बिन्दुहरू भन्न सकिन्छ । माथिको उदाहरणमा 3x+5y=15 रेखाले xy समतललाई दुई अर्धसमतलमा बाँडेको छ । अब 3x+5y>15 ले कुन अर्धसमतललाई जनाउँछ भन्ने कुरा पत्ता लगाउनका लागि सबभन्दा सजिलो तरिका उद्‌गम बिन्दु (0,0) सो असमानतामा प्रतिस्थापन गर्नु हो । यसको कारण के होला ? यदि 3x+5y>15 असमानताका लागि लिइएन र Associated रेखा उद्‌गम बिन्दुमा पर्दैन भने यो बिन्दु कि त रेखाको माथिल्लो समतल कि त तल्लो समतलमा पर्नुपर्छ । यसर्थ उदगम बिन्दुको निर्देशाङ्क दिइएको असमानतालाई मान्य भए त्यसको समाधान क्षेत्र उद्‌गम बिन्दु भएतिर पर्छ, नभएमा अर्कोतिर पर्छ ।

जस्तै : यहाँ, x=0, y=0 राख्दा 3×0+5×0>15

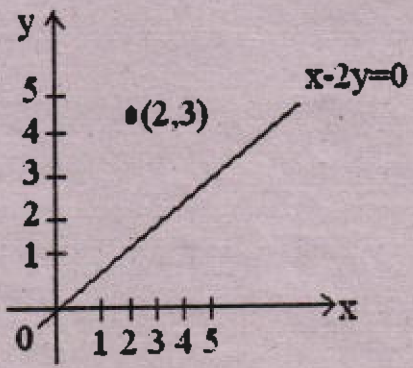
अर्थात् 0>15 जुन असत्य छ ।



त्यसैले 3x+5y>15 ले उदगम बिन्दु भएतिरको (तलको) अर्धसमतललाई जनाउँन सक्दैन । अर्थात् उदगम बिन्दुको विपरीततिरको (माथिको) क्षेत्रलाई जनाउँछ ।

यदि c=0 भएको असमानता भएमा उद्‌गम बिन्दु राखेर परीक्षण गर्न सकिदैन (किन कि ax+by=0 उद्‌गम बिन्दु (0,0) बाट जान्छ) । यस्तो अवस्थामा अरु कुनै थाहा भएको बिन्दुको मान असमानतामा प्रतिस्थापन गरी असमानताले जनाउने क्षेत्र पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

उदाहरणका लागि $x-2y \leq 0$ लिन सकिन्छ । अब यसका लागि $x-2y=0$ को चित्र खिचौं ।



यहाँ $x-2y=0$ सीधा रेखा उद्गम बिन्दु (0,0) बाट जान्छ ।

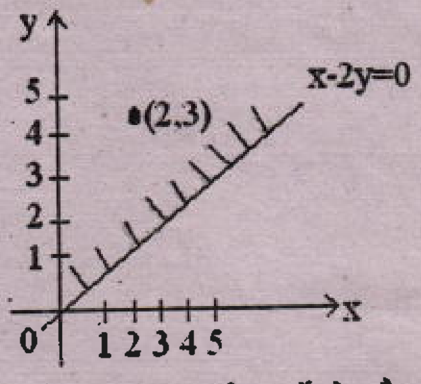
$x-2y \leq 0$ ले जनाउने क्षेत्र पत्ता लगाउनका लागि कुनै थाहा भएको बिन्दु मानौ (2,3) लिऔँ ।

(परीक्षणका लागि लिँदा ≤ भए पनि < मात्र लिइन्छ)।

$x-2y<0$ मा राख्दा

$2-2\times3<0$

$-4<0$ जुन सत्य छ ।



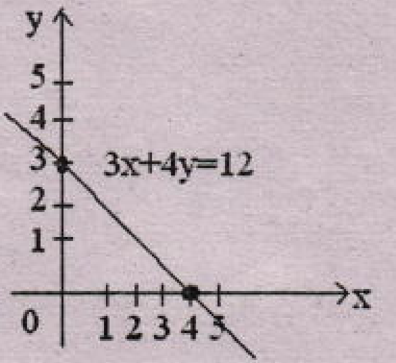
त्यसैले बिन्दु (2,3) तिर पर्ने क्षेत्र नै असमानता $x-2y \leq 0$ ले जनाउने क्षेत्र हो ।

अब अर्को एउटा उदाहरण लिऔँ ।

गीताले ३ ओटा पेन्सिल र ४ ओटा इरेजर किनिन् । उनीसँग बढीमा १२ रूपैयाँ थियो भने यसलाई गणितीय भाषामा लेख्दा,

$3x+4y \leq 12$ जहाँ x र y क्रमशः पेन्सिल र इरेजरका मूल्यहरू हुन् ।

अब $3x+4y \leq 12$ को ग्राफ खिचौं ।



२.४ रेखीय असमानता प्रणाली

एउटा तेल उद्योगले तोरीको तेल २ लिटर र ३ लिटरको जर्किनमा राखेर बेच्ने गर्दछ । १८ लिटर वा सोभन्दा बढी अर्डर गरेमा छुटसमेत दिन्छ र १२ लिटरभन्दा कम अर्डरको लागि डेलिभरी चार्ज आफैले व्यहोर्नु पर्छ । यस अवस्थालाई गणितीय भाषामा यसरी व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

यहाँ मानौं

x=साना जर्किनको सङ्ख्या (२ लि.का)

y=ठूला जर्किनको सङ्ख्या (३ लि. का)

पहिलो शर्तअनुसार,

$2x+3y\leq 18$

यस असमानताले अर्डर पाइने क्षेत्रलाई जनाउँछ ।

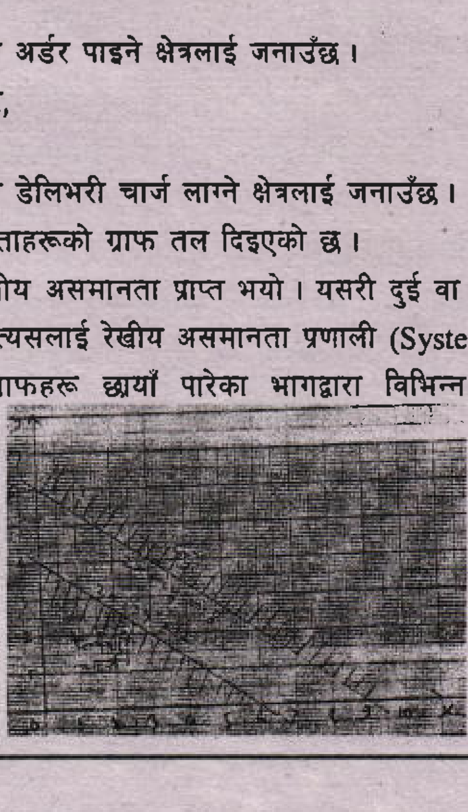
दोस्रो शर्तअनुसार,

$2x+3y<12$

यस असमानताले डेलिभरी चार्ज लाग्ने क्षेत्रलाई जनाउँछ ।

अब यी असमानताहरूको ग्राफ तल दिइएको छ ।

यहाँ दुईओटा रेखीय असमानता प्राप्त भयो । यसरी दुई वा दुईभन्दा बढी रेखीय असमानताहरू समावेश भएमा त्यसलाई रेखीय असमानता प्रणाली (System of linear inequality) भनिन्छ । तल दिइएका ग्राफहरू छायाँ पारेका भागद्वारा विभिन्न रेखीय प्रणालीका हल समूहहरू देखाइएका छन् ।



२.५ रेखीय योजनाको परिचय

रेखीय योजना भनेको स्रोतहरूको अधिकतम उपयोगका लागि प्रयोग गरिने एउटा Technique हो । यसको प्रयोग दोस्रो विश्वयुद्धपछि शुरु भएको हो । रसियन गणितज्ञ L.V. Kantorovich ले यसको शुरुआत गरेका हुन् भने अमेरिकन गणितज्ञ George B. Dantzig ले यसको विकास गरेका हुन् । अहिले यो विधि (Technique) विभिन्न खालका व्यापारिक, औद्योगिक समस्याहरू समाधानका लागि व्यापक रूपमा प्रयोग गरिन्छ । विभिन्न क्षेत्र (व्यापारिक, औद्योगिक) को निर्णयगर्ने (decision making) प्रक्रियाका लागि यो निकै सहयोगी मानिन्छ । रेखीय (Linear) को अर्थ चलहरूको सम्बन्ध सीधा रेखा ($y=mx+c$) ले व्यक्त गर्न सकिने र योजना (Programming) को अर्थ व्यवस्थित (Systematically) रूपमा निर्णय लिनु (Decision making) हो । यसबाट स्पष्ट हुन्छ कि रेखीय योजना भनेको दिइएका शर्तहरूमा Phenomenon लाई प्रतिनिधित्व गर्ने चलहरूको सम्बन्ध रेखीय भएको अवस्थामा उद्योग, व्यापार, व्यावसायहरूमा लगानीलाई कम गर्ने र उत्पादन तथा नाफा बढी गर्ने उद्देश्यले साधन, स्रोत, पूँजीको परिचालन गरिन्छ ।

यसप्रकारका रेखीय योजना नै सबैभन्दा उपयुक्त गणितीय विधि (Technique) हुन् ।

रेखीय योजना प्रयोग गरी लागत न्युनतम गर्ने (Minimize) उत्पादन वा नाफा अधिकतम गर्ने (Maximize) प्रयास गरिन्छ । रेखीय योजनामा कुनै रेखीय फलन (Linear function) को मान निश्चित शर्तहरू (Constraints) लाई मान्दा हुने गरी अधिकतम वा न्युनतम गरिन्छ । यसरी रेखीय योजना भनेको असमानताका रूपमा शर्तहरूका आधारमा चलहरूको रेखीय फलनको अधिकतम वा न्युनतम मान पत्ता लगाउनु हो । रेखीय योजनासम्बन्धी समस्याहरूमा अधिकतम वा न्युनतम मान निकाल्नुपर्ने रेखीय फलनलाई उद्देश्य फलन (Objective function) भनिन्छ र समीकरण वा असमानताका रूपमा व्यक्त अवस्थाहरूलाई शर्त (Constraints) भनिन्छ ।

रेखीय योजनाको प्रयोग व्यापक क्षेत्रमा हुन्छ । जस्तै : कृषि, व्यापार, उद्योग, बोलपत्र मूल्याङ्कन, यातायात, विज्ञापन, आर्थिक योजना आदि क्षेत्रमा रेखीय योजनाको प्रयोग हुन्छ ।

२.५.२ आधारभूत धारणा र सङ्केत (Basic concepts and notation):

क) रेखीय परिकल्पना (Linearity assumption)

रेखीयको अर्थ सीधा रेखा अर्थात चलहरूको समानुपातिक सम्बन्धलाई बुझिन्छ । जस्तै लागत दोब्बर हुँदा उत्पादन/मुनाफा पनि दोब्बर हुन्छ । दुई मेसिन/मानिसले गरेको काम एक मेसिन/मानिसले गरेको कामको दोब्बर हुन्छ ।

ख) उद्देश्य फलन (Objective function)

अधिकतम गर्ने वा न्युनतम गर्ने भन्ने कुराको निर्धारण गर्ने फलनलाई उद्देश्य फलन भनिन्छ। उदाहरणका लागि उत्पादन/नाफालाई अधिकतम गराइन्छ (Maximized) भने लागतलाई न्युनतम गराइन्छ (Minimized)। उद्देश्य फलनलाई प्राप z वा p अक्षरले जनाइन्छ।

उद्देश्य फलनलाई सम्पूर्ण क्रियाकलापहरूको योगफलको रूपमा व्यक्त गरिन्छ।

जस्तै :

$p=c_1x_1+c_2x_2+\dots\dots+c_jx_j+\dots\dots+c_nx_n$

यहाँ n ओटा क्रियाकलापहरू छन्। c_jx_j को अर्थ j औ क्रियाकलापमा x_j एकाइको क्रियाकलापले c_j प्रतिफल (नाफा वा नोक्सान) दिन्छ।

ग) शर्त (Constraints)

निर्णय चल (decision variable) सँग सम्बन्धित सीमितता (Limitation) लाई शर्त भनिन्छ। यसलाई प्रायः असमानताका रूपमा व्यक्त गरिएको हुन्छ।

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\dots+a_{1n}x_n\leq b$

घ) सम्भाव्य हल (Feasible solution)

दिइएको शर्तअनुसार मान्य हुने सम्पूर्ण हलहरूलाई संभाव्य हल भनिन्छ। संभाव्य हलहरू देखाउने क्षेत्रलाई सम्भावना क्षेत्र (Feasible region) भनिन्छ।

ङ) सर्वोत्तम हल (Optimum solution)

सम्पूर्ण सम्भाव्य हलहरूमध्ये सबभन्दा उपयुक्त हल नै सर्वोत्तम हल भनिन्छ।

२.५.३ रेखीय योजनाको सामान्य रूप (General form of linear programming)

$x_1, x_2,\dots\dots,x_n$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् जसले

$P=c_1x_1+c_2x_2+\dots\dots+c_jx_j\dots\dots+c_nx_n$

लाई तल दिइएको शर्तमा

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\dots+a_{1j}x_j+\dots\dots+a_{1n}x_n(\leq,\geq)b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots\dots+a_{2j}x_j+\dots\dots+a_{2n}x_n(\leq,\geq)b_2$

....

....

....

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots\dots+a_{mj}x_j+\dots\dots+a_{mn}x_n(\leq,\geq)b_m$

सर्वोत्तम (Optimum) हल दिन्छ र जहाँ $x_j\geq0$, $j=0,1,2;\dots\dots n$ र a_j, b_j सबै Constant हुन्। यहाँ सर्वोत्तम हल भन्नाले अधिकतम (Maximize) वा न्यूनतम (Minimize) हुनसक्छ।

२.५.४ रेखीय योजनाको हल (ग्राफ बिधि)

रेखीय योजनासम्बन्धी समस्याहरूको हल गर्ने विधिहरू मुख्यतया दुईओटा छन् । ती हुन् simplex विधि र ग्राफ विधि । माध्यमिक तहसम्म ग्राफ विधि मात्र प्रयोग गरिएको पाइन्छ । ग्राफ विधिबाट दुई चलयुक्त समस्यामात्र समाधान गर्न सकिन्छ ।

ग्राफ विधिबाट रेखीय योजनाको समस्या समाधानका चरणहरू यस प्रकार छन् :

- असमानताहरू ग्राफ खिच्ने (छायाँ पारी असमानताले जनाउने क्षेत्र) ।
- सर्वमान्य क्षेत्र (Feasible region) पत्ता लगाउने (सबै असमानतालाई मात्र हुने क्षेत्र पत्ता लगाउने) ।
- संभाव्य क्षेत्र एक बहुभुज हुन्छ । सो बहुभुजका कुना (Corner) हरूको निर्देशाङ्क दिइएको उद्देश्य फलनमा राख्ने ।
- उद्देश्य फलनलाई अधिकतम गर्नु पर्ने भएमा अधिकतम मान र न्युनतम गर्नु पर्ने भएमा न्युनतम मान पत्ता लगाउने ।

उदाहरण १ :

पेम्बाको एउटा साइकलस्टोर छ । उसले प्रति महिनामा १२० ओटा साइकल बेच्ने गर्दछ । साइकल कम्पनीको सर्तअनुसार महिलाले प्रयोग गर्ने साइकलभन्दा कम्तीमा ३ गुणा बढी पुरुषले प्रयोग गर्ने साइकल बेच्नु पर्दछ । उनलाई पुरुषले प्रयोग गर्ने साइकल बेच्दा रु.१०० नाफा हुन्छ भने महिलाले प्रयोग गर्ने साइकल बेच्दा रु.१५० नाफा हुन्छ । अधिकतम नाफा गर्न उनले पुरुषको साइकल र महिलाको साइकल कतिओटा बेच्नु पर्ला ?

यहाँ,

उनले बेच्नुपर्ने पुरुषको साइकल सङ्ख्या $=x$

उनले बेच्नुपर्ने महिलाको साइकल सङ्ख्या $=y$

उद्देश्य फलन $P=100x+150y$ हो, जसलाई अधिकतम गर्नु छ । दिइएको शर्तका आधारमा

$x+y\leq 120$

$x\geq 3y$ अर्थात् $x-3y\geq 0$

$x\geq 0,\ y\geq 0$

यी सर्तहरूलाई ग्राफ (लेखा चित्र) मा प्रस्तुत गर्दा,

लेखाचित्रअनुसार बहुभुज ABC नै सर्वमान्य क्षेत्र (Feasible region) हो । बहुभुज ABC का कुनाका निर्देशाङ्कहरू A(0,0), B(120,0) र C(90,30) लाई उद्देश्य फलन $P=100x+150y$ मा प्रतिस्थापन गर्दा,

बिन्दु A(0,0) मा $P=100\times 0+150\times 0 = 0$

बिन्दु B(120,0) मा $P=100\times 120+150\times 0 = 12000$

बिन्दु C(90,30) मा $P=100\times30+150\times90 = 3000+13500 = 16500$

उद्देश्य फलन P को अधिकतम थप बिन्दु C मा 16500 छ ।

त्यसकारण पेम्बाले अधिकतम नाफा गर्नका लागि ३० ओटा पुरुष साइकल र ९० ओटा महिला साइकल बेच्नु पर्छ । जसबाट उसलाई प्रति महिना रु.१६५०० नाफा हुन्छ ।

उदाहरण २

डाक्टरले एकजना रक्त अल्पताको विरामीलाई कम्तीमा २४०० mg फलाम, 2100mg भिटामिन ३, र 1500mg भिटामिन B_2 राख्नुपर्ने सल्लाह दिएछन् । त्यसका लागि ब्राण्डका औषाधिहरू उपयुक्त ठहरिएका छन् । ब्राण्ड A को एक चक्की औषधिमा 40mg फलाम 10mg भिटामिन B_1 र 5mg भिटामिन B_2 छ र मूल्य रु.६ पर्छ । ब्राण्ड B को एक चक्की औषधिमा 10mg फलाम, 15mg भिटामिन B_1 र 15mg भिटामिन B_2 र मूल्य रु ८ पर्छ ।

सबभन्दा कम मूल्यमा चाहिने मात्रामा फलाम र भिटामिनहरू प्राप्त गर्न दुबै ब्राण्डका कतिकति चक्की औषधि किन्नु पर्ला ?

दिइएका शर्तहरूलाई तालिकामा राख्दा :

	ब्राण्ड A	ब्राण्ड B	आवश्यकता
फलाम	40mg	10mg	2400mg
भिटामिन B_1	10mg	15mg	2100mg
प्रति चक्की मूल्य	रु. ७	रु. ४	

मानौं ब्राण्ड A को औषधि x चक्की र ब्राण्ड B को औषधि y चक्की किन्नु पर्छ ।

उद्देश्य फलन मूल्य, $P=6x+8y$ जसलाई न्युनतम गर्नुपर्ने छ ।

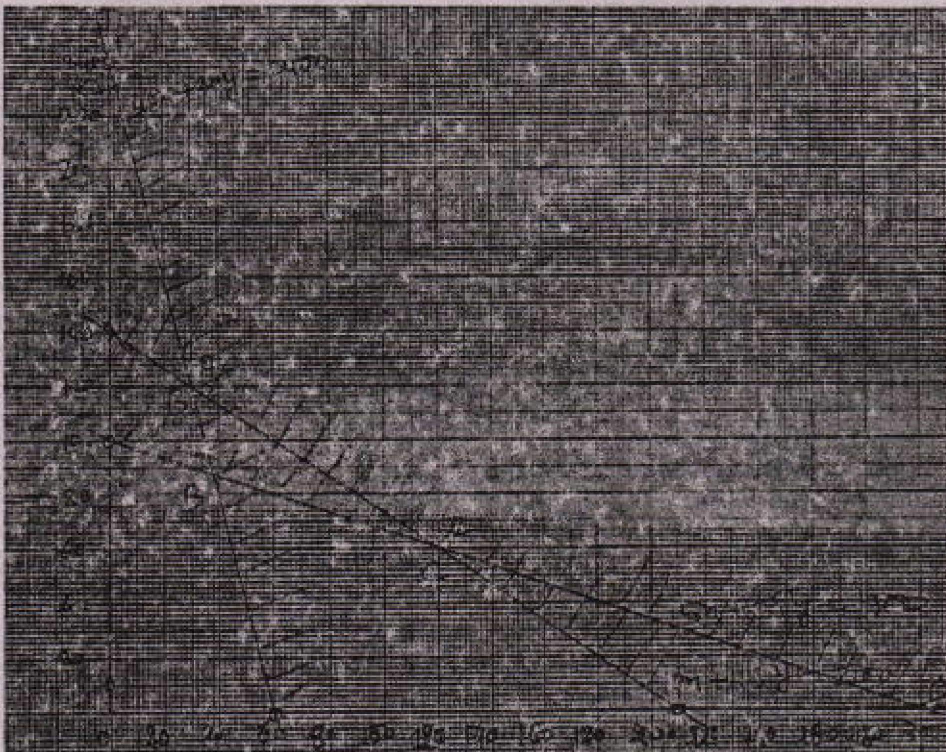
दिइएका शर्तहरू :

$40x+10y\geq2400$

$10x+15y\geq2100$

5x+15yG1500

$x\geq0,\ y\geq0$



दिइएका सर्तहरू (असमानहरू) को ग्राफ (लेखाचित्र) खिच्दा :

माथिको लेखाचित्रमा सर्वमान्य क्षेत्र Unbounded छ । यसका कुनाहरू A,B,C,D का निर्देशाङ्कहरू,

P=6x+8y मा प्रतिस्थापन गर्दा,

बिन्दु A(0, 240) मा, $P=6\times0+8\times240 = 1920$

बिन्दु B(30, 120) मा, $P=6\times30+8\times120 = 1140$

बिन्दु C(120, 60) मा, $P=6\times120+8\times60 = 1200$

बिन्दु D(0, 240) मा, $P=6\times300+8\times0 = 1800$

उद्देश्य फलन P को न्युनतम मान बिन्दु C(120, 60) मा 1200 छ । त्यसैले, उक्त बिरामीले न्युनतम मूल्यमा औषधि प्राप्त गर्न ब्राण्ड A को 120 चक्की र ब्राण्ड B को 60 चक्की किन्नु पर्छ र जसको मूल्य रु.1200 पर्दछ ।

३. परियोजना कार्य

निम्नलिखित समस्याहरु समाधान शिक्षणका लागि सिकाइ मोडुल तयार पार्नुहोस् ।

क)	एउटा उद्योगले काठको रुलर र प्लास्टिकको रुलर बनाउँछ । एउटा काठको रुलर उत्पादनमा रु. 1 र एउटा प्लास्टिकको रुलर उत्पादनमा रु 1.20 नाफा हुन्छ । काठको रुलर उत्पादन गर्न मेसिन A मा 2 मिनेट र मेसिन B मा 1 मिनेट समय लाग्छ । यदि मेसिन A चलाउन जम्मा 3 घण्टा समय र मेसिन B चलाउन जम्मा 5 घण्टा समय उपलब्ध छ भने सबभन्दा बढी नाफा गर्न सो उद्योगले कतिओटा काठको रुलर र कतिओटा प्लास्टिक रुलर बनाउनु पर्ला ?

ख)	एकजना किसानलाई आफ्नो खेतबारीमा प्रयोग गर्नका लागि रसायन A,B, र C क्रमशः 10kg, 10kg र 12kg चाहिन्छ । झोल रसायन प्रति जर्किनमा A,B, र C क्रमशः 5kg, 2kg, र 1kg रहेको हुन्छ । पाउडर रसायन प्रति प्याकेजमा A, B र C क्रमशः 1kg, 2kg र 4kg रहेको हुन्छ । झोल रसायन प्रति ग्यालन रु ३ पर्छ र पाउडर रसायन प्रति प्याकेट रु ३ पर्छ । न्युनतम मूल्यमा आवश्यकता पूरा गर्न झोल रसायनको जर्किन र पाउडर रसायनको प्याकेट कति कतिओटा किन्नु पर्छ ?

४. सन्दर्भ सामग्रीहरू :

- Maskey, S.M. Introduction to Modern mathematics, vol-2, Ratna Pustak Bhandar, Bhotahity, Kathmandu-1997.
- Goel, B.S. and Mittal, S.K., Operations Research, Pragati Prakashan, Reerut, India-1990.
- Gupta R.K., Operations Research, Krishna Prakashan Mandir, Meerut, India-1995.
- Kothari C.R., Quantitative Techniques, Vikash Publishing House Pvt, Ltd, New Delhi, India-1994.
- Upadhaya, M.P. Optimisations and Linear Programming, Mrs Pawan Paudel, Kathmandu-1993.
- Mathematics Education Forum, Vol-I, Issue 6, Council for Mathematics Education, Kathmandu.

अनुसूची १

Euclid's Element contains twenty-three definitions, five postulates, five axioms and forty-eight propositions.

Definitions

1. A ***point*** is that which has no parts.
2. A ***line*** is length without breadth.
3. The extremities of a line are points.
4. A ***straight line*** is a line which lies evenly with the point on itself.
5. A ***surface*** is that which has only length and breadth.
6. The extremities of a surface are lines.
7. ***A plane surface*** is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.
8. ***A plane angle*** is the inclination to one another of two lines in a plane if the lines meetand do not lie in a straight line.
9. When the lines containing the angle are straight lines, the angle is called a ***rectilinear angle.***
10. When a straight line erected on a straight line makes the adjacent angles equal to one another, each of the equal angles is called a ***right angle,*** and the straight line standing on the other is called ***& perpendicular*** to that on which it stands.
11. An ***obtuse angle*** is an angle greater than a right angle.
12. An ***acute angle*** is an angle less than a right angle.
13. A ***boundary*** is that which is an extremity of anything.
14. ***A. figure*** is that which is contained by any boundary or boundaries.
15. A ***circle*** is a plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one particular point among those lying within the figure are equal.
16. The particular point (of Definition 15) is called the ***center*** of the circle.
17. A ***diameter*** of a circle is any straight line drawn through the center and terminated in both directions by the circumference of the circle. Such a straight line also bisects the circle.
18. A ***semicircle*** is the figure contained by a diameter and the circumference cut off by it. The center of the semicircle is the same as that of the circle.19. ***Rectilinear figures*** are those which are contained by straight lines, ***trilateral*** figures being those contained by three, ***quadrilateral*** those contained by four, and ***multilateral*** those contained by more than four straight lines.
20. Of the trilateral figures, an ***equilateral triangle*** is one which has its three sides equal, an isosceles triangle has two of its sides equal, and a ***scalene triangle*** has its three sides unequal.
21. Furthermore, of the trilateral figures, a ***right-angled triangle*** is one which has a right angle, an ***obtuse*** angled triangle has an obtuse angle, and an ***acute-angled triangle*** has its three angles acute.
22. Of the quadrilateral figures, a ***square*** is one which is both equilateral and right-angled, an ***oblong*** is right-angled but not equilateral, a ***rhombus*** is equilateral but not right-angled, and a ***rhomboid*** has its opposite sides and angles equal to one another

but is neither equilateral nor right-angled. Quadrilaterals other than these are called ***trapezia.***

23. ***Parallel*** straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both direction, do not meet one another in either direction.

The postulates

1. A straight line can be drawn from any point to any point.
2. A finite straight line can be produced continuously in a straight line.
3. A circle may be described with any center and distance.
4. All right angles are equal to one another.
5. If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side together less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which the angles are together less than two right angles.

The Axioms or Common Notions:

1. Things which are equal to the same thing are also equal to one another.
2. If equals be added to equals, the wholes are equal.
3. If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.
4. Things which coincide with one another are equal to one another.
5. The whole is greater than the part,

The Propositions

1. On a given finite straight line to construct an equilateral triangle.
2. To place at a given point (as an extremity) a straight line equal to a given straight line.
3. Given two unequal straight lines, to cut off from the greater a straight line equal to the less.
4. If two triangles have the two sides equal to two sides respectively and have the angles contained by the equal straight lines equal, they will also have equal to the base equal to the base, the triangle will be equal to the triangle, and, the remaining angles will be equal to the remaining angles respectively, namely those which the equal sides subtend.

22\. In isosceles triangles the angles at the base are equal to one another, and if the equal straight lines be produced further, the angles under the bases will be equal to one another.

23\. If in a triangle two angles be equal to one another, the sides which subtend the equal angles will also be equal to one another.

24\. Given two straight lines constructed on a straight line (from its extremities) and meeting in a point, there cannot be constructed on the same straight line (from its extremities), and on the same sides of it, two other straight lines meeting in another point and equal to the former respectively, namely each to that which has the same extremity with it.

8\. If two triangles have the two sides equal to two sides respectively, and have also the base equal to the base, they will also have the angles equal which is contained by the equal straight lines.

9\. To bisect a given rectilinear angle.

10\. To bisect a given finite straight line.

11\. To draw a straight line at right angles to a given straight line from a given point on it.

12. To a given infinite straight line, from a given point which is not on it, to draw a perpendicular straight line.
13. If a straight line set up on a straight line make angles it will make either two right angles or angles equal to two right angles.
14. If with any straight line, and at a point on it, two straight lines not lying on the same side make the adjacent angles equal to two right angles, the two straight lines will be in a straight line with one another.
15. If two straight lines cut one another, they make the vertical angles equal to one another.
16. In any triangle, if one of the sides be produced the exterior angle is greater than either of the interior and opposite angles.
17. In any triangle two angles taken together in any manner are less than two right angles.
18. In any triangle the greater side subtends the greater angle.
19. In any triangle the greater angle is subtended by the greater side.
20. In any triangle two sides taken together in any manner are greater than the remaining one.
21. If on one of the sides of a triangle, from its extremities, there be constructed two straight lines meeting within the triangle, the straight lines so constructed will be less than the remaining two sides of the triangle, but will contain a greater angle.
22. Out of three straight lines, which are equal to three given straight lines, to construct a triangle; thus it is necessary that two of the straight lines taken together in any manner should be greater than the remaining one.
23. On a given straight line and at a point on it to construct a rectilinear angle equal to a given rectilinear angle.
24. If two triangle have the two sides equal to two sides respectively, but have the one of the angles contained by the equal straight lines greater than the other, they will also have the base greater than the base.
25. If two triangles have the two sides equal to two sides respectively, but have the base greater than the base, they will also have the one of the angles contained by the equal straight lines greater than the other.
26. If two triangles have the two angles equal to two angles respectively, and one side equal to one side, namely, either the side adjoining the equal angle, or that subtending one of the equal angles, they will also have the remaining sides equal to the remaining sides and the remaining angle equal to the remaining angle.
27. If a straight line falling on two straight lines make the alternate angles equal to one another, the straight lines will be parallel to one another.
28. If a straight line falling on two straight lines make the exterior angle equal to the interior and opposite angle on the same side or the interior angles on the same side equal to two right angles, the straight lines will be parallel to one another.
29. A straight line falling on parallel straight lines makes the alternate angles equal to one another, the exterior angle equal to the interior and opposite angle, and the interior angles on the same side equal to two right angles.
30. Straight lines parallel to the same straight line are also parallel to one another.
31. Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line.

32. In any triangle, if one of the sides be produced, the exterior angle is equal to the two interior and opposite angle, and the three interior angle of the triangle are equal to two right angles.
33. The straight lines joining equal and parallel straight lines (at the extremities which are) in the same directions (respectively) are themselves also equal and parallel.
34. In parallelogrammic areas the opposite sides and angles are equal to one another, and the diameter bisects the areas.
35. Parallelograms which are on the same base and in the same parallels are equal to one another.
36. Parallelograms which are on the same base and in the same parallels are equal to one another.
37. Triangles which are on the same base and in the same parallels are equal to one another.
38. Triangles which are on the same bases and in the same parallels are equal to one another.
39. Equal triangles which are on the same base and on the same side are also in the same parallels.
40. Equal triangles which are on equal bases and on the same side are also in the same parallels.
41. If a parallelogram have the same base with a triangle and be in the same parallels, the parallelogram is double of the triangle.
42. To construct, in a given rectilinear angle, a parallelogram equal to a triangle.
43. In any parallelogram the complements of the parallelograms about the diameter are equal to one another.
44. To a given straight line to apply, in a given rectilinear angle, a parallelogram equal to a given triangle.
45. To construct, in a giveft rectilinear angle, a parallelogram equal to a given rectilinear figure.
46. On a given straight line to describe a square.
47. In a right-angled triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the squares on the sides containing the right angle.
48. If in a triangle the square on one of the sides be equal to the squares on the remaining two sides of the triangle, the angle contained by the remaining two sides of the triangle is right.

(Source: Modern Mathematics, Vol. I, S.M. Maskey)